

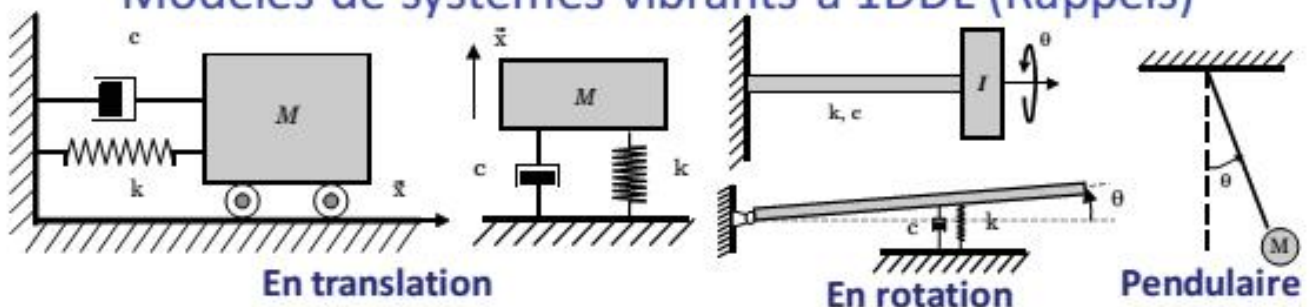
# Chapitre 2

## Systèmes à un degré de liberté

Le système à 1 degré de liberté constitue le modèle le plus simple d'une structure. En réalité les structures ne sont pas rigides, elles bougent et se déforment dans plusieurs directions ; leur mouvement est donc constitué de plusieurs inconnues (une infinité). Cependant pour beaucoup de situations un modèle à 1 DDL (quelquefois à 2 DDL) permet une prédiction très satisfaisante du comportement de la structure, et présente l'avantage de pouvoir être résolu rapidement "à la main". De plus les phénomènes intervenant pour les systèmes à 1 DDL et leur interprétation seront forcément présents dans les systèmes discrets (i.e. à  $n$  DDL) et dans les systèmes continus.

Il faut distinguer 3 systèmes à 1 DDL: le système en translation, le système en rotation, et le système pendulaire.

### Modèles de systèmes vibrants à 1DDL (Rappels)



Paramétrage	Translation	Rotation	Pendulaire
Déplacement	Longitudinal : $x$	Angulaire : $\theta$	Angulaire : $\theta$
Inertie	Masse : $M$	Moment d'inertie : $I$	Masse : $M$
Raideur	Résistance à l'allongement : $k$	Résistance à la torsion : $k$	Pesanteur
Amortissement	Frottements visqueux : $c$		

#### Objectif :

Déterminer la forme du mouvement de la structure en fonction :

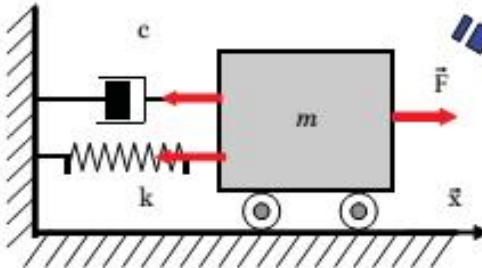
- du temps :  $x(t)$ ,  $\theta(t)$
- de la fréquence de l'excitation :  $x(\omega)$ ,  $\theta(\omega)$

## Écriture de l'équation du mouvement à 1DDL

2 méthodes (en translation)

### Bilan des forces (PFD) :

- Force d'excitation :  $F$
  - Force de rappel élastique :  $-kx$
  - Force de frottement visqueux :  $-c\dot{x}$
- $$m\ddot{x} = \sum \text{Forces} = F - c\dot{x} - kx$$



### Conservation de l'énergie :

- Énergie cinétique :  $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$
- Énergie potentielle élastique :  $U = \frac{1}{2}kx^2$
- Puissance dissipée :  $\Pi_d = c\dot{x}^2$
- Puissance extérieure :  $\Pi_e = F\dot{x}$

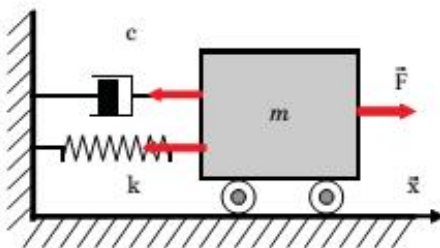
$$\frac{d(T + U)}{dt} + \Pi_d = \Pi_e$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$$

Pour un système en rotation  $\theta$  soumis à un couple  $\Gamma$

$$I\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + K\theta = \Gamma$$

## Écriture de l'équation du mouvement à 1DDL



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{F}{m}$$

avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Pulsation propre  
ou naturelle

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_0}$$

Facteur  
d'amortissement

## 2 états de vibrations des structures

### ➤ Les Vibrations libres (VL)

#### Excitation

- Pas de force extérieure  
 $F(t) = 0 \Rightarrow$  libre
- Position et/ou vitesse initiales non nulles



