Chapitre 4 : Théorie Spectrale d'un Opérateur Auto-adjoint compact

§1 - Décomposition d'un opérateur en bloc d'opérateurs :

E désignera un Banach sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et $T : E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire borné.

Un sous-espace M de E est dit invariant par T si $T(M) \subset M$; on dit alors que M un sous-espace invariant par T, et aussi que T possède un sous-espace invariant M.

Un sous-espace M de E est dit réduisant par T si M possède un supplémentaire topologique N dans E et tels que M et N sont invariants par T ; on dit alors que T possède un sous-espace réduisant M.

<u>Exemple 1</u> : Tout sous-espace propre de T est invariant par T. En effet,

Soit M un sous-espace propre de T.
Donc $M = \ker(T - \lambda I)$, pour un certain scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$.
Si $x \in M$, alors $Tx = \lambda x \in M$. Donc $T(M) \subset M$.

<u>Exemple 2</u>. Prendre $E = H$ Hilbert, $T^* = T$, M un sous-espace propre de T.
Alors M est un sous-espace réduisant de T.
En effet, à partir de l'ex. 1, $T(M) \subset M$.
Montrons $T(M^\perp) \subset M^\perp$.
Soit $x \in M^\perp$, $m \in M$. On a donc
$$\langle Tx, m \rangle = \langle x, Tm \rangle = 0,$$
car $x \in M^\perp$, $Tm \in M$.
Donc $Tx \in M^\perp$, et alors $T(M^\perp) \subset M^\perp$.
$M^\perp$ étant un supplémentaire topologique de M dans H, donc M est réduisant par T.

<u>Définition 1</u>: Soit H un Hilbert, M un sous-espace de H, $T \in B(H)$. M est dit orthogonalement réduisant par T si M et $M^\perp$ sont invariants par T.

Exemple 3 : Dans l'ex. 2, M est orth. réd. par T

Soit maintenant $E = M \oplus N$ une S.D.T.

On note par P, la projection de E sur $M \parallel$ à N.

On note par :

$A : M \longrightarrow M$, défini par $A = PTP/M$;

$B : N \longrightarrow M$, " " $B = PT(I-P)/N$;

$C : M \longrightarrow N$, " " $C = (I-P)TP/M$;

$D : N \longrightarrow N$, " " $D = (I-P)T(I-P)/N$

Il est clair que $A \in B(M)$, $B \in B(N, M)$,

$C \in B(M, N)$, et $D \in B(N)$.

Soit $x \in E$, $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in M$, $x_2 \in N$.

On écrit $x = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} M \\ N \end{array}$, on a alors

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax_1 + Bx_2 \\ Cx_1 + Dx_2 \end{bmatrix},$$

$$Ax_1 + Bx_2 = PTx_1 + PTx_2$$
$$= PTx$$

$$Cx_1 + Dx_2 = (I-P)Tx_1 + (I-P)Tx_2$$
$$= (I-P)Tx.$$

On a donc

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PTx \\ (I-P)Tx \end{bmatrix},$$

et $PTx + (I-P)Tx = Tx.$

En posant $T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $(x = x_1 + x_2)$

on obtient $\underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{array}{c} \begin{bmatrix} PTx \\ (I-P)Tx \end{bmatrix} \end{array}}_{Tx} \begin{array}{l} M \\ N \end{array}.$

<u>Proposition 1</u>. Soit $E = M \oplus N$ une S.D.T,
et $T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ suivant cette décomposition.

On a alors :

(i) M invariant par T ssi $C = 0$;

(ii) N invariant par T ssi $B = 0$;

(iii) M et N inv. par T ssi $C = 0$ et $B = 0$.

<u>Preuve</u>: (i) "$\Rightarrow$". Sup. M inv. par T.
Montrons $C = 0$?

$C = (I-P)TP/M$. Soit $x \in M$. On a :

$Cx = (I-P)Tx$. Comme $Tx \in M$, donc

$Cx = 0$. Ceci montre $C = 0$.

" $\Leftarrow$ ". Supposons $C = 0$.

