T.D. 1. Master 1 - AFT02

p-classes

Soit H un espace de Hilbert complexe de dimension infinie.

Soient $\{e_n\}_{n=1}^N$, $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ deux systèmes orthonormés dans H, et $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ une suite de nombres complexes (où $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Soit l'opérateur :

$$T : H \to H, \; x \longmapsto Tx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, e_n \rangle \psi_n.$$

① On suppose $N = \infty$.

Montrer que T est bien défini et borné ssi la suite $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ est bornée.

② On suppose $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ est bornée si $N = \infty$.

(a)- Montrer que $T \in B(H)$.

(b) - Montrer que $\|T\| = \sup\limits_n |\lambda_n|$.

③ On suppose $\lambda_n \neq 0$, pour tout n.

(a) - Montrer que $\ker T = \left(\{e_n\}_{n=1}^N\right)^\perp$.

(b) - Montrer que $\overline{R(T)} = \overline{sp\{\psi_n\}_{n=1}^N}$.

4) On suppose que $\lambda_n = 1$, pour tout n.
Montrer que T est une isométrie partielle, et donner son espace initial et espace final.

6) On suppose que $\lambda_n = 1$ et $e_n = \varphi_n$, pour tout n.
Montrer que T est une projection orthogonale.

5) Montrer que T^* est donné par :
$$\forall x \in H, \ T^* x = \sum_{n=1}^{N} \overline{\lambda_n} \langle x, \varphi_n \rangle e_n$$

7) Montrer que $|T|$ est donné par :
$$\forall x \in H, \ |T| x = \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n| \langle x, e_n \rangle e_n$$

8) (On suppose $\lambda_n \neq 0$, pour tout n) Donner la décomposition polaire de T.

9) On suppose $e_n = \varphi_n$, pour tout n, et que N fini.
Montrer que $\sigma(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$.

10) On suppose $e_n = \varphi_n$, pour tout n, $N = \infty$, et $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ (où $\lambda \in \mathbb{C}$).
Montrer que $\sigma(T) = \{\lambda\} \cup \{\lambda_n : n \geq 1\}$

(11) On suppose $N = \infty$, et $a_n \longrightarrow 0$. (~~[illegible]~~).

Montrer que T est compact.

Solution : T.D.1

(1) "$\Leftarrow$" ? Suppose $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ bornée.

Posons $k = \sup_{n\geq 1} |\lambda_n|$.

Fixons x dans H. Montrons que $Tx \in H$?

Par définition, $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle \varphi_n$.

Donc $Tx \in H$ ssi $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 . |\langle x, e_n\rangle|^2 < \infty$.

On a alors :

$$\|Tx\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 . |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} k^2 |\langle x, e_n\rangle|^2$$
$$= k^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$$
$$\leq k^2 \|x\|^2 \text{ (Inég. de Bessel)}$$
$$< \infty.$$

Ceci montre que $Tx \in H$, et que ~~T // bien définie~~.

~~"$\Rightarrow$" : Supposons~~ $\|Tx\| \leq k\|x\|$. Donc T ~~bornée~~ est ~~et~~ bien défini, et borné.

"$\Rightarrow$". Supposons T bien défini et borné.

Posons $M = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$.

On a $\begin{cases} Te_n = \lambda_n e_n, \text{ pour tout } n \geq 1 \\ \|e_n\| = 1 \end{cases}$

Donc : $\forall n \geq 1$, $\|Te_n\| = |\lambda_n| \leq M$.

Ce qui montrer que $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ est bornée.

(2) (a) <u>Cas 1 :</u> N fini. Dans ce cas on a :

$$T = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \varphi_n \otimes e_n .$$

T est une somme finie d'opérateurs linéaires bornés. Donc $T \in B(H)$.

<u>Cas 2 :</u> $N = \infty$ (et $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ bornée).

(∘) T linéaire, en effet : pour $x, y \in H$, $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$T(\lambda x + y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \lambda x + y, e_n \rangle \varphi_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda \lambda_n \langle x, e_n \rangle \varphi_n + \lambda_n \langle y, e_n \rangle \varphi_n \right]$$

$$= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle \varphi_n + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle y, e_n \rangle \varphi_n$$

$$= \lambda T x + T y$$

(∘∘) T borné ? D'après (1) :

$$\forall x \in H, \quad \|Tx\| \leq k \|x\|$$

(où $k = \sup_{n \geq 1} |\lambda_n|$).

(b) $\|T\| = \sup_{n\geq 1} |\lambda_n|$? Il est clair que

$\forall x \in H, \quad \|Tx\| \leq k \|x\|$.