#### Réponse

##### Vibration naturelle de la structure

- sans amortissement :  
Mouvement harmonique (= à fréquence constante)  
à la **fréquence naturelle (ou propre)**
- avec amortissement :  
Mouvement pseudo harmonique amorti

### ➤ Les Vibrations forcées (VF)

#### Excitation

- Force extérieure entretenue (= permanente) ou transitoire (= courte durée)  
 $F(t) \neq 0 \Rightarrow$  forcée



#### Réponse

##### Vibration forcée de la structure

- Mouvement accordé à l'excitation :  
Amplitude et phase selon le spectre de l'excitation  
+  
Vibration libre si  $x_0$  et/ou  $v_0 \neq 0$

## Solutions de l'équation du mouvement

### Vibrations libres amorties ( $c \neq 0$ )

Équation du mouvement :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Solutions de la forme :

$$x(t) = X e^{st}$$

Équation caractéristique :

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \omega_0^2 = 0$$

Racines :

$$s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_0}$$

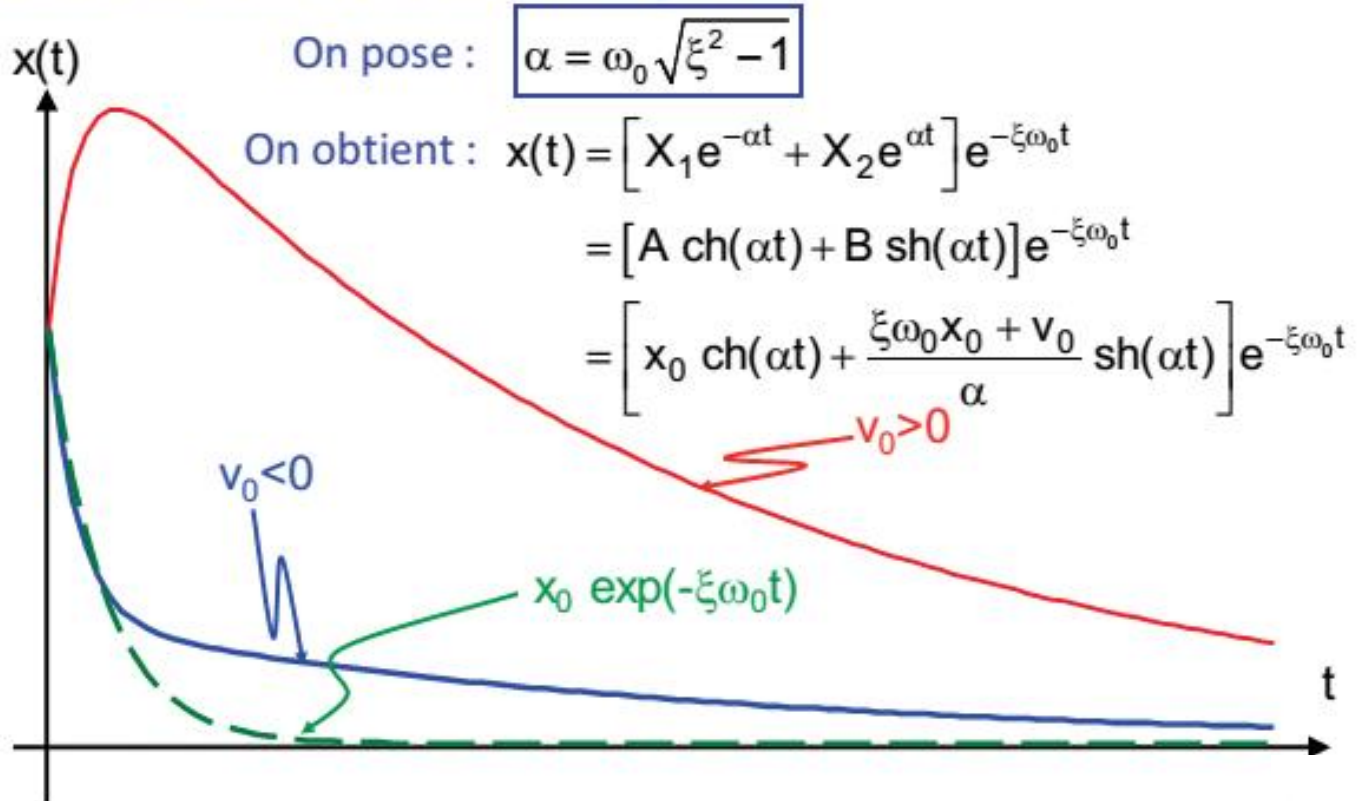
$\xi$  : facteur d'amortissement

3 cas d'amortissement selon  $\xi$



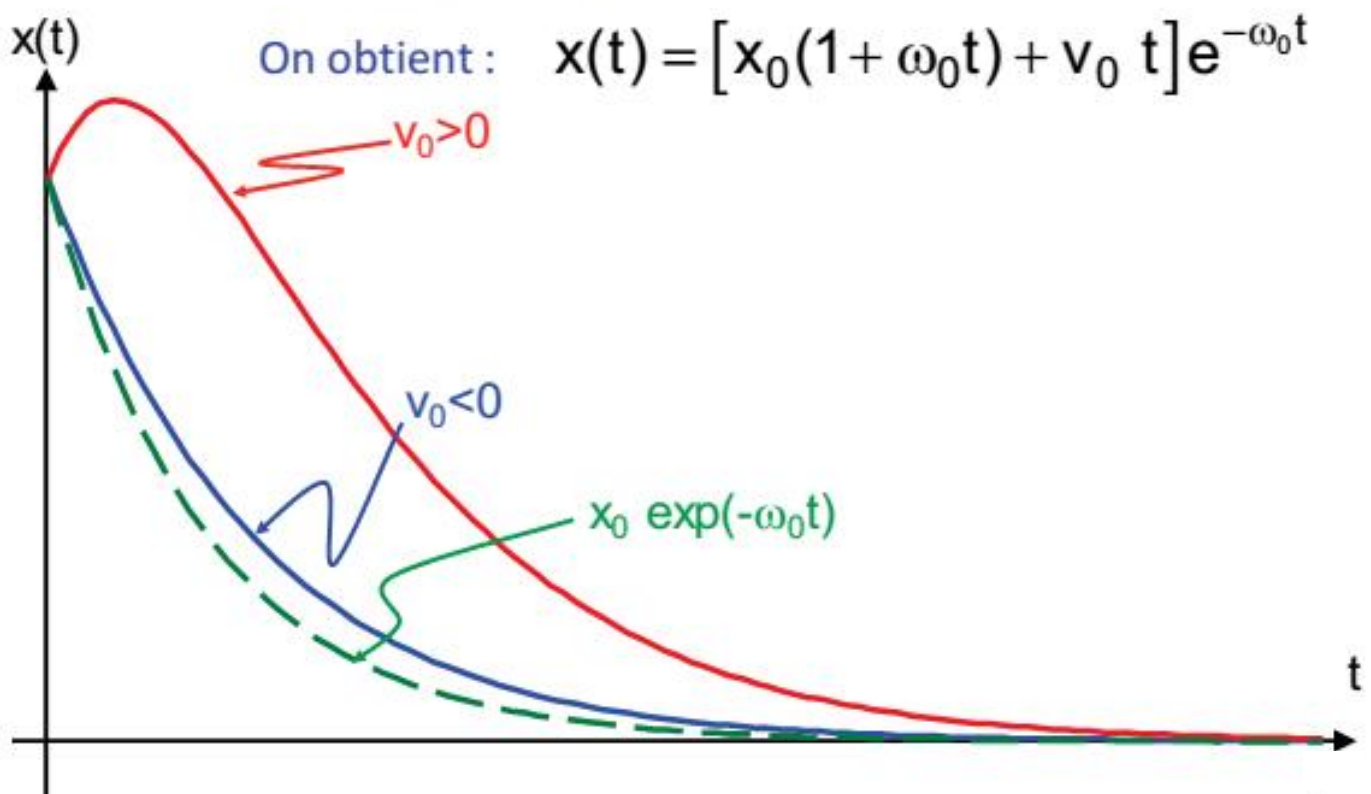
## Mouvement libre d'un système amorti

amortissement sur-critique :  $\xi > 1$



## Mouvement libre d'un système amorti avec

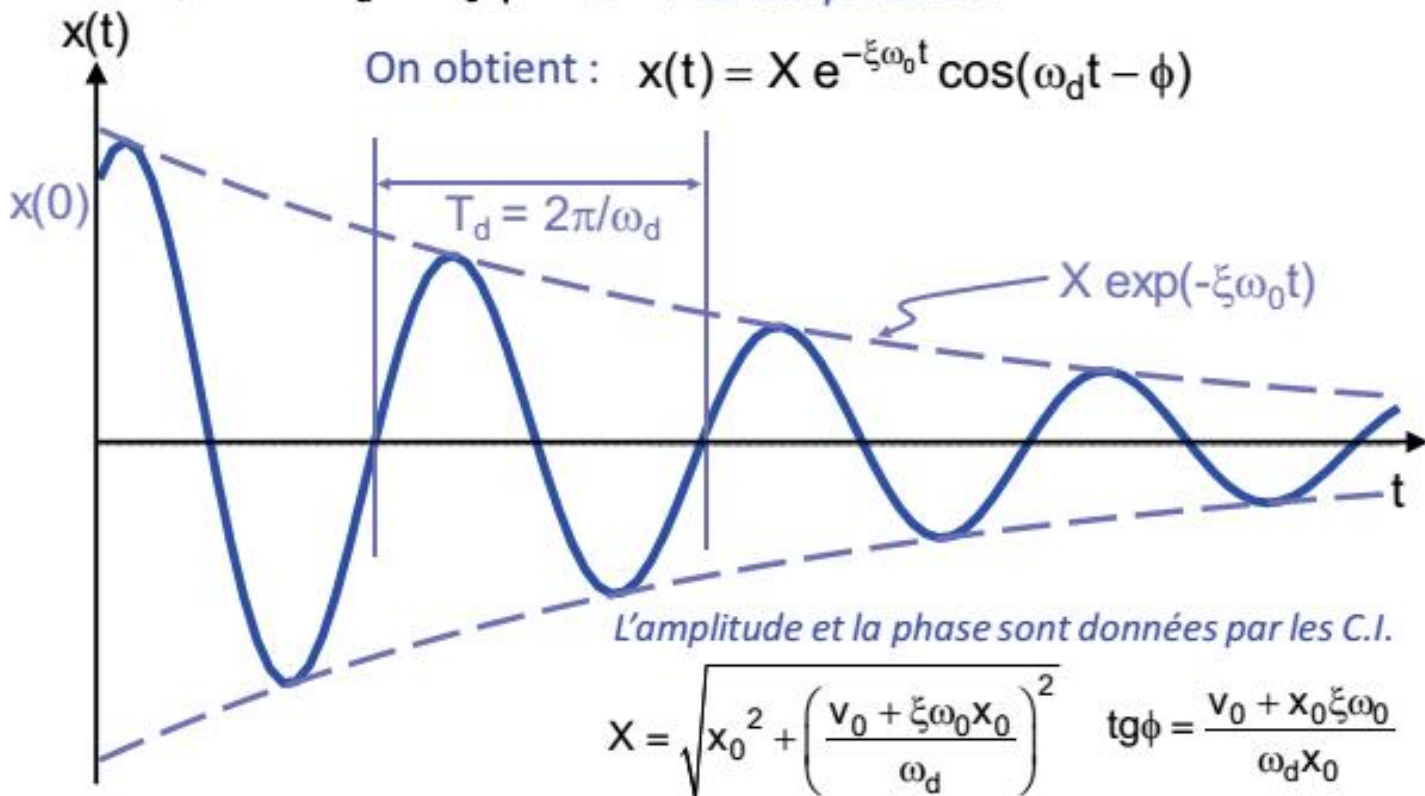
amortissement critique :  $\xi = 1$



## Vibrations libres avec amortissement sous - critique : $\xi < 1$

On pose :  $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$  *Pseudo pulsation*

On obtient :  $x(t) = X e^{-\xi \omega_0 t} \cos(\omega_d t - \phi)$



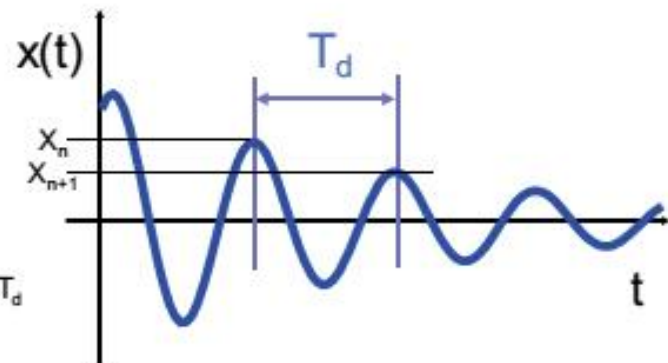
## Vibrations libres avec amortissement sous - critique : $\xi < 1$

Détermination expérimentale de l'amortissement en V.L.

*A utiliser en TP :*

On mesure 2 maxima successifs  $X_n$  et  $X_{n+1}$