Montrons M invariant par T ?

Soit $x \in M$. On a donc $Cx = (I-P)Tx = 0$.

D'où $Tx \in \ker(I-P)$. Alors $Tx \in R(P)$.

Donc $Tx \in M$. c.q.f.d.

(ii) Même preuve que (i).

(iii) découle directement de (i) et (ii).

<u>Notation</u> : Soit $E = M \oplus N$, avec $T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$

$(C = 0, B = 0)$. On note alors $T = A \oplus D$.

Ici M est réduisant par T (T diagonal).

<u>Notation</u> : Soit M un sous-espace invariant par T.

On note par $T_M : M \longrightarrow M$, $x \mapsto T_M x = Tx$

T_M est donc bien défini, linéaire et borné.

Proposition 2. Soit $E = M \oplus N$ une S.D.T.

Soit $S \in B(E)$. Si $T = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}$ et $S = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$

suivant $E = M \oplus N$, on a alors

(i) $T + S = \begin{bmatrix} A_1 + A_2 & B_1 + B_2 \\ C_1 + C_2 & D_1 + D_2 \end{bmatrix}$,

(ii) $\lambda T = \begin{bmatrix} \lambda A_1 & \lambda B_1 \\ \lambda C_1 & \lambda D_1 \end{bmatrix}$, $(\lambda \in \mathbb{K})$,

(iii) $ST = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} A_2 A_1 + B_2 C_1 & A_2 B_1 + B_2 D_1 \\ C_2 A_1 + D_2 C_1 & C_2 B_1 + D_2 D_1 \end{bmatrix}$

(iv) $[T = S] \iff [A_1 = A_2,\ B_1 = B_2,\ C_1 = C_2,\ D_1 = D_2]$

Preuve: Exercice.

Proposition 3. Soit $E = M \oplus N$ une S.D.T.

On suppose $T = A \oplus D$ suivant $E = M \oplus N$.

Alors on a :

(i) T inversible ssi A et D inversibles.

(ii) $\sigma(T) = \sigma(A) \cup \sigma(D)$.

Preuve. (i) $\Rightarrow$? Supposons T inversible.

Montrons A et D inversibles ?

Il existe alors $S \in B(E)$ t.q. $ST = TS = I$.

Posons $S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{bmatrix}$ suivant $E = M \oplus N$.

On a donc

$$\begin{cases} I = ST = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 A & S_2 D \\ S_3 A & S_4 D \end{bmatrix} \\ I = TS = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AS_1 & AS_2 \\ DS_3 & DS_4 \end{bmatrix} \end{cases}$$

D'autre part, $I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$, où I_1 (resp. I_2) est l'opérateur identité sur M (resp. N).

Par identification, on obtient :

$S_1 A = AS_1 = I_1$, $S_4 D = DS_4 = I_2$.

Ceci montre que A et D sont inversibles.

Réciproquement, supposons A et D inversibles.

Montrons que T est inversible ?

Prendre $S = A^{-1} \oplus D^{-1}$.

~~On~~ Comme $A^{-1} \in B(M)$, $D^{-1} \in B(N)$, Donc $S \in B(E)$, et de plus, on a :

$$ST = (A^{-1} \oplus D^{-1}).(A \oplus D) = (A^{-1}A) \oplus (D^{-1}D)$$

$$= I_1 \oplus I_2 = I,$$

de m. $TS = I$.

T est donc inversible.

(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a alors

$$T - \lambda I = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A - \lambda I_1 & 0 \\ 0 & D - \lambda I_2 \end{bmatrix}$$

$$= (A - \lambda I_1) \oplus (D - \lambda I_2).$$

De (i), on tire :

$[T - \lambda I \text{ inv.}] \Longleftrightarrow [A - \lambda I_1 \text{ inv. et } D - \lambda I_2 \text{ inv}]$

$\Longleftrightarrow [\lambda \notin \sigma(A) \text{ et } \lambda \notin \sigma(D)]$

Ceci montre que:

$[\lambda \notin \sigma(T)] \Longleftrightarrow [\lambda \notin (\sigma(A) \cup \sigma(D)]$

D'où :

$[\lambda \in \sigma(T)] \Longleftrightarrow [\lambda \in \sigma(A) \cup \sigma(D)]$

Alors: $\sigma(T) = \sigma(A) \cup \sigma(D)$.

