NORTH-HOLLAND

Sur l'Image et le Noyau d'une Dérivation Généralisée

Ameur Seddik
Département de Mathématiques
Université de Batna
05000 Batna, Algerie

et

Josette Charles
Départment de Mathématiques, C.C.051
Université de Montpellier II
34095 Montpellier Cedex 05, France

Submitted by Rajendra Bhatia

ABSTRACT

Let $A \in \mathscr{L}(H_1)$, $B \in \mathscr{L}(H_2)$ (where H_1, H_2 are Hilbert spaces), and let $\delta_{A,B}$ denote the operator on $\mathscr{L}(H_2, H_1)$ given by

$$\delta_{A,B}(X) = AX - XB, \qquad X \in \mathscr{L}(H_2, H_1)$$

J. P. Williams asked: For which A is $R(\delta_A)^- \cap \{A^*\} = \{0\}$? (where $\delta_{A,A} = \delta_A$) We obtain some operators in this class. The case of $\delta_{A,B}$, $A \neq B$, is interesting in itself; moreover it is useful if we have to use a decomposition of the Hilbert space in a direct some for the consideration of δ_A. In this note we describe some classes of operators A, B for which we have $R(\delta_{A,B}) - \cap \ker \delta_{A^*,B^*} = \{0\}$. © 1998 Elsevier Science Inc.

1. INTRODUCTION

Soit $\mathscr{L}(H_2, H_1)$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés définis de l'espace de Hilbert H_2 dans l'espace de Hilbert H_1. Dans le cas où $H_1 = H_2 = H$, on note $\mathscr{L}(H)$ au lieu de $\mathscr{L}(H, H)$.

LINEAR ALGEBRA AND ITS APPLICATIONS 274:77–83 (1998)

655 Avenue of the Americas, New York, NY 10010

0024-3795/98/$19.00
PII S0024-3795(97)00265-6

Si $A \in \mathscr{L}(H_1)$ et $B \in \mathscr{L}(H_2)$, nous définissons l'opérateur $\delta_{A,B}$ sur $\mathscr{L}(H_2, H_1)$ par la formule:

$$\delta_{A,B}(X) = AX - XB, \qquad X \in \mathscr{L}(H_2, H_1).$$

$\delta_{A,B}$ est alors appelé dérivation généralisée induite par A, B.

On désigne par $R(\delta_{A,B})$, $R(\delta_{A,B})^-$ et $\ker \delta_{A,B}$ respectivement l'image, l'adhérence de l'image et le noyau de $\delta_{A,B}$.

Dans le cas où $A = B$, on note δ_A au lieu de $\delta_{A,A}$ et on pose $\{A\}' = \ker \delta_A$ ($\{A\}'$ est le commutant de A).

On désigne par $\mathscr{M}_{H_1, H_2}$ la classe d'opérateurs suivante:

$$\mathscr{M}_{H_1, H_2} = \{(A, B) \in \mathscr{L}(H_1) \times \mathscr{L}(H_2) : R(\delta_{A,B})^- \cap \ker \delta_{A^*, B^*} = \{0\}\}.$$

Et on note par $\mathscr{N}_H$ la classe d'opérateurs suivante:

$$\mathscr{N}_H = \{A \in \mathscr{L}(H) : R(\delta_A)^- \cap \{A^*\}' = \{0\}\}.$$

Il est bien connu que la classe $\mathscr{M}_{H,H}$ contient les couples d'opérateurs (A, B) tels que A^* et B soient hyponormaux [2].

On sait aussi que $\mathscr{N}_H$ contient:

(i) les opérateurs A tels que $p(A)$ normal pour un certain polynôme du second degré p [3].

(ii) les sous-normaux avec vecteur cyclique [3].

(iii) les isométries [5].

(iv) les unitairement équivalents à des opérateurs de Jordan [4].