$$\frac{X_n}{X_{n+1}} = \frac{x(t_0)}{x(t_0 + T_d)} = \frac{X e^{-\xi \omega_0 t_0}}{X e^{-\xi \omega_0 (t_0 + T_d)}} = e^{\xi \omega_0 T_d}$$



Décrément logarithmique :  $\delta = \ln \frac{X_n}{X_{n+1}}$

$$\delta = \xi \omega_0 T_d = 2\pi \xi \frac{\omega_0}{\omega_d}$$

**En pratique :** On a une mesure + précise de  $\delta$  avec des maxima séparés de  $pT_d$  :

$$\delta = \frac{1}{p} \ln \left( \frac{X_n}{X_{n+p}} \right)$$

$$\delta = \frac{2\pi \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

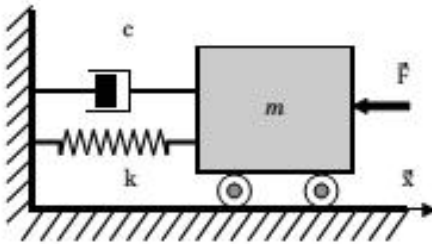


$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$$

Pour les amortissements faibles

$$\delta \approx 2\pi \xi \Leftrightarrow \xi \approx \frac{\delta}{2\pi}$$

## Vibrations forcées harmoniques



Excitation harmonique  
(notation complexe) :

Rappel de l'équation du mouvement :

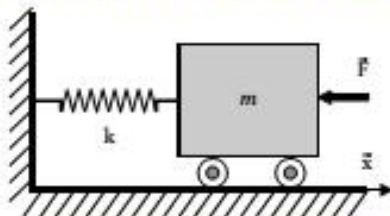
$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t) = F_0 \operatorname{Re} \left[ e^{j\Omega t} \right]$$