Remarques. (1) Si M est un sous-espace de E, et T compact, alors $T/_M$ est compact.

(2) Si M est un sous-espace invariant par T, et T compact, alors T_M est compact.

§2. Sous-espaces propres de T.

H désignera un espace de Hilbert complexe, $T \in B(H)$, et M un sous-espace de H.

Proposition: On suppose T normal, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $x \in H$

(i) Si λ est valeur propre de T associée au vecteur propre x, alors $\bar{\lambda}$ est valeur propre de T^* associée à x.

i.e. $(Tx = \lambda x) \Longrightarrow (T^*x = \bar{\lambda} x)$.

(ii) Si λ et μ sont des valeurs propres de T et $\lambda \neq \mu$, alors $\ker(T-\lambda I) \perp \ker(T-\mu I)$.

Preuve. (i) Supposons $Tx = \lambda x$.

Comme T est normal, donc $T-\lambda I$ l'est aussi.

Alors $\|(T-\lambda I)^* x\| = \|(T-\lambda I)x\| = 0$.

D'où $\|(T^* - \bar{\lambda} I)x\| = 0$. Alors $T^*x = \bar{\lambda} x$.

Proposition : On suppose T auto-adjoint. Si M est invariant par T, alors T_M est un opérateur auto-adjoint de B(M).

Preuve. Exercice.

Proposition : Si M est un sous-espace propre de T, alors M est invariant par T.

Preuve : Voir § 1 - ex. 2.

Proposition. Si T est auto-adjoint, et M est invariant par T, alors M est un sous-espace orthogonalement réduisant par T.

Preuve. Voir § 1 - ex. 3.

§ 3 - Théorie Spectrale associée à un opérateur auto-adjoint compact.

H désignera un espace de Hilbert complexe de dimension infinie, T un opérateur auto-adjoint compact de B(H).

T étant compact, il y a 3 possibilités :

Cas 1 : $\sigma(T) = \{0\}$,

Cas 2 : $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ $(n \geq 1)$,

t.q. $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$.

Cas 3 : $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n : n \geq\}$ t.q.

$$\begin{cases} |\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \dots > 0, \\ \lim \lambda_n = 0 \end{cases}$$

Pour chaque cas, on donnera l'écriture Spectrale de T.

Cas 1 : $\sigma(T) = \{0\}$.

T étant auto-adjoint, donc $\|T\| = r(T) = 0$.

Alors $T = 0$.

Cas 2 : $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$,

avec $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n| > 0$.

Posons $H_i = \ker(T - \lambda_i I)$, $i = 1, \dots, n$.

A partir du Chapitre 3, chaque λ_i ~~$(i = 1, \dots, n)$~~,

est valeur propre de T

et $1 \leq \dim \ker(T - \lambda_i I) < \infty$. $(i = 1, \dots, n)$.

Comme $\lambda_i \neq \lambda_j$, pour $i \neq j$, et T auto-adj.

(donc normal), donc $H_i \perp H_j$.

Posons $M = H_1 \oplus \cdots \oplus H_n$

$$\overset{\text{déf.}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i : x_i \in H_i, i=1,\dots,n \right\}.$$

(•) M est un s.e.v. de H (facile à vérifier).

(••) $\dim M = \sum_{i=1}^{n} \dim H_i < \infty$ (utiliser le raisonnement par récurrence).

M est donc un sous-espace de dimension finie de H.

(M est dite S.D. $\perp$ des sous-espaces H_i, $i=1,\dots,n$) S.D. $\perp$.

~~Soit~~ On a $H = M \oplus M^{\perp}$

Pour $x \in H$, il existe $x_i \in H_i$ $(i=1,\dots,n)$, $x_0 \in M^{\perp}$ t.q : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i + x_0$.