Signalons que dans [2], il est prouvé que la classe $\mathscr{N}_{H \oplus H}$ contient les opérateurs de la forme $A \oplus B$ tels que A normal à spectre dénombrable et B isométrique.

Dans le présent article, nous nous intéresserons d'abord à la classe $\mathscr{M}_{H_1, H_2}$. Nous montrons que $\mathscr{M}_{H_1, H_2}$ contient:

(1) la classe des couples (A, B) tels que $p(A)$ et $p(B)$ soient normaux pour un certain polynôme du second degré p (Théorème 3.2).

(2) la classe des couples (A, B) tels que $p(A) = 0$ pour un certain polynôme du second degré p et B arbitraire (Théorème 3.4).

Observons que le point (1) généralise le résultat bien connu de Y. Ho [3, Théorème 3].

Ensuite nous identifions une nouvelle classe d'opérateurs dans $\mathscr{N}_H$.

En effet nous prouvons que $\mathcal{N}_H$ contient des opérateurs de la forme $A \oplus B$ (suivant une décomposition en somme directe orthogonale de $H = H_1 \oplus H_2$) tels que A vérifie $p(A) = 0$ pour un certain polynôme du second degré p et B arbitraire dans $\mathcal{N}_{H_2}$ (Théorème 4.1).

2. RESULTATS GENERAUX

Dans tout ce paragraphe P, Q désignent deux opérateurs positifs de $\mathcal{L}(H)$ et Δ est l'opérateur défini sur $\mathcal{L}(H)$ par: $\Delta(X) = PX + XQ$.

LEMMA 2.1. *Soit $X \in \mathcal{L}(H)$ tel que $PX + XP = 0$. Alors on a: $PX = XP = 0$.*

Preuve. Supposons que $PX + XP = 0$. On en déduit que $P^2X = XP^2$, et comme $P \in \{P^2\}''$ ($\{P^2\}''$ est le bicommutant de P^2); on tire par conséquent que $PX = XP$.

D'où finalement $PX = XP = 0$.

LEMMA 2.2. *Soit $X \in \mathcal{L}(H)$ tel que $PX + XQ = 0$. Alors on a: $PX = XQ = 0$.*

Preuve. Posons dans $H \oplus H$,

$$R = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

R est positif et $RY + YR = 0$, alors il s'ensuit du lemme 2.1 que $RY = YR = 0$. D'où alors $PX = XQ = 0$.

THÉORÈME 2.3. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *Δ est injectif.*
(ii) *P ou Q est injectif.*

Preuve. Supposons (i). Si par l'absurde P et Q sont non injectifs, alors il existe $x, y \in H - \{0\}$ tels que $Px = Qy = 0$. Soit $X = x \otimes y$; on a alors $X \neq 0$ et $\Delta(X) = (Px \otimes y) + (x \otimes Qy) = 0$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse (i). Donc l'un au moins de P et Q est injectif, ce qui donne (ii).

Réciproquement supposons (ii). Soit $X \in \mathscr{L}(H)$ tel que $\Delta(X) = 0$. Donc $PX + XQ = 0$, et d'après le Lemme 2.2, on a $PX = XQ = 0$; et comme l'un au moins de P et Q est injectif, alors $X = 0$. Par conséquent Δ est injectif, ce qui prouve (i). ∎

3. LA CLASSE $\mathscr{M}_{H_1, H_2}$

LEMME 3.1. *Si A et B sont deux opérateurs normaux respectivement de $\mathscr{L}(H_1)$ et $\mathscr{L}(H_2)$, on a $R(\delta_{A,B})^- \cap \ker \delta_{A,B} = \{0\}$.*

Preuve. Voir [1]. ∎

THÉORÈME 3.2. *Soient A et B deux opérateurs respectivement de $\mathscr{L}(H_1)$ et $\mathscr{L}(H_2)$. S'il existe un polynôme du second degré p tel que $p(A)$ et $p(B)$ soient normaux, alors $(A, B) \in \mathscr{M}_{H_1, H_2}$.*

Preuve. Supposons $p(A)$, $p(B)$ normaux pour un certain polynôme du second degré p. Comme $\forall \alpha \in \mathbb{C}: \delta_{A,B} = \delta_{A-\alpha, B-\alpha}$, on peut supposer, sans restreindre la généralité, $p(\lambda) = \lambda^2$.