Réponse totale = Réponse transitoire  $x_t(t)$  + Réponse permanente  $x_p(t)$

- $x_t(t)$  = Réponse en régime libre (voir + haut)
- $x_p(t)$  = Mouvement après disparition du transitoire
  - Harmonique de même pulsation  $\Omega$  que l'excitation
  - Amplitude  $X$  et Déphasage  $\psi$  à déterminer

## Vibrations forcées *harmoniques* - systèmes *non amortis*



L'équation du mouvement est :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos(\Omega t) \quad (1)$$

La réponse transitoire est la solution générale (celle en V.L.) :

$$x_t(t) = X_t \cos(\omega_0 t - \phi_t)$$

La réponse permanente est la solution particulière de la forme :

$$x_p(t) = X_p \cos(\Omega t)$$

En la substituant dans (1) on a l'amplitude :  $X_p = \frac{F_0}{k - m\Omega^2} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2}$

Le mouvement forcé permanent s'écrit :

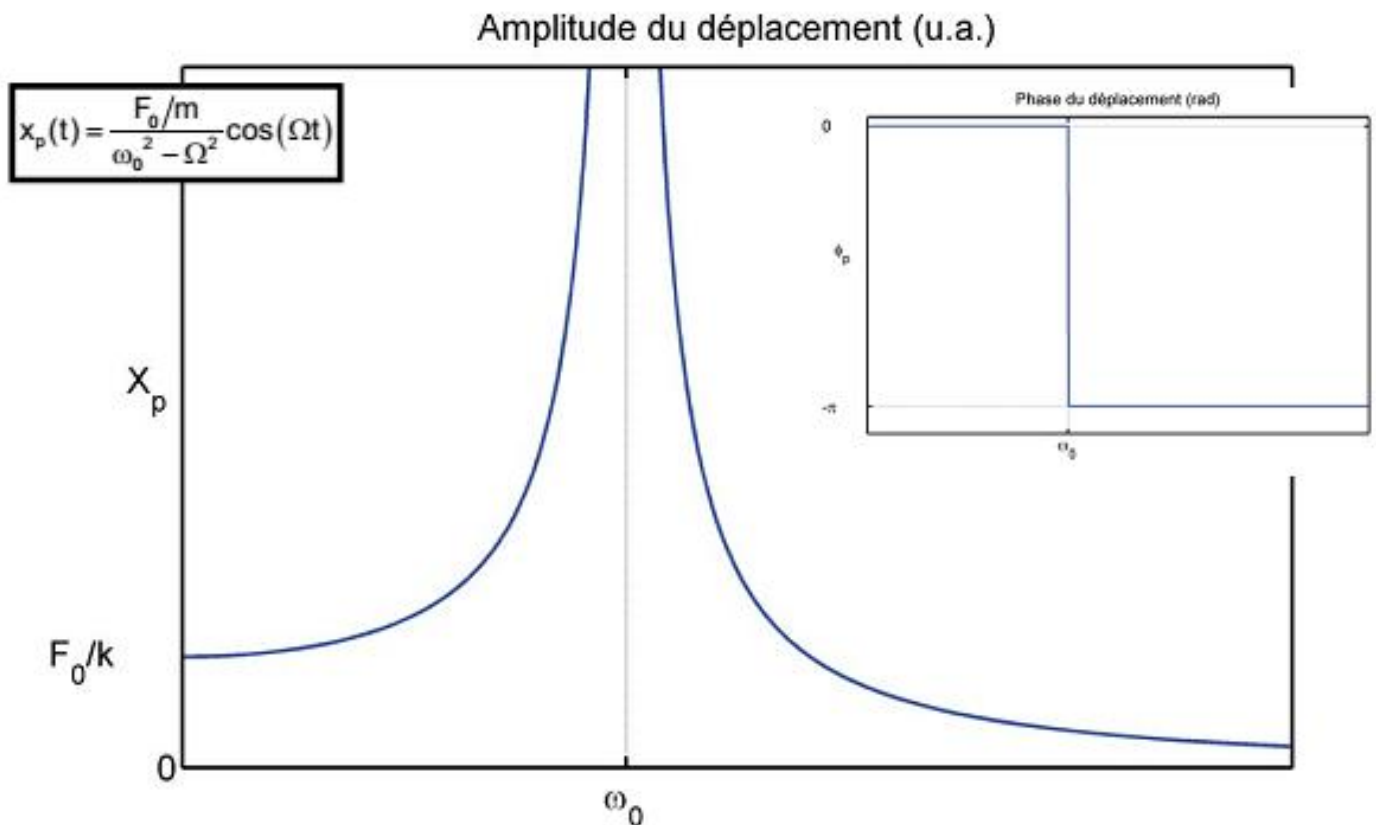
$$x_p(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t)$$

et la solution complète (transitoire + permanent) :  $x(t) = x_t(t) + x_p(t)$

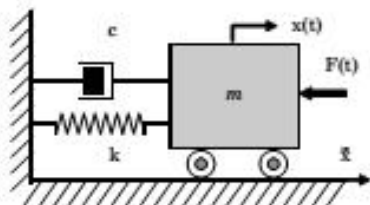
Remarque : Sans amortissement, l'excitation et la réponse sont en phase .



