Résumé du cours p-classes

H : Hilbert complexe séparable de dimension infinie.

Soit $T \in B(H)$, avec $\mathrm{rg}\, T = N$ ($N \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$)

1- Ecriture spectral d'un opérateur compact auto-adjoint :

T est compact auto-adjoint

$$\Updownarrow$$

Il existe $\{\lambda_n\}_{n=1}^{N}$ une suite de nombres réels, $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ un système orthonormé de H t-q

$$\begin{cases} (\cdot)\ |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots > 0, \\ (\cdot\cdot)\ \forall x \in H,\quad Tx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n, \\ (\cdot\cdot\cdot)\ \text{si } N = \infty, \text{ alors } \lambda_n \longrightarrow 0. \end{cases}$$

Remarques :

(1) Si N est fini, alors $T = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n \otimes e_n$ ~~est une fo~~

somme finie.

(2) $\{\lambda_n\}_{n=1}^{N}$ est l'ens. des valeurs propres de T.

(3) $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n\}_{n=1}^{N}$.

(4) Si $N \leq \infty$, alors 0 est aussi valeur propre de T.

(5) si $N=\infty$, alors 0 est le seul point d'accumulation du spectre de T, et les autres v.p. λ_n sont des points isolés de $\sigma(T)$, où $\lambda_n \longrightarrow 0$.

(6) Chaque valeur propre λ_n est d'ordre de multiplicité fini ; i.e $\dim \ker(T-\lambda_n I) < \infty$.

(7) Chaque valeur propre λ_n est répétée autant de fois que son ordre de multiplicité.

2 - Ecriture spectrale d'un opérateur compact ~~auto adjoint~~.

T est compact

$\Updownarrow$

Il existe $\{s_n\}_{n=1}^{N}$ une suite de nombres réels strictement positifs, il existe deux syst. $\perp$.N, $\{u_n\}_{n=1}^{N}$, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{N}$ dans H,

(o) $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \dots > 0$,

(oo) $\forall x \in H$, $Tx = \sum_{n=1}^{N} s_n \langle x, u_n \rangle \varphi_n$

(ooo) si $N=\infty$, alors $s_n \longrightarrow 0$.

Remarques :

① si $N < \infty$, alors $T = \sum_{n=1}^{N} s_n \psi_n \otimes \varphi_n$

somme finie.

② si $N = \infty$, alors $T = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \psi_n \otimes \varphi_n$

où la série converge uniformément ds $B(H)$

③ la suite $\{s_n\}_{n=1}^{N}$ donné précément est unique.

④ chaque s_n est appelé valeur singulière de T.

⑤ si T est compact et auto-adj.,

alors $s_n = |\lambda_n|$, pour tout n (T.D.1)

Notation : $s_n \doteq s_n(T)$: v.s. de T.

Définition : Soit $p \in [1, \infty[$. On suppose T compact.
T est dit de classe p (ou est un p-classe) si
la suite $\{s_n(T)\}_{n=1}^{N}$ de v.s. de T
est dans l_p, i.e. $\sum_{n=1}^{N} [s_n(T)]^p < \infty$.

Remarque : si $N < \infty$, ~~alors~~ et T compact,
alors T est class p, pour tout $p \in [1, \infty[$

Notation : T de classe p : $\|T\|_p = \left[\sum_{n=1}^{N} s_n^p\right]^{\frac{1}{p}}$.

Dans tout ce qui suit, T est considéré compact.

- T est dit un opérateur nucléaire si T est classe 1.
- T est dit un opér. d'Hilbert Schmidt si T " " 2.

si $p \in [1, \infty[$, on note par $C_p(H)$, la classe de tous les opérateurs compacts de $B(H)$ de classe p.

<u>Résultats à retenir</u> $(p \in [1, \infty[)$

(1) $C_p(H)$ est un idéal bilatère de $B(H)$, i.e.

- $C_p(H)$ s.e.v
- $\forall A, B \in B(H)$, $\forall S \in C_p(H)$, $ASB \in C_p(H)$.

(2) Si $A, B \in B(H)$, $T \in C_p(H)$, alors

$$\|ATB\|_p \leq \|A\| \, \|B\| \, \|T\|_p .$$

(3) Si $U, V \in B(H)$ unitaires, et $T \in C_p(H)$, alors

$$\|UTV\|_p = \|T\|_p .$$

(4) ~~L'application $C_1(H) \longrightarrow \mathbb{C}$~~

Si T est nucléaire, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \langle Te_n, e_n \rangle$ converge pour toute base orth. $\{e_n\}$ de H, et cette somme est independant de la base $\{e_n\}_{n \geq 1}$; appelée la trace de T, notée tr T.

(6) Si T auto-adj comp. nucléaire, alors

$$\operatorname{tr} T = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n$$: somme de toutes les

v. p. de T, avec répétition des v. p.

avec autant de fois de leurs ordres de multt.

(7) $$\begin{cases} \|\cdot\|_p : C_p(H) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad X \longmapsto \|X\|_p \end{cases}$$ est une norme.

(8) $(C_p(H), \|\cdot\|_p)$ est un Banach.

(9) L'application $$\begin{aligned} (C_1(H), \|\cdot\|_1) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ X &\longmapsto \operatorname{tr} X \end{aligned}$$

est linéaire bornée et $\|\operatorname{tr}\| = 1$.

(10) Si $T \in C_1(H)$, alors $\operatorname{tr} T = \sum_{n=1}^{N} s_n \langle \psi_n, \varphi_n \rangle$.

(11) ~~Soit A,~~ Soient $p, q \in]1, \infty[$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$A \in C_p(H)$, $B \in C_q(H)$, alors $AB \in C_1(H)$,

et $\|AB\|_1 \leq \|A\|_p \cdot \|B\|_q$.

En particulier, si $A, B \in C_2(H)$, alors

$AB \in C_1(H)$ $(p = q = 2)$.

(12) si $T \in C_1(H)$, alors $tr(TX) = tr(XT)$, pour tout $X \in B(H)$.

(13) si $T \in C_1(H)$, $S \in B(H)$ inversible, alors $tr(S^{-1} T S) = tr(T)$.

(14) $T \in C_p(H) \Longleftrightarrow T^* \in C_p(H)$.

(15) si $T \in C_p(H)$, alors $\|T^*\|_p = \|T\|$
(car $s_n(T^*) = s_n(T)$, pour tout n).

(16) L'appl. $C_2(H) \times C_2(H) \longrightarrow \mathbb{C}$
$(A, B) \longmapsto \langle A, B \rangle = tr(B^* A)$
est un produit sclaire sur $C_2(H)$.

(17) $(C_2(H), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un Hilbert.

(18) si $T \in C_2(H)$, alors

$$\|T\|_2 = \left[tr(T^* T) \right]^{1/2}.$$

(19) $\forall n$, $s_n(T) = s_n(|T|)$