T.D.3.

H : Hilbert séparable de dim. $= \infty$.
$p \in [1, \infty[$.

(I)

Soit T un compact de $B(H)$, ~~$p \in [1, \infty[$~~

1. Montrer $s_n(T) = s_n(|T|)$, pour tout n
2. Montrer que $T \in \mathcal{C}_p \iff |T| \in \mathcal{C}_p$.
3. Si $T \in \mathcal{C}_p$, alors $\|T\|_p = \||T|\|_p$.

(II)

1. Montrer que :
$\forall u, v \in H$, $\|u \otimes v\|_p = \|u\| \|v\|$.
2. Soit $A, B \in B(H)$. Soient les opérateurs

$L_A : (\mathcal{C}_p, \|\cdot\|_p) \to (\mathcal{C}_p, \|\cdot\|_p)$, $X \longmapsto AX$,

$R_A :$ — " — " , $X \longmapsto XA$,

$M_{A,B} :$ " — " , $X \longmapsto AXB$.

(a) Montrer que $L_A, R_A, M_{A,B} \in B(\mathcal{C}_p)$.

(b) $\|L_A\| = \|R_A\| = \|A\|$, $\|M_{A,B}\| = \|A\|\|B\|$

3) ~~Application~~ Cas : $p = 2$.

(a) Montrer $(L_A)^* = L_{A^*}$,

(b) " $(R_A)^* = R_{A^*}$,

(c) " $(M_{A,B})^* = M_{A^*,B^*}$

4) Soit l'opérateur (où $A \in B(H)$) :

$$\delta_A : (\mathcal{C}_2, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (\mathcal{C}_2, \|\cdot\|_2)$$
$$X \longmapsto AX - XA.$$

(a) Montrer que : $\mathcal{C}_2(H) = \overline{R(\delta_A)} \oplus \ker \delta_{A^*}$

est une somme directe orthogonale.

(b) En déduire que :

$\forall A \in B(H)$, $\overline{R(\delta_A)} \cap \ker \delta_{A^*} = \{0\}$.

III Soit $T \in \mathcal{C}_p(H)$, et ~~soit~~ $\operatorname{rg} T = \infty$

$T = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \psi_n \otimes \varphi_n$ une écriture spect. de T.

① Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} s_n \psi_n \otimes \varphi_n$

converge vers T par rapport à $\|\cdot\|_p$.

② Montrer que, pour tout $A \in B(H)$:

(a) $AT = \sum_{n=1}^{\infty} s_n (A\psi_n) \otimes \varphi_n$

convergence à la fois dans $B(H)$ et $\mathcal{C}_p(H)$.

(b) $TA = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \psi_n \otimes (A^* \varphi_n)$

convergence à la fois dans $B(H)$ et $\mathcal{C}_p(H)$

IV ① Soit $T \in \mathcal{C}_1(H)$.

(1) Montrer que si T auto-adj, alors $\operatorname{tr} T \in \mathbb{R}$

② Montrer que $T \geq 0$, alors $\operatorname{tr} T \geq 0$.

(3) Montrer que $\operatorname{tr} T^* = \overline{\operatorname{tr} T}$.

(4) On suppose $T \geq 0$, Montrer $\operatorname{tr} T = 0 \Longleftrightarrow T = 0$.

$\boxed{4}$ Soient A et B deux opérateurs auto-adj. de $B(H)$ t.q: A ou B compact et $AB \in \mathcal{C}_1(H)$.

(1) Montrer que $tr(AB)$ est réelle.

(2) On suppose $A \geq 0$ et $B \geq 0$

Montrer que :

(i) $tr(AB) \geq 0$.

(ii) $tr(AB) = 0 \Longleftrightarrow AB = 0$.

T.D.3 - Solutions

I

Soit $T = \sum_{n=1}^{N} s_n \psi_n \otimes \varphi_n$, une écriture spectrale de T, où $N = \mathrm{rg}\, T$.

1. On a alors (voir T.D.1)
$$|T| = \sum_{n=1}^{N} s_n \varphi_n \otimes \varphi_n$$
une écriture spectrale de $|T|$.

D'où $s_n(|T|) = s_n = s_n(T)$, pour $\forall n$.

2. découle directement de 1.

3. " " " 1.

II

1. Soient $u, v \in H$.

Montrons $\|u \otimes v\|_p = \|u\| \|v\|$ — $(*)$

Cas 1 : $u = 0$ ou $v = 0$,
$(*)$ est vérifiée (trivial).

② Cas 2 : $u \neq 0$ et $v \neq 0$.

Alors
$$u \otimes v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \left(\frac{1}{\|u\|} u\right) \otimes \left(\frac{1}{\|v\|} v\right)$$

et donc une écriture spectrale de l'opérateur de rg 1 : $u \otimes v$.

Donc $s_1(u \otimes v) = \|u\| \cdot \|v\|$,

et donc $\|u \otimes v\|_p = \left[\left(s_1(u \otimes v)\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}$

$= \|u\| \cdot \|v\|$.

② (a) L_A, R_A, $M_{A,B}$ sont linéaires (facile à vérifier).

(i) L_A borné ? En effet, soit $X \in \mathcal{C}_p$.