Soit $C^* \in R(\delta_{A,B})^- \cap \ker \delta_{A^*, B^*}$. Il existe donc une suite (X_n) d'éléments de $\mathscr{L}(H_2, H_1)$ telle que:

$$AX_n - X_n B \to C^* \quad \text{et} \quad CA = BC.$$

On a alors

$$A^2 X_n - X_n B^2 \to AC^* + C^*B.$$

Comme $CA = BC$, donc $CA^2 = B^2C$, et par le théorème de Putnam-Fuglede, on a alors $A^2C^* = C^*B^2$, car A^2, B^2 normaux. D'où $A^2(AC^* + C^*B) = (AC^* + C^*B)B^2$. Par conséquent on a

$$AC^* + C^*B \in R(\delta_{A^2, B^2})^- \cap \ker \delta_{A^2, B^2}.$$

Comme A^2, B^2 sont normaux, donc d'après le lemme 3.1, $AC^* + C^*B = 0$. Par multiplication à droite par C, cette dernière équation devient, en utilisant $CA = BC$, et en posant $P = C^*C$: $AP + PA = 0$. Par application du lemme 2.1, on a donc $PA = AP = 0$.

Et comme $A(X_nC) - (X_nC)A \to C^*C = P$; et en multipliant cette dernière suite à droite et à gauche par P, et en utilisant $PA = AP = 0$, on obtient $P^3 = 0$; comme P est auto-adjoint, on en déduit que $C^*C = P = 0$, et donc $C = 0$. ■

REMARQUE. Ce résultat généralise la théorème 3 de Y. Ho [3], énoncé pour $A = B$.

LEMMA 3.3. *Pour un opérateur $A \in \mathscr{L}(H)$ vérifiant $p(A) = 0$ pour un certain polynôme du second degré p, $R(\delta_A)^-$ ne contient aucun opérateur positif non nul.*

Preuve. Soit $A \in \mathscr{L}(H)$, solution d'une équation du second degré. Par un changement éventuel de A en $A - \alpha$, et en utilisant $\delta_A = \delta_{A-\alpha}$, on peut supposer, sans restreindre la généralité, $A^2 = \beta$ ($\beta \in \mathbb{C}$).

Soit $P \geqslant 0$ et une suite (X_n) telle que

$$AX_n - X_n A \to P. \tag{1}$$

Donc $A^2X_n - X_n A^2 = 0 \to AP + PA$; d'où $AP + PA = 0$, ce qui donne $AP = PA = 0$; et par multiplication (1) à droite et à gauche per P, on obtient $P^3 = 0$, donc $P = 0$, car P est auto-adjoint. ■

THÉORÈME 3.4. *Soit $A \in \mathscr{L}(H_1)$ vérifiant $p(A) = 0$ pour un certain polynôme du second degré p. Alors on a, pour tout $B \in \mathscr{L}(H_2)$: $(A, B) \in \mathscr{M}_{H_2, H_2}$ et $(B, A) \in \mathscr{M}_{H_2, H_1}$.*

Preuve. Soit $C^* \in R(\delta_{A,B})^- \cap \ker \delta_{A^*, B^*}$. Il existe donc une suite (X_n) d'éléments de $\mathscr{L}(H)$ telle que:

$$AX_n - X_n B \to C^* \quad \text{et} \quad CA = BC.$$

Par multiplication à droite par C de cette dernière suite, on obtient:

$$A(X_nC) - (X_nC)A \to C^*C.$$

Donc $C^*C \in R(\delta_A)^-$.