## Réponse en fréquence - systèmes *non amortis*



## Vibrations forcées *harmoniques* - systèmes *sous amortis*



$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}(t) + 2\xi\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t) \quad (2)$$

La réponse transitoire (celle en V.L.) :

$$x_t(t) = X_t e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\omega_d t - \phi_t)$$

La solution particulière est de la forme :

$$x_p(t) = X_p \cos(\Omega t - \phi_p)$$

Par substitution dans (2) on obtient le mouvement forcé permanent :

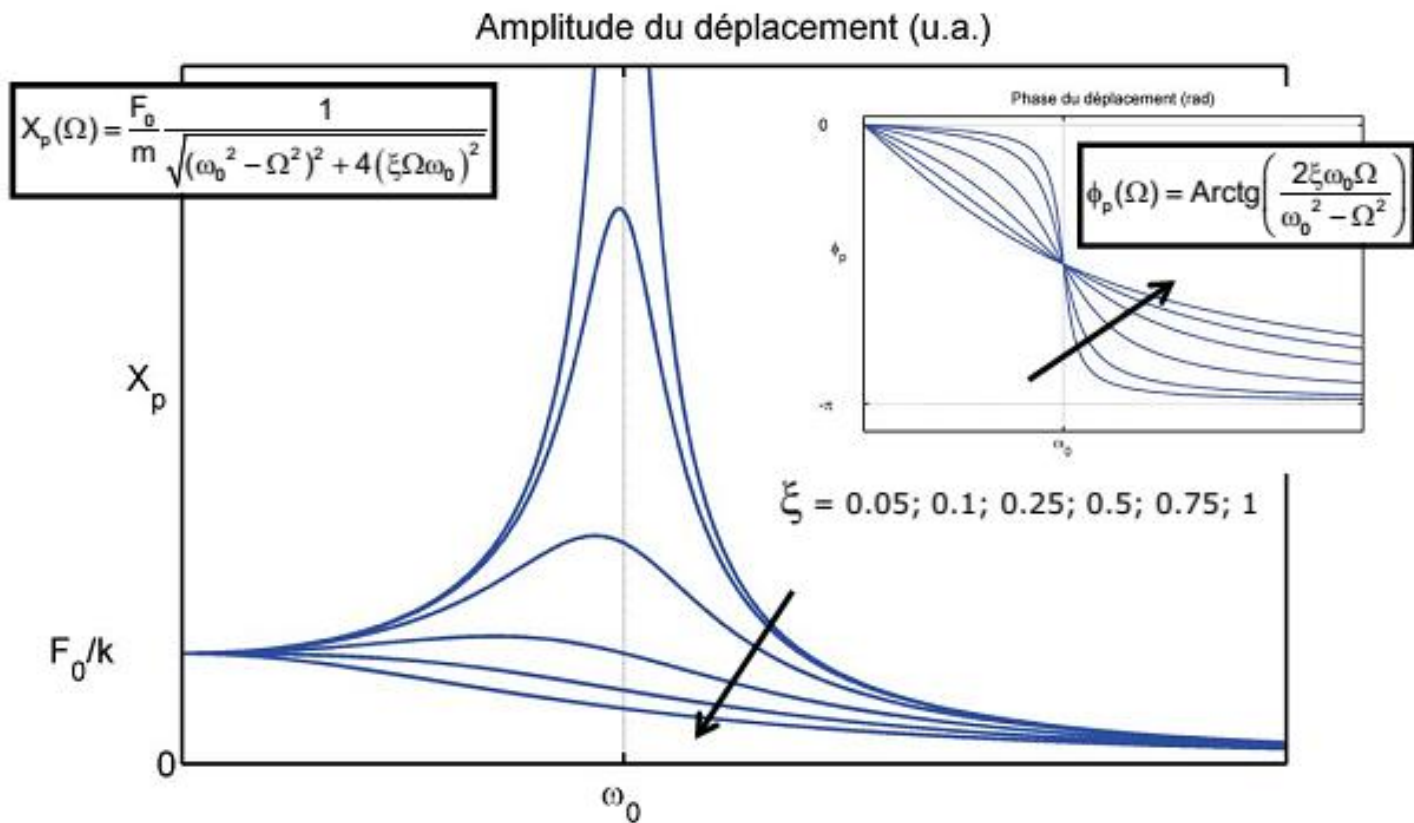
$$X_p(\Omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4(\xi\Omega\omega_0)^2}}$$

$$\phi_p(\Omega) = \text{Arctg}\left(\frac{2\xi\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

