Corrigé du T.D.

(I)

① (a).

(*) π linéaire ? Soit $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\pi(\lambda x + y) = [\lambda x + y] = [\lambda x] + [y] = \lambda[x] + [y]$$
$$= \lambda \pi(x) + \pi(y).$$

(*) π surjectif ? Soit $y \in E/M$.

Alors il existe $x \in E$ t.q. $y = [x] = \pi(x)$.

(b) $\operatorname{codim} M = \dim N$? $E = M \oplus N$ S.D.A.

Soit $\pi/_N : N \longrightarrow E/M$, $x \longmapsto \pi(x) = [x]$.

(•) $\pi/_N$ est linéaire : restriction d'une appl. linéaire.

(••) $\pi/_N$ injectif ?

Soit $x \in N$ t.q. $\pi/_N(x) = 0$. Donc $[x] = 0$.

Alors $x \in M$. D'où $x \in M \cap N$. Alors $x = 0$.

(•••) $\pi/_N$ surjectif ? Soit $y \in E/M$.

Il existe alors $x \in E$ t.q. $y = [x]$.

D'autre part, il existe $x_1 \in M$, $x_2 \in N$ t.q.

$x = x_1 + x_2$. Donc $y = [x] = [x_1] + [x_2]$,

or $x_1 \in M$, donc $[x_1] = 0$.

Par conséquent, $y = [x_2] = \pi/_N(x_2)$.

$\Pi/_N$ est donc linéaire bijectif.

Alors $\dim E/_M = \dim N$.

Autrement, $\operatorname{codim} M = \dim N$.

(c) (c.1). Γ bien définie ?

Soit $x_1, x_2 \in E$ t.q. $[x_1] = [x_2]$.

Donc $[x_1 - x_2] = 0$, et alors $x_1 - x_2 \in \ker T$.

D'où $T(x_1) - T(x_2) = T(x_1 - x_2) = 0$.

i.e. $Tx_1 = Tx_2$.

(c.2)(•) Γ linéaire, car T linéaire.

(••) Γ bijective? Γ surjective, c'est évident.

Γ injective? Soit $x \in E$ t.q. $\Gamma([x]) = 0$.

Donc $Tx = 0$. Alors $x \in \ker T$. Donc $[x] = 0$.

Γ est donc bijective.

(d) Comme Γ est linéaire bijective, donc

$\dim E/\ker T = \dim R(T)$.

i.e: $\operatorname{codim} \ker T = \dim R(T)$ (*)

Or $\operatorname{codim} \ker T = \dim E - \dim \ker T$,

et $\dim R(T) = \dim F - \operatorname{codim} R(T)$;

donc $i(T) = \operatorname{codim} R(T) - \dim \ker T$

$= \dim F - \dim R(T) + \operatorname{codim} \ker T - \dim E$

$= \dim F - \dim E$, d'après (*).

II

(1) Voir S.I.

(2) Soit l'opérateur $S : l_p \longrightarrow l_p$ donné par :

$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$, $(x_n)_{n \geq 1} \in l_p$.

$S \in B(l_p)$ (voir S1).

On a donc, pour $x = (x_n)_{n \geq 1} \in l_p$,

$STx = S(0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots) = x$.

Donc $ST = I$

(3) De (2), on tire $TST = T$ (*)

On a donc $R(T) \subset R(TS) \subset R(T)$.

Alors $R(T) = R(T)$.

De $(*)$, $TS = (TS)^2$.

Donc TS est un projecteur de $B(l_2)$.

Alors $R(TS)$ est fermé.

Par conséquent, $R(T)$ fermé.

(4) <u>Méthode 1</u>. En utilisant la définition.

De (2), on tire que $\ker T = \{0\}$,

donc $\dim \ker(T) = 0 < \infty$,

De plus, $R(T)$ fermé.

Alors $T \in \Phi_+(l_2)$.

D'autre part, on a :

$R(T) = \{(0, x_1, x_2, \ldots) : (x_n)_{n\geq 1} \in l_p\}$.

Posons $M = \{(x_1, 0, 0, \ldots) : x_1 \in \mathbb{K}\} \subset l_p$.

