IV

(1) Soit $\{e_n\}_{n\geq 1}$ la base canonique de l_2.

Posons $\lambda_n = \frac{1}{n} - \lambda$, $n \geq 1$.

Alors on a:

$$\forall x \in l_2, \quad Tx = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

La suite $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ étant bornée, donc $T \in B(l_2)$

(2) Il est clair que:

$$\forall x \in l_2, \quad Tx = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n} \langle x, e_n \rangle e_n - \lambda x.$$

Posons $\forall x \in l_2$, $Kx = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n} \langle x, e_n \rangle e_n$.

Alors, on a:

(∘) K est compact, car $\lim \frac{1}{n} = 0$ de $B(l_2)$

(∘∘) $T = K - \lambda I$, avec $\lambda \neq 0$.

Alors $a(T) < \infty$ et $d(T) < \infty$.

(3) et T est de Fredholm d'indice 0.

(4) $[T] = [K - \lambda I] = [K] - \lambda I = -\lambda I$ car K compact.

Donc $\sigma_e(T) = \sigma([T]) = \{-\lambda\}$.

V

1. On a :

$$\forall n \geq 1, \ |\lambda_n| \leq \frac{2}{2n} \leq 1 .$$

La suite $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ étant bornée, donc $T \in B(\ell_2)$

2. Pour $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell_2$, on a :

$$Tx = \left(x_1, 0, \frac{1}{3}x_3, 0, \frac{1}{5}x_5, \ldots\right)$$

Donc $\ker T = \overline{sp\{e_{2n} : n \geq 1\}}$.

et $\overline{R(T)} = \overline{sp\{e_{2n-1}, n \geq 1\}}$.

3. Comme $\alpha(T) = \dim \ker T = \infty$,

et $\operatorname{codim} R(T) \geq \operatorname{codim} \overline{R(T)} = \infty$.

Alors $\alpha(T) = \beta(T) = \infty$.

Ceci montre que $T \notin \Phi_+(\ell_2) \cup \Phi_-(\ell_2)$.

① D'après le Théorème de caractérisation des opérateurs de Fredholm on a :

$$[T \text{ Fredholm}] \Longleftrightarrow [\exists S_1, S_2 \in \mathcal{B}(E), \exists K_1, K_2 \in \mathcal{K}(E), S_1 T = I + K_1, T S_2 = I + K_2]$$

$$\Longleftrightarrow [T \text{ est inversible modulo compact}].$$

② (a) Supposons S un inv. de T à gauche modulo compact.

Il existe alors $K_1 \in \mathcal{K}(E)$ t.q : $ST = I + K_1$.

On a donc : $S(T+K) = I + K_1 + SK = I + L$

Comme $L = K_1 + SK \in \mathcal{K}(E)$, donc $T+K$ est inversible à gauche modulo compact

(b) Même Preuve que (a).

(c) De (a) et (b), on tire (c).

③ Soit $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(E)$, $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(E)$ t.q

$$S_1 T = I + K_1, \quad T S_2 = I + K_2 \quad (*)$$

On a alors

$$[S_1]\cdot[T] = [T]\cdot[S_2] = I = [I]$$

car $[K_1] = [K_2] = 0$.

Donc $[T]$ est inversible

et $[S_1] = [S_2] = [T]^{-1}$.

Donc $[S_1 - S_2] = 0$. Alors $S_1 - S_2 \in \mathcal{K}(E)$.

Posons $S_1 - S_2 = K$. Donc $S_1 = S_2 + K$ $(**)$

De $(*)$, on tire $S_1 \in \Phi_-(E)$ et $S_2 \in \Phi_+(E)$.

Et de $(**)$, on a alors $S_1 \in \Phi_+(E)$, $S_2 \in \Phi_-(E)$.

Donc $S_1, S_2 \in \Phi(E)$, et $S_1 - S_2$ compact.

1) (i) $\Longrightarrow$ (ii) ? Supposons (i) vraie.