La solution complète :  $x(t) = x_t(t) + x_p(t)$

$$x(t) = \underbrace{[X_t \cos(\omega_d t - \phi_t)] e^{-\xi\omega_0 t}}_{\text{Réponse transitoire}} + \underbrace{X_p \cos(\Omega t - \phi_p)}_{\text{Réponse permanente}}$$

## Réponse en fréquence - systèmes *amortis*



## Vibrations forcées *harmoniques* – Réponse permanente

On a :  $x_p(t) = X(\Omega) \cos(\Omega t - \Phi(\Omega))$  avec

$$X(\Omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\Omega)^2}}$$

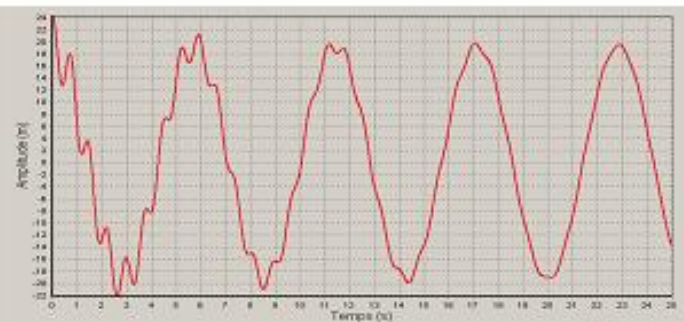
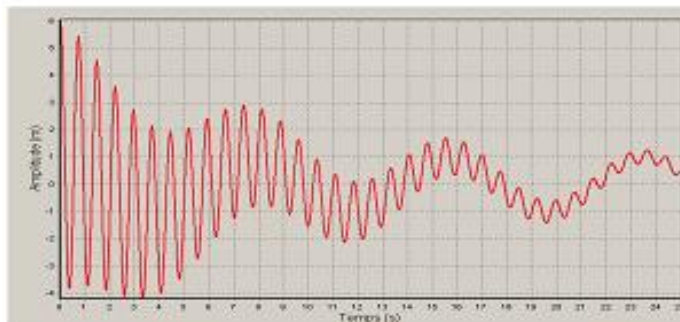
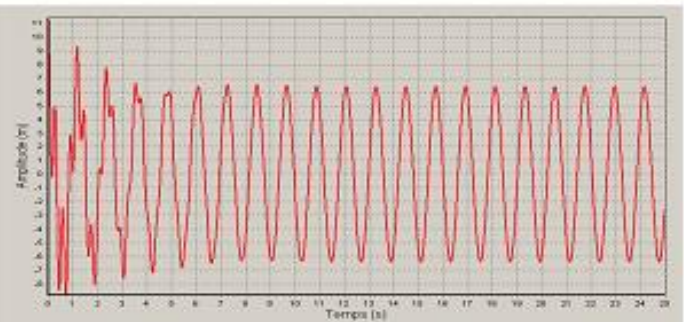
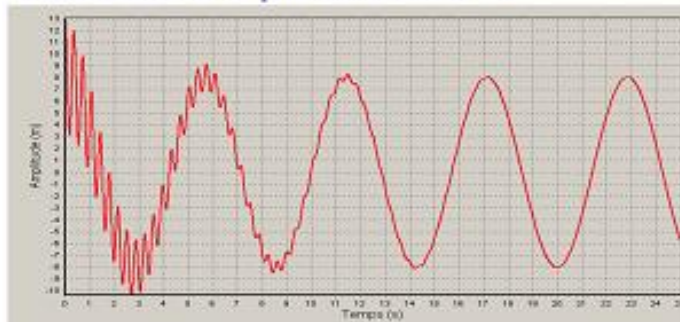
$$\Phi(\Omega) = \text{Arctg}\left[\frac{2\xi\omega_0\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right]$$

- L'amplitude et la phase de  $x_p(t)$  dépendent de la pulsation  $\Omega$  de l'excitation
- Résonance : l'amplification de la force appliquée est maximum lorsque sa fréquence tend vers la fréquence propre :  $\Omega \rightarrow \omega_0 \Rightarrow X(\Omega) \rightarrow \text{maximum}$
- A la résonance la phase varie de  $\pi$