On a donc $l_p = M \oplus R(T)$ est une S.D.T,

car $\dim M = 1$, donc M fermé, et $R(T)$ fermé,

et l_p Banach.

On a donc $\operatorname{codim} R(T) = \dim M = 1$.

Alors $T \in \Phi_-(l_2)$.

Par conséquent, $T \in \Phi(l_p)$

Méthode 2. Utilisons le Théorème de Caractérisation

Posons $M = \{(x_1, 0, 0, \dots) : x_1 \in \mathbb{K}\}$, $l_p = M \oplus R(T)$.

Soit $x = (x_n)_{n \geq 1} \in l_p$. On a alors

$$TSx = T(x_2, x_3, \dots) = (0, x_2, x_3, \dots)$$
$$= (x_1, x_2, x_3, \dots) - (x_1, 0, 0, \dots)$$
$$= x - Px = (I - P)x$$

où P est la projection de l_p sur $M // \bar{a}\, R(T)$

et $\operatorname{rg} P = 1 < \infty$.

Donc $P \in B(l_p)$ et $\operatorname{rg} P = 1 < \infty$.

Alors (**) $\begin{cases} TS = I - P = I + K, & \text{où } K = -P \\ ST = I + 0 \end{cases}$

où K et 0 sont des compacts de $B(l_p)$.

T est donc de Fredholm.

(5) $i(T) = \beta(T) - \alpha(T) = 1 - 0 = 1$.

(6) De (**), on tire aussi que $S \in \phi(l_p)$.

(7) $\forall j \in \mathbb{Z}$, $\phi_j(l_p) \neq \emptyset$.

(a) Pour $j = 0$, on a $I \in \phi_0(l_p)$.

Donc $\phi_0(l_p) \neq \emptyset$.

(b) Pour $j \in \mathbb{N}^*$, montrons $\phi_j(\ell_p) \neq \phi$?

Comme $T \in \phi_1(\ell_p)$, donc $T^j \in \phi_j(\ell_p)$.

Ceci se démontre par recurrence :

pour $j = 1$, on $T^1 = T \in \phi_1(\ell_p)$.

Supposons $T^j \in \phi_j(\ell_p)$, pour $j \in \mathbb{N}^*$.

Comme $i(T^j) = j$ et $i(T) = 1$, alors

$$i(T^{j+1}) = i(T^j . T) = i(T^j) + i(T)$$
$$= j + 1.$$

Par conséquent, $T^{j+1} \in \phi_{j+1}(\ell_p)$.

On a donc :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad T^j \in \phi_j(\ell_p)$$

Ceci montre que :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \phi_j(\ell_p) \neq \phi.$$

~~(c) pour $j \in \mathbb{N}^*$, montrons que $\phi_{-j}(\ell_p) \neq \phi$?~~

~~Soit $j \in \mathbb{N}^*$, donc S^j~~

(c) Pour $j = -1$, montrons que $\phi_{-1}(\ell_p) \neq \phi$

Comme $ST = I$, et $S, T \in \Phi(\ell_p)$, alors

$i(ST) = i(I) = 0$.

D'où $i(S) + i(T) = 0$. Et donc $i(S) = -i(T) = -1$.

Donc $S \in \Phi_{-1}(\ell_p)$. Alors $\Phi_{-1}(\ell_p) \neq \emptyset$.

(d) Pour $j \in \mathbb{N}^*$, montrons $\Phi_{-j}(\ell_p) \neq \emptyset$.

~~Il est facile de~~ Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

Comme $S \in \Phi_{-1}(\ell_p)$, donc

$$i(S^j) = \underbrace{i(S) + \cdots + i(S)}_{j \text{ fois}} \quad (\text{Par récurrence})$$

$$= -j.$$

Donc $S^j \in \Phi_{-j}(\ell_p)$.

De (a), (b), (c), et (d) on tire que:

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad \Phi_j(\ell_p) \neq \emptyset.$$

III

1) "$\Rightarrow$" Supposons $I - T^*T$ compact.

Montrons que $I - |T|$ est compact ?