Or $p(A) = 0$ pour p polynôme du second degré et $C^*C \geqslant 0$, donc, en vertu du lemme 3.3, $C^*C = 0$, et donc aussi $C = 0$. D'où alors: $(A, B) \in \mathscr{M}_{H_1, H_2}$.

Et de la même manière, on montre que: $(B, A) \in \mathscr{M}_{H_2, H_1}$.

REMARQUE. La preuve du théorème 3.4 montre que si $R(\delta_{A,B})^- \cap \ker \delta_{A^*,B^*} \neq \{0\}$, alors $R(\delta_A)^-$ contient au moins un opérateur positif non nul.

4. LA CLASSE $\mathcal{N}_H$

THÉORÈME 4.1. *Soit $D \in \mathcal{L}(H)$ tel que $D = A \oplus B$ suivant une décomposition en somme directe orthogonale $H = H_1 \oplus H_2$. Si $p(A) = 0$ pour un certain polynôme du second degré p et $B \in \mathcal{N}_{H_2}$, alors $D \in \mathcal{N}_H$.*

Preuve. Soit $C^* \in R(\delta_D)^- \cap \{D^*\}'$. Il existe donc une suite (X_n) d'éléments de $\mathcal{L}(H)$ telle que

$$DX_n - X_n D \to C^* \quad \text{et} \quad CD = DC$$

Soient

$$\begin{pmatrix} X_{1,n} & X_{2,n} \\ X_{3,n} & X_{4,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

les matrices respectives de X_n et C dans $H = H_1 \oplus H_2$. Donc on a

$$\begin{aligned}
AX_{1,n} - X_{1,n}A &\to C_1^* \quad \text{et} \quad C_1 A = AC_1, \\
BX_{4,n} - X_{4,n}B &\to C_4^* \quad \text{et} \quad C_4 B = BC_4, \\
BX_{3,n} - X_{3,n}A &\to C_2^* \quad \text{et} \quad C_2 B = AC_2, \\
AX_{2,n} - X_{2,n}B &\to C_3^* \quad \text{et} \quad C_3 A = BC_3.
\end{aligned}$$

Ce système nous donne

$$\begin{aligned}
C_1^* &\in R(\delta_A)^- \cap \{A^*\}', \\
C_4^* &\in R(\delta_B)^- \cap \{B^*\}', \\
C_2^* &\in R(\delta_{A,B})^- \cap \ker \delta_{A^*,B^*}, \\
C_3^* &\in R(\delta_{B,A})^- \cap \ker \delta_{B^*,A^*}.
\end{aligned}$$

Par utilisation des théorèmes 3.2 et 3.4, on obtient: $C_i = 0$, pour $i = 1, 2, 3, 4$.
Par conséquent $C = 0$. ■

REMARQUE. La classe $\mathscr{N}_H$ contient donc en particulier les opérateurs de la forme $A \oplus B$ tels que:

(1) $A^2 = 0$, B isométrique.
(2) $A^2 = 0$, B sous-normal avec vecteur cyclique.
(3) $A^2 = 0$, B unitairement équivalent à un opérateur de Jordan.

REFERENCES

1 J. Anderson and C. Foias, Properties which normal operators share with a normal derivations and related operators, *Pacific J. Math.* 61:313–325 (1975).
2 S. N. Elalami, Commutants et Fermeture de l'Image d'une Dérivation, Thèse, Univ. de Montpellier, France, 1988.
3 Y. Ho, Commutants and derivation ranges, *Tohoku Math. Soc.* 27:509–514 (1975).
4 A. Seddik and J. Charles, Derivation and Jordan operators, *Integr. Equ. Oper. Theory*, 28:120–124 (1997).
5 J. P. Williams, On the range of a derivation II, *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A* 74:299–310 (1974).
6 J. P. Williams, Derivation ranges: Open problems, in *Topics Operator Theory* 2, Birkhäuser, 1981, 319–328.

Received 12 February 1997; final manuscript accepted 2 April 1997