Pour chaque $i \in \{1,\dots,n\}$, ~~soit~~ on pose $E_i : H \longrightarrow H,\ x \longmapsto x_i = E_i x$,

et on a : $E_i \in B(H)$, $E_i^2 = E_i$, $E_i^* = E_i$,

$R(E_i) = H_i$ (à vérifier).

Posons $T_1 = T_M$ et $T_2 = T_{M^{\perp}}$.

T étant auto-adjoint, donc T_1 et T_2 sont auto-adj.

M est invariant par T car

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} T x_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i x_i) \in M,$$

car $\lambda_i x_i \in H_i$, pour $i=1,\dots,n$.

M est invariant par T et T auto-adj., donc
$M^\perp$ est aussi invariant par T.
T s'écrit donc matriciellement $T = T_1 \oplus T_2$
suivant $H = M \oplus M^\perp$.
T_1 et T_2 sont donc auto-adj. compacts.
$T_1 : M \longrightarrow M$, $x \longmapsto T_1 x = Tx$?
Soit $x \in M$. Donc $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$, pour $x_i \in H_i$, $i = 1, .., n$.
Posons $P_i : M \longrightarrow M$, $x \longmapsto P_i x = x_i$.
Alors $P_i \in B(M)$, $P_i^* = P_i$, $P_i^2 = P_i$,
$P_i . P_j = 0$, si $i \neq j$ (à vérifier).
On a donc $T_1 x = \sum_{i=1}^{n} T x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i x$.
D'où $T_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$, et $\sigma(T_1) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.
Comme $\{0\} \cup \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2)$,
alors $\sigma(T_2) = \{0\}$. T_2 étant ~~compact~~ auto-adjoint,
donc $T_2 = 0$.
Soit maintenant $x \in H$.
Alors il existe $x_i \in H_i$ ($i = 1, \dots, n$), $x_0 \in M^\perp$
t.q. $x = \sum_{i=1}^{n} x_i + x_0$.

Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, soit

$$E_i : H \longrightarrow H, \quad x \longmapsto E_i x = x_i .$$

Alors $E_i \in B(H)$, $E_i^2 = E_i = E_i^*$,

$E_i . E_j = 0$, si $i \neq j$.

De plus,
$$\begin{aligned} Tx &= T_1\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big) + T_2 x_0 \\ &= T_1\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big) + 0 \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i E_i x \\ &= \Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i E_i\Big)(x) \end{aligned}$$

D'où $\boxed{T = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_i}$ — (1)

où $\{E_1, \dots, E_n\}$ est une famille finie de projections $\perp$ vérifiant $E_i . E_j = 0$, si $i \neq j$.

La relation (1) est dite : la $1^{\text{ère}}$ forme spectrale de T (ici T de rang fini, $R(T) = N$

<u>$2^{\text{ème}}$ écriture spectrale de T.</u>

Chaque H_i étant de dimension finie.

Soit $\{e_1, \dots, e_{p_1}\}$ une base $\perp$.N. de H_1,

soit $\{e_{p_1+1}, \dots, e_{p_2}\}$ " " " de H_2,

$\vdots$ " " " "

Soit $\{e_{p_{n-1}+1}, \dots, e_{p_n}\}$ " " " " H_n.

Alors :

$$x_1 = \sum_{i=1}^{p_1} \langle x_1, e_i\rangle e_i = \sum_{i=1}^{p_1} \langle x, e_i\rangle e_i,$$

$$x_2 = \sum_{i=p_1+1}^{p_2} \langle x_2, e_i\rangle e_i = \sum_{i=p_1+1}^{p_2} \langle x, e_i\rangle e_i,$$

$$\vdots$$

$$x_n = \sum_{i=p_{n-1}+1}^{p_n} \langle x_n, e_i\rangle e_i = \sum_{i=p_{n-1}+1}^{p_n} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

Alors $\{e_1, \dots, e_{p_n}\}$ est une base $\perp$.N. de M.

Soit $\mu_1, \dots, \mu_{p_n}$ t.q. $Te_i = \mu_i e_i$, $i = 1, \dots, p_n$.