(où $k = \sup_n |\lambda_n|$) D'où $\|T\| \leq k$ —(

D'autre part, $\|Te_n\| = \|\lambda_n e_n\| = |\lambda_n|$, pour tout n.

Donc $|\lambda_n| \leq \|T\|$, pour tout n

D'où $k = \sup_n |\lambda_n| \leq \|T\|$ — $(**)$.

De $(*)$ et $(**)$, on tire $\|T\| = \sup_n |\lambda_n|$.

③ On suppose $\lambda_n \neq 0$, pour tout n.

(a) $\ker T \overset{?}{=} \left[\{e_n\}_{n=1}^{N}\right]^{\perp}$

Pour tout $x \in H$, on a :

$$
\begin{aligned}
(x \in \ker T) &\Longleftrightarrow (Tx = 0) \\
&\Longleftrightarrow (\forall n, \ \lambda_n \langle x, e_n\rangle = 0) \\
&\Longleftrightarrow (\forall n, \ \langle x, e_n\rangle = 0) \quad (\text{car } \lambda_n \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow \left(x \in \left(\{e_n\}_{n=1}^{N}\right)^{\perp}\right)
\end{aligned}
$$

Ce qui montre (a).

(b) $\overline{R(T)} = \overline{sp\{\psi_n\}_{n=1}^{N}}$.

Par définition $R(T) \subset \overline{sp\{\psi_n\}_{n=1}^{N}}$.

Donc $\overline{R(T)} \subset \overline{sp\{\psi_n\}_{n=1}^{N}}$ (*)

Or $Te_n = \lambda_n \psi_n$, et $\lambda_n \neq 0$, pour tout n,

donc $T\left(\frac{1}{\lambda_n} e_n\right) = \psi_n \in R(T)$, pour tout n.

D'où $sp\{\psi_n\}_{n=1}^{N} \subset R(T)$

Alors $\overline{sp\{\psi_n\}_{n=1}^{N}} \subset \overline{R(T)}$. (**)

De (*) et (**): $\overline{R(T)} = \overline{sp\{\psi_n\}_{n=1}^{N}}$.

(Verifier que si N fini, alors $R(T) = sp\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$).

4) On suppose $\lambda_n = 1$, pour tout n.

On a d'après (3): $\ker T = \left(\{e_n\}_{n=1}^{N}\right)^{\perp}$

Donc $(\ker T)^{\perp} = \left(sp\{e_n\}_{n=1}^{N}\right)^{\perp\perp}$

$= \overline{sp\{e_n\}_{n=1}^{N}}$.

Il suffit de montrer que

$\forall x \in (\ker T)^{\perp}$, $\|Tx\| = \|x\|$?

Soit $x \in (\ker T)^\perp$. Donc $x \in \overline{sp\{e_n\}_{n=1}^N}$.

D'où $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle x, e_n\rangle|^2$

$= \|Tx\|^2$ (par déf.).

Donc $\|Tx\| = \|x\|$.

T est donc une isométrie partielle.

Espace initial de T : $(\ker T)^\perp = sp\{e_n\}_{n=1}^N$

Espace final de T : $R(T) = \overline{R(T)} = \overline{sp\{\varphi_n\}_{n=1}^N}$.

~~On suppose $\lambda_n = 1$, $e_n = \varphi_n$, pour tout n.~~

(5) Soit $x, y \in H$. On a alors

$\langle T^* x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$

$= \langle x, \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle y, e_n\rangle \varphi_n\rangle$

$= \sum_{n=1}^N \overline{\lambda_n} \overline{\langle y, e_n\rangle} \langle x, \varphi_n\rangle$

$= \sum_{n=1}^N \overline{\lambda_n} \langle x, \varphi_n\rangle \langle e_n, y\rangle$

$= \langle \sum_{n=1}^N \overline{\lambda_n} \langle x, \varphi_n\rangle e_n, y\rangle$

(5)

Ceci montre que

$$\forall x \in H,\ Tx = \sum_{n=1}^{N} \bar{\lambda}_n \langle x, \psi_n \rangle \varphi_n .$$

(6) On suppose $\lambda_n = 1$, $\varphi_n = \psi_n$, pour tout $n \geq 1$.

Donc $\forall x \in H$, $Tx = \sum_{n=1}^{N} \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n$.

D'après (5) $T^* = T$.

