T. D. Théorie de Fredholm

I

Soit E, F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et soit $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire.

① Soit M un s.e.v. de E, et soit $\pi : E \longrightarrow E/M$ donné par : $\pi(x) = [x]$.

(a) Vérifier que π est linéaire surjectif (appelée : surjection canonique).

(b) Soit N un supplémentaire algébrique (S.D.A) de M dans E ; i.e : $E = M \oplus N$.
Montrer que $\operatorname{codim} M = \dim N$.
(utiliser la restriction de π à N).

(c) Soit la fonction
$$\begin{cases} \Gamma : E/_{\ker T} \longrightarrow R(T) \\ [x] \longmapsto \Gamma([x]) = Tx \end{cases}$$

(c.1) Vérifier que Γ est bien définie.

(c.2) Montrer que Γ est linéaire bijective.

(d) On suppose E et F de dimensions finie

On appelle l'indice de T, l'entier relatif donné par : $i(T) = \operatorname{codim} R(T) - \dim \ker T$.

Déduire que l'indice de T est un invariant donné par : $\underline{i(T) = \dim F - \dim E}$.

II

Soit $p \in [1, \infty[$, et soit l'opérateur $T : l_p \longrightarrow l_p$, donné par : $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$, $(x_n)_{n \geq 1} \in l_p$.

(1) Montrer que $T \in B(l_p)$ et $\|T\| = 1$.

(2) Montrer qu'il existe un opérateur $S \in B(l_p)$ tel que $ST = I$.

(3) Déduire que T est à image fermé.

(4) Montrer de deux manières différentes que T est un opérateur de Fredholm.

(5) Trouver l'indice de T.

(6) Montrer que S est un opérateur de Fredholm et trouver son indice.

(7) Montrer que $\Phi_j(l_p) \neq \phi$, pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

III

Soit H un espace de Hilbert complexe de dimension infinie, et soit $T \in B(H)$.

① Montrer que $I - T^*T$ est compact si et seulement si $I - |T|$ l'est aussi.

② On suppose $T = U + K$, où $U, K \in B(H)$, avec U isométrie et K compact.

(a) Montrer que $I - T^*T$ est compact.

(b) Déduire que $|T|$ est un opérateur vérifiant :

(•) $a(|T|) < \infty$, $d(|T|) < \infty$,

(••) $|T|$ est un Fredholm d'indice 0.

(•••) $T \in \Phi_+(H)$.

(c) Donner une condition necessaire et suffisante pour que T soit de Fredholm, soit de Fredholm d'indice 0.

③ Montrer que si T est normale et Fredholm alors l'indice de T est nul.

(IV) Soit λ un complexe non nul, et soit l'opérateur $T : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ donné par :

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left((1-\lambda)x_1, \left(\tfrac{1}{2}-\lambda\right)x_2, \left(\tfrac{1}{3}-\lambda\right)x_3, \dots\right).$$

Montrer que :

(1) $T \in B(\ell_2)$,

(2) $a(T) < \infty$ et $d(T) < \infty$,

(3) T est de Fredholm d'indice 0,

(4) $\sigma_e(T) = \{-\lambda\}$.

(V)

Construction d'un opérateur non Fredholm+ et non Fredholm−.

Pour chaque entier $n \geq 1$, on pose

$$\lambda_n = \frac{(-1)^{n+1}+1}{2n}.$$

Soit l'opérateur $T : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ donné par :

$$T((x_n)_{n\geq 1}) = (\lambda_n x_n)_{n\geq 1}$$

① Montrer que $T \in B(\ell_2)$.

② Trouver $\ker T$ et $\overline{R(T)}$.

③ Déduire que $T \notin \Phi_+(\ell_2) \cup \Phi_-(\ell_2)$.

VI

Soit E un Banach de dimension infinie,

et soit $T \in B(E)$.

(•) T est dit inversible à gauche modulo compact, s'il existe $S \in B(E)$, $K \in \mathcal{K}(E)$ t.q. $ST = I + K$;

S est dit alors : un inverse à gauche de T modulo compact.

(••) T est dit inversible à droite modulo compact, s'il existe $S \in B(E)$, $K \in \mathcal{K}(E)$ t.q : $TS = I + K$,

S est dit alors : un inverse de T à droite modulo compact.

(•••) T est dit inversible modulo compact, s'il est inversible à gauche et à droite modulo compact.

① Vérifier que T est Fredholm si et seulement si T est inversible à droite et à gauche modulo compact.

② Soit $S \in B(E)$. Montrer que :

(a) Si S est un inverse de T à gauche modulo compact, alors $S+K$ l'est aussi, pour tout $K \in \mathcal{K}(E)$.

(b) même question que (a) avec S inverse de T à droite modulo compact.

(c) même question que (a) avec S inverse de T modulo compact.

③ Soit $S_1, S_2 \in B(E)$, avec S_1 un inverse de T à gauche modulo compact, et S_2 un inverse de T à droite modulo compact.

Montrer que S_1 et S_2 sont des Fredholm avec $S_1 - S_2$ compact.

VII

Soit H un espace de Hilbert complexe de dimension infinie, et soit $T \in B(H)$.

① Montrer que :

(a) $T \in \Phi_+(H) \iff T^* \in \Phi_-(H)$,

(b) $T \in \Phi_-(H) \iff T^* \in \Phi_+(H)$.

② En déduire que :

(a) $T \in \Phi(H) \iff T^* \in \Phi(H)$,

(b) si $T \in \Phi(H)$, alors $i(T^*) = -i(T)$.

VIII

Soit H comme dans (VII), et soit $T \in B(H)$

① Montrer que les 4 propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $T \in \Phi_+(H)$,

(ii) $\exists\, S, R \in B(H)$, $ST = I$ [illegible] P, P de rang fini,

(iii) $\exists\, S, K \in B(H)$, $ST = I + K$, K compact

(iv) $[T]$ inversible à gauche dans l'algèbre de Calkin $C(H)$.

(2) Déduire de (1) que les 4 propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $T \in \Phi_-(H)$,

(ii) $\exists S, Q \in B(H)$, $TS = I + Q$, Q de rang fini,

(iii) $\exists S, K \in B(H)$, $TS = I + K$, K compact,

(iv) $[T]$ est inversible à droite dans l'algèbre de Calkin $C(H)$.