On a : $I - T^*T = I - |T|^2$

$$= (I + |T|)(I - |T|)$$
$$= (I - |T|)(I + |T|).$$

De plus, $\sigma(I + |T|) = 1 + \sigma(|T|)$

$\subset [1, \infty[$, car $\sigma(|T|) \subset [0, +\infty[$

Alors $I + |T|$ est inversible.

Donc : $I - |T| = (I + |T|)^{-1} . (I - T^*T)$.

Comme $I - T^*T$ est compact, donc

$I - |T|$ l'est aussi ; car $\mathcal{K}(H)$ est un idéal bilatère de $B(H)$.

"$\Leftarrow$". Supposons $I - |T|$ compact.

Montrons $I - T^*T$ compact ?

Comme $I - T^*T = (I + |T|)(I - |T|)$,

donc $I - T^*T$ est compact.

② On suppose $T = U + K$, U isométrie, K compact.

(a) $I - T^*T$ compact ?

On a : $T^*T = (U^* + K^*)(U + K)$

$$= U^*U + U^*K + K^*U + K^*K$$

$$= I + L,$$

où $L = U^*K + K^*U + K^*K \in \mathcal{K}(H)$,

car K^* est aussi compact.

Donc $I - T^*T = -L \in \mathcal{K}(H)$.

(b) (•) $a(|T|) < \infty$?

De (a), on tire que $a(T^*T) < \infty$.

Donc $a(|T|^2) < \infty$.

Alors la suite des itérés des noyaux de $|T|^2$ est stationnaire. Il existe alors un entier naturel p t.q. $\ker |T|^{2p} = \ker |T|^{2p+2}$

Or $\ker |T|^{2p} \subset \ker |T|^{2p+1} \subset \ker |T|^{2p+2}$,

donc $\ker |T|^{2p} = \ker |T|^{2p+1}$.

Donc la suite des itérés des noyaux de $|T|$ est stationnaire, donc $a(|T|) < \infty$.

(••) $d(|T|) < \infty$.

De (a), on tire que $d(|T|^2) < \infty$.

En utilisant le même argument que dans (•), on obtient $d(|T|) < \infty$.

(•••) $|T| \in \Phi_0(H)$?

De (a), on tire que $|T|^2 \in \Phi_0(H)$.

Or $\ker |T|^2 = \ker |T|$ ~~et $R(|T|^2) = R(|T|)$~~

Et comme $d(|T|) = a(|T|)$, donc

$R(|T|^2) = R(|T|)$.

D'après (a), $|T|^2 \in \Phi_0(H)$,

on a donc $|T| \in \Phi_0(H)$.

(••••) $T \in \Phi_+(H)$?

Soit $T = U|T|$, la décomposition pôlaire de T.

On a donc $U^*T = |T| \in \Phi(H)$.

Alors $T \in \Phi_+(H)$.

(c) Puisque $T = U + K$ avec K compact,

donc T est Fredholm ssi U l'est aussi.

U étant une isométrie, donc $\alpha(U) = 0 < \infty$,

et $R(U)$ fermé.

Alors U est Fredholm ssi $\beta(U) < \infty$,

~~ssi~~ ~~∞~~, ssi $\dim(R(U)^\perp) < \infty$,

, ssi $\dim(\ker U^*) < \infty$

, ssi $\alpha(U^*) < \infty$.

Par conséquent, T est Fredholm ssi $\alpha(U^*) < \infty$.

D'autre part, $T \in \Phi_0(H)$ ssi $\alpha(U^*) = \alpha(U) = 0$

ssi U unitaire.

(3) On suppose $T \in B(H)$, T normal, $T \in \Phi(H)$.

On a donc $\dim \ker T < \infty$, $R(T)$ fermé, $\operatorname{codim} R(T) < \infty$

Donc : $R(T^*)$ fermé et $\ker T^* = \ker T$

Alors $\operatorname{codim} R(T) = \dim R(T)^\perp = \dim \ker T^* = \dim \ker T$.

Donc $i(T) = \operatorname{codim} R(T) - \dim \ker T = 0$.