Donc $R(T)$ fermé et $\dim \ker T < \infty$.

$$\text{Soit } \begin{cases} H = \ker T \oplus \ker T^{\perp} & S.D.\perp \\ H = R(T) \oplus R(T)^{\perp} & S.D.\perp \end{cases}$$

$$\text{Soit } \left[\begin{array}{l} \tilde{T} : \ker T^{\perp} \longrightarrow R(T) \\ \qquad\quad x_1 \longmapsto \tilde{T}x_1 = Tx_1 \end{array} \right.$$

$\tilde{T}$ est linéaire borné bijectif entre les deux Banach $\ker T^{\perp}$ et $R(T)$ (car $R(T)$ fermé).

On définit l'opérateur $S : H \longrightarrow H$ par

Si $y \in H$, alors $y = Tx_1 + y_1$, pour certain x_1 $\cancel{\in R(T)^{\perp}, y_1}$ $x_1 \in \ker T^{\perp}$ et $y_1 \in R(T)^{\perp}$ (avec x_1, y_1 uniques), on pose $Sy = x_1$.

(voir cours).

Donc S linéaire borné

Soit P la projection de H sur $\ker T$ // à $\ker T^{\perp}$

Comme $H = \ker T \oplus \ker T^{\perp}$ est une S.D.T, Donc $P \in B(H)$, et de plus $R(P) = \ker T$.

Alors P est de rang fini.

Vérifions que $ST = I - P$?

Soit $x \in H$. Donc $x = x_0 + x_1$, pour certa $x_0 \in \ker T$, $x_1 \in \ker T^{\perp}$. On a donc

$STx = STx_1 = x_1 = (I-P)x$.

Donc $ST = I - P$, où P est un opérateur de rang fini de $B(H)$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$? Il suffit de prendre $K = -P$.

Donc K compact.

$(iii) \Longrightarrow (i)$? Supposons (iii).

Donc $ST \in \Phi(H)$. Alors $T \in \Phi_+(H)$.

Par conséquent, (i), (ii) et (iii) sont équivalents.

$(iii) \Longrightarrow (iv)$? Supposons (iii).

On a alors $[S].[T] = [I] + [K]$
$= I + 0$
$= I$

Ceci montre (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (iii)? Supposons (iv).

Il existe alors $S \in B(H)$ t.q. $[S]\cdot[T] = I$

Donc $[ST] = [I]$, et alors $[ST - I] = 0$

D'où $ST - I$ est compact.

Posons $ST - I = K$.

Donc $ST = I + K$.

(2) On a les équivalences (d'après (1))

$$[T \in \Phi_-(H)] \Leftrightarrow [T^* \in \Phi_+(H)]$$

$$\Leftrightarrow [\exists S, P \in B(H), ST^* = I + P, \text{rg} P < \infty]$$

$$\Leftrightarrow [\exists S, K \in B(H), ST^* = I + K, K \text{ compact}$$

Ceci montre que.

$$[T \in \Phi_-(H)] \Leftrightarrow [\exists S, P \in B(H), TS^* = I + P^*, \text{rg} P^* <$$
$$= \text{rg} P$$

$$\Leftrightarrow [\exists S, K \in B(H), TS^* = I + K^*, K^* \text{ compact}]$$

Ceci montre que (i), (ii), et (iii) sont équivalentes

$(i) \Longrightarrow (iv)$? Supposons (i) vrai.

Donc $T^* \in \Phi_+(H)$. Alors $[T^*]$ est inversible à gauche

Il existe donc $S \in B(H)$ t.q. $[S].[T^*] = I = [I]$

Donc $[ST^* - I] = 0$.

i.e. $ST^* - I$ est compact.

Donc $TS^* - I = (ST^* - I)^*$ est compact.

~~Posons~~ Alors $[TS^* - I] = 0$

Donc $[T].[S^*] = I$.

Ce qui montre (iv).

$(iv) \Longrightarrow (i)$? Supposons (iv) vrai.

Il existe alors $S \in B(H)$ t.q. $[T][S] = I$.

Donc $[TS - I] = 0$.

$K = TS - I$ est donc compact.

Alors $TS = I + K \in \Phi(H)$.

D'où $T \in \Phi_-(H)$.