Et comme $T \varphi_n = \varphi_n$, pour tout n, ~~1~~

alors (comme T continue et linéaire) :

$$\forall x \in H,\ T^2 x = T\left(\sum_{n=1}^{N} \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \langle x, \varphi_n \rangle T\varphi_n$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

$$= Tx .$$

Donc $T^2 = T = T^*$.

T est donc une proj. $\perp$.

(7) On a : pour tout $x \in H$:

$$Tx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n ,\quad T^* x = \sum_{n=1}^{N} \bar{\lambda}_n \langle x, \psi_n \rangle \varphi_n$$

Donc $T^* \psi_n = \overline{\lambda_n}\, e_n$, pour tout n.

T^* étant linéaire et continue, alors

$$\forall x \in H,\quad T^*Tx = T^*\left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, e_n\rangle \psi_n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, e_n\rangle T^*\psi_n$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \overline{\lambda_n} \langle x, e_n\rangle e_n$$

$$= \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^2 \langle x, e_n\rangle e_n .$$

Soit $P : H \longrightarrow H$ donné par :

$$\forall x \in H,\quad Px = \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n| \cdot \langle x, e_n\rangle e_n$$

$P \in B(H)$.

D'après ① et ② :

D'autre part, on a :

$$\forall x \in H,\quad \langle Px, x\rangle = \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n| \cdot |\langle x, e_n\rangle|^2 \geq 0.$$

P est donc positif.

D'autre part, $P\varphi_n = |\lambda_n| \cdot \varphi_n$, pour tout n.

On a alors

$$\forall x \in H, \quad P^2 x = P\left(\sum_{n=1}^{N} |\lambda_n| \langle x, \varphi_n\rangle \varphi_n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n| \langle x, \varphi_n\rangle P\varphi_n$$

$$= \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^2 \langle x, \varphi_n\rangle \varphi_n$$

$$= (T^* T) x.$$

Donc $\quad P^2 = T^* T$

P étant positif, donc $|T| = (T^* T)^{\frac{1}{2}}$
$= P$.

(8) Décomp. pôlaire de T : $T = U|T|$?

Posons $\lambda_n = |\lambda_n| e^{i\theta_n}$, pour tout $n \geq 1$.

(si $\lambda_n = 0$, alors θ_n est arbitraire).

Posons $\quad e_n = e^{i\theta_n} \varphi_n$, pour tout n.

Vérifier que $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ est un syst. $\perp$ N. de H

Soit $U : H \longrightarrow H$

$$x \longmapsto Ux = \sum_{n=1}^{N} \langle x, u_n \rangle e_n$$

D'après (4), U est une isométrie partielle

$$(\ker U) = \left(\{u_n\}_{n=1}^{N}\right)^{\perp};$$

et $U u_n = e_n = e^{i\theta_n}\varphi_n$, pour tout n

On a donc, pour $x \in H$:

$$U|T|x = U\left(\sum_{n=1}^{N} |\lambda_n| \langle x, u_n \rangle u_n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n| \langle x, u_n \rangle U u_n$$

$$= \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n| \langle x, u_n \rangle e^{i\theta_n} \cdot \varphi_n$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, u_n \rangle \varphi_n$$

$$= Tx.$$

D'où $T = U|T|$,

U isométrie partielle, et

$\ker U = \left(\{e_n\}_{n=1}^{N}\right)^{\perp} = \ker |T|$.

Par conséquent, $T = U.P$ est la décomposition pôlaire de T.

(9) On suppose $e_n = \varphi_n$, pour $n = 1, \dots, N$ (N fini)

Donc $T = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n \otimes e_n$ (somme finie).

Il est clair que $T e_n = \lambda_n e_n$, $n = 1, \dots, N$, avec $\|e_n\| = 1$, pour $n = 1, \dots, N$, donc

$\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \sigma(T)$

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

On ~~définit~~ $S \in \mathcal{B}(H)$ par

$$\cancel{S = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} e_n \otimes e_n}.$$

$\cancel{S e_n = \frac{1}{\lambda_n - \lambda_1}}$, $n = 1, \dots, N$ et

~~On a alors~~

$$\cancel{S(T - \lambda I) = \sum_{n=1}^{N} (}$$

Soit $H = sp\{e_1, \dots, e_N\} \oplus H_1$, S.D.$\perp$

où $H_1 = sp\{e_1, \dots, e_N\}^{\perp}$.

Soit P la projection orthogonale de H sur $sp\{e_1, \dots, e_N\}$.

(à vérifier : alors $P = \sum_{n=1}^{N} e_n \otimes e_n$).