Donc $\|L_A(X)\|_p = \|AX\|_p \leq \|A\| \cdot \|X\|_p$.

D'où L_A borné et $\|L_A\| \leq \|A\|$.

(ii) m̂. preuve que (i), on $\|R_A\| \leq \|A\|$

(iii) $M_{A,B}$ borné ? En effet, soit $X \in \mathcal{C}_p$.

Donc $\|M_{A,B}(X)\|_p = \|AXB\|_p$

$$\leq \|A\|\,\|B\|\,\|X\|_p .$$

D'où $M_{A,B}$ borné et $\|M_{A,B}\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

(b) (i) $\|L_A\| = \|A\|$?

Soit $x \in (H)_1$. D'après (1) : On a alors $\|x \otimes x\|_p = \|x\|\,\|x\| = 1$

Donc $\|L_A\| \geq \|L_A(x \otimes x)\|_p = \|A(x \otimes x)\|_p$

$$= \|(Ax) \otimes x\|_p$$

$$\overset{(1)}{=} \|Ax\|.\|x\| = \|Ax\|$$

Par passage au sup. sur $x \in (H)_1$:

$$\|L_A\| \geq \|A\|$$

Comme $\|L_A\| \leq \|A\|$ (d'après (a)),

alors $\|L_A\| = \|A\|$.

(ii) De m. on montre, $\|R_A\| = \|A\|$.

$(\ldots)$ $\|M_{A,B}\| = \|A\|.\|B\|$.

Soit $x, y \in (H)_1$. Comme $\|x \otimes y\|_p = 1$, alors

$$\|M_{A,B}\| \geq \|M_A(x \otimes y)\|_p$$

$$= \|A(x \otimes y)B\|_p$$

$$= \|(Ax) \otimes B^* y\|_p$$

$$= \|Ax\| . \|B^* y\|$$

Par passage au Sup. sur $x \in (H)_1$ et $y \in (H)_1$

$$\|M_{A,B}\| \geq \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} \left(\|Ax\| . \|B^a y\|\right)$$

$$= \left(\sup_{\|x\|=1} \|Ax\|\right) . \left(\sup_{\|y\|=1} \|B^a y\|\right)$$

$$= \|A\| . \|B\|$$

Et comme $\|M_{A,B}\| \leq \|A\|\|B\|$,

alors $\|M_{A,B}\| = \|A\|\|B\|$.

③ Cas $p=2$.

$\mathcal{C}_2(H)$ est un Hilbert où le produit scalaire :

$\forall A, B \in \mathcal{C}_2$, $\langle A, B \rangle = tr(B^* A)$.

(a) $(L_A)^* = L_{A^*}$?

Soit $X, Y \in \mathcal{C}_2$. On a alors

$\langle (L_A)^*(X), Y \rangle = \langle X, L_A(Y) \rangle =$

$\langle X, AY \rangle = tr[(AY)^* X] =$

$tr[Y^* A^* X] = \cancel{\langle X, AY \rangle}$

$= \langle A^* X, Y \rangle$

D'où $(L_A)^*(X) = A^* X = L_{A^*}(X)$.

Alors $(L_A)^* = L_{A^*}$

(b) $(R_A)^* = R_{A^*}$ (m̂. preuve que (a))

(c) $(M_{A,B})^* = M_{A^*,B^*}$:

De (a) et (b), ~~on tire~~ et

comme $M_{A,B} = L_A \circ R_B = R_B \cdot L_A$,

on a :

$$(M_{A,B})^* = (L_A \cdot R_B)^* = (R_B)^* \cdot (L_A)^*$$

$$= R_{B^*} \cdot L_{A^*} = M_{A^*,B^*}.$$

④ (a) Soit $S \in \mathcal{C}_2$. On a alors

$$\left[S \in \overline{R(\delta_A)}^{\perp} \right] \iff \left[S \in R(\delta_A)^{\perp} \right]$$

$$\iff \left[\forall X \in \mathcal{C}_2, \langle AX - XA, S \rangle = 0 \right]$$

$$\iff \left[\forall X \in \mathcal{C}_2, \operatorname{tr}[S^*(AX - XA)] = 0 \right]$$

$$\iff \left[\forall X \in \mathcal{C}_2, \operatorname{tr} S^*AX = \operatorname{tr} S^*XA \right]$$

$$\iff \left[\forall X \in \mathcal{C}_2, \operatorname{tr} S^*AX = \operatorname{tr} AS^*X \right]$$

$$\iff \left[\forall X \in \mathcal{C}_2, \operatorname{tr} [(S^*A - AS^*)X] = 0 \right]$$

$$\iff \left[\forall X \in \mathcal{C}_2, \operatorname{tr} \ldots \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\forall X \in \mathcal{C}_2,\ \langle X, A^* S - S A^* \rangle = 0\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[A^* S - S A^* = 0\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[S \in \ker \delta_{A^*}\right].$$

Ceci montre que :

$$\overline{R(\delta_A)}^{\perp} = \ker \delta_{A^*}$$

Par conséquent : $\mathcal{C}_2 = \overline{R(\delta_A)} \oplus \ker \delta_{A^*}$ est une somme directe orthogonale.

(b) découle directement de (a).