Il est clair que $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \dots \geq |\mu_{p_n}| > 0$,

et $$\boxed{Tx = \sum_{i=1}^{p_n} \mu_i \langle x, e_i\rangle e_i, \quad x \in H}$$

Alors $$\boxed{T = \sum_{i=1}^{p_n} \mu_i e_i \otimes e_i}$$

$2^{\text{ème}}$ forme Spectrale de T.

Cas 3 : $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n : n \geq 1\}$

où $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \dots > 0$, $\lim_n \lambda_n = 0$.

Posons $H_n = \ker(T - \lambda_n I)$, $n \geq 1$.

T compact et $\lambda_n \neq 0$ $(n \geq 1)$, donc $1 \leq \dim H_n < \infty$.

Fixons $n \geq 1$. Posons $M_n = H_1 \oplus \dots \oplus H_n$.

Comme $\lambda_i \neq \lambda_j$ (pour $i \neq j$), T auto-adj, donc $H_i \perp H_j$.

M_n est une S.D.$\perp$ de n s.e.v. de dimension finie,

donc M_n de dimension finie.

Comme dans le cas 2, M_n est invariant par T,

T étant auto-adj.; donc M_n est $\perp$ réduisant

par T; i.e : $T(M_n) \subset M_n$, $T(M_n^\perp) \subset M_n^\perp$.

Soit $H = M_n \oplus M_n^\perp$ la S.D.$\perp$. $(*)$

Posons $A_n = T_{M_n}$, $B_n = T_{M_n^\perp}$.

Donc $T = A_n \oplus B_n$ suivant $(*)$,

et $\sigma(T) = \sigma(A_n) \cup \sigma(B_n)$.

On a $\sigma(A_n) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ($\hat{m}$. Cas 1).

D'où $\sigma(B_n) = \{0\} \cup \{\lambda_i : i \geq n+1\}$;

et B_n compact auto-adj.

~~A_n et~~

Soit $x \in (H)_1$. Il existe $x_i \in H_i$ $(i=1,\dots,n)$, $x_0 \in M_n^\perp$ t.q : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i + x_0$.

Soit $E_i : H \longrightarrow H$, $x \longmapsto E_i x = x_i$, $i=1,\dots,n$.

On a $E_i \in B(H)$, $E_i^2 = E_i = E_i^*$, $i=1,\dots,n$,

$E_i . E_j = 0$, si $i \neq j$.

Alors $$Tx = \sum_{i=1}^{n} Tx_i + Tx_0$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_i x + B_n x_0$$

D'où $$\|(T - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_i) x\| = \|B_n x_0\|$$
$$\leq \|B_n\| . \|x_0\|$$
$$\leq \|B_n\| . \|x\|$$
$$= |\lambda_{n+1}| . \|x\|$$
$$= |\lambda_{n+1}|.$$

Par passage au sup. sur $\|x\|=1$, on obtient
$$\|T - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_i\| \leq |\lambda_{n+1}| .$$

Comme $|\lambda_{n+1}| \longrightarrow 0$, alors
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_i \xrightarrow{\|.\|} T .$$

D'où $$\boxed{T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n E_n}$$ Convergence uniforme.

Cette dernière relation est la $1^{ère}$ forme spectrale de T.

Chaque H_n est dimension finie $(n \geq 1)$.

En choisissant ~~des~~ une base $\perp$.N. dans chaque sous-espace H_n,

on peut alors choisir un système $\perp$.N. $\{e_n\}_{n\geq 1}$ de vecteurs propres de T,

et une suite $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ de nombre complexes formés des valeurs propres non nulles de T

t.q. $\quad Te_n = \mu_n e_n, \quad n \geq 1$ et

$$\forall x \in H, \quad Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

où $\quad |\mu_1| \geq |\mu_2| \geq |\mu_n| \geq \dots > 0, \quad \lim \mu_n = 0$

D'où alors :

$$\boxed{T = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \, e_n \otimes e_n}$$

convergence uniforme,

car $\lim \mu_n = 0$.

$2^{ème}$ forme Spectrale de T.