On a donc :

$$T - \lambda I = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n \otimes e_n - \lambda P - \lambda(I-P)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} (\lambda_n - \lambda) e_n \otimes e_n - \lambda(I-P)$$

Soit $S \in B(H)$ donné par

$$S = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} e_n \otimes e_n - \lambda^{-1} (I-P).$$

où $I-P$ est la proj. $\perp$ de H sur H_1.

Comme $(I-P) e_n = 0$, pour $n = 1, \dots, N$,

alors par un calcul simple on a :

$$S(T - \lambda I) = \sum_{n=1}^{N} e_n \otimes e_n + (I-P)$$

$$= P + (I-P)$$

$$= I$$

$$= (T - \lambda I) S$$

Donc $T-\lambda I$ est inversible. D'où $\lambda \notin \sigma(T)$.

Par conséquent, $\sigma(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$.

10) On sup. $N=\infty$, $e_n = \varphi_n$ & $n=1,2,3,\dots$

$\lambda_n \longrightarrow \lambda$ (où $\lambda \in \mathbb{C}$).

Comme $Te_n = \lambda_n e_n$, $n=1,2,3,\dots$,

alors $\{\lambda_n : n \geq 1\} \subset \sigma(T)$

Donc $\overline{\{\lambda_n : n\geq 1\}} \subset \sigma(T)$.

Or $\overline{\{\lambda_n : n\geq 1\}} = \{\lambda\} \cup \{\lambda_n : n \geq 1\}$.

Alors $\{\lambda\} \cup \{\lambda_n : n\geq 1\} \subset \sigma(T)$.

Soit maintenant $\mu \in \mathbb{C} \setminus (\{\lambda\} \cup \{\lambda_n : n\geq 1\})$.

Donc $\mu \notin \overline{\{\lambda_n : n\geq 1\}}$.

Alors $k = d(\mu, \{\lambda_n : n\geq 1\}) > 0$.

D'où $|\lambda_n - \mu| \geq k$, pour $n=1,2,3,\dots$

Donc $\dfrac{1}{|\lambda_n-\mu|} \leq \dfrac{1}{k}$, " " .

12

Donc la suite $\left(\frac{1}{\lambda_n-\rho}\right)_{n\geq 1}$ est bornée.

Soit donc l'opérateur $A \in B(H)$

donné par $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n-\rho} e_n \otimes e_n$.

Posons $H = \overline{sp\{e_n : n\geq 1\}} \oplus H_1$ S.D.⊥.

où $H_1 = \overline{sp\{e_n : n\geq 1\}}^{\perp}$.

Soit P la proj. ⊥ de H sur $\overline{sp\{e_n : n\geq 1\}}$.

(à vérifier que $P = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \otimes e_n$).

On a donc :

$$T-\rho . I = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n-\rho) e_n \otimes e_n - \lambda(I-P)$$

Soit $S \in B(H)$ donné par

$$S = B - \lambda^{-1}(I-P).$$

Comme $(I-P)e_n = 0$, pour $n \geq 1$,

alors $S(T-\rho I) = (T-\rho I)S$

$$= \sum_{n\geq 1}^{\infty} e_n \otimes e_n + (I-P)$$

$$= I.$$

Donc $T - \mu I$ est inversible,

donc $\mu \notin \sigma(T)$.

Par conséquent, $\sigma(T) = \{\lambda\} \cup \overline{\{\lambda_n : n \geq 1\}}$.

(11) On sup. $N = \infty$, $\lambda_n \longrightarrow 0$.

Fixons $n \geq 1$, $x \in (H)_1$.

Soit $T_n \in B(H)$ donné par

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k \otimes \varphi_k$$

On a alors

$$\|(T - T_n)x\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\|^2$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k|^2 . |\langle x, \varphi_k \rangle|^2$$

$$\leq \sup_{k \geq n} |\lambda_k|^2 . \sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2$$

$$\leq \left(\sup_{k \geq n} |\lambda_k|\right)^2 . \|x\|^2$$

D'où $\|(T - T_n)x\| \leq \sup_{k \geq n} |\lambda_k|$.

Par passage sur le sup : $x \in (H)_1$, on a :

$$\|T - T_n\| \leq \sup_{k \geq n} |\lambda_k| \quad (*)$$

Or $0 = \lim |\lambda_n| = \overline{\lim} |\lambda_n|$

$$= \lim_n \left(\sup_{k \geq n} |\lambda_k| \right)$$

De $(*)$, on tire alors $\|T - T_n\| \to 0$.

Donc $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$.

Or T_n est de rang fini, donc compact pour tout $n \geq 1$, donc

$T = \lim T_n$ est compact.