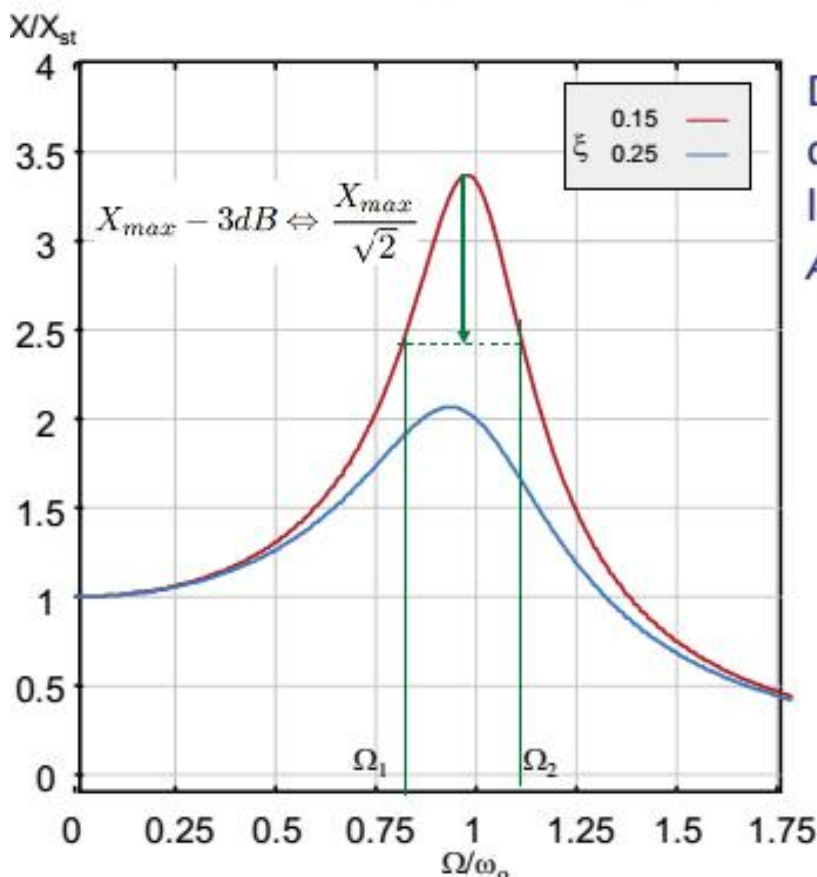


## Exemples de réponses temporelles transitoire + permanent

$$x(t) = X_t \cos(\omega_d t - \phi_t) e^{-\xi \omega_0 t} + \frac{F_0}{m} \frac{\cos(\Omega t - \phi_p)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi \omega_0 \Omega)^2}}$$



## Mesure de l'amortissement



Détermination expérimentale de l'amortissement à partir de la réponse en fréquence  
*A utiliser en TP*

Méthode de la bande passante à -3dB

Valide lorsque  $\xi \ll 1 \Leftrightarrow \omega_0 \approx \omega_d$

$$\xi \approx \frac{\Delta \Omega_{3dB}}{2\Omega_{max}} \approx \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2\omega_0}$$

## Excitation T périodique - Réponse

- Lorsque l'excitation  $F(t)$  est périodique, on montre ( Dvpt en série de Fourier) qu'elle peut s'écrire comme une somme de fonctions harmoniques  $F_n(t)$
- Si  $T$  est la période de  $F(t)$  et  $\Omega = 2\pi/T$ , les harmoniques  $F_n$  ont pour pulsation  $n\Omega$
- Chaque harmonique produit sa propre réponse  $x_n(t)$ :

$$F_n(t) = F_n \cos(n\Omega t - \psi_n) \rightarrow x_n(t) = X_n \cos(n\Omega t - \psi_n - \phi_n)$$

Avec 
$$X_n(n\Omega) = \frac{F_n/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - (n\Omega)^2)^2 + 4\xi^2(\omega_0 n\Omega)^2}}$$

et 
$$\text{tg}\phi_n(n\Omega) = \frac{2\xi n\Omega\omega_0}{\omega_0^2 - (n\Omega)^2}$$

Finalement le principe de superposition donne la réponse totale:

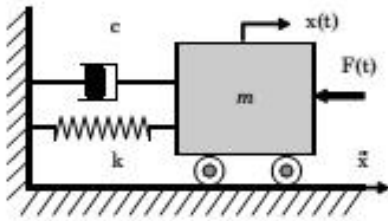
$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \cos(n\Omega t - \psi_n - \phi_n)$$

## Réponse à une excitation qcq : Méthode par Laplace (1/3)

Transformée de Laplace	Transformées usuelles
$f(t) \leftrightarrow F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$	$\delta(t) \leftrightarrow 1$
Propriétés utiles :	$t^n e^{s_0 t} \leftrightarrow \frac{n!}{(s - s_0)^{n+1}}$
Linéarité	$\sin(s_0 t) \leftrightarrow \frac{s_0}{s^2 + s_0^2}$
$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \leftrightarrow \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$	$\cos(s_0 t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + s_0^2}$
Transformée des dérivées	$\sinh(s_0 t) \leftrightarrow \frac{s_0}{s^2 - s_0^2}$
$\dot{f}(t) \leftrightarrow sF(s) - f(0)$	$\cosh(s_0 t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 - s_0^2}$
$\ddot{f}(t) \leftrightarrow s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$	
Propriétés de décalage	
$f(t - t_0) \leftrightarrow F(s)e^{-st_0}$	
$e^{-ts_0} f(t) \leftrightarrow F(s + s_0)$	



## Réponse à une excitation qcq : Méthode par Laplace (2/3)



Lorsque  $F(t)$  est une force qcq, non exprimable en combinaison linéaire de fonctions harmoniques, il peut être plus simple de passer dans l'espace complexe de Laplace où les calculs sont plus directs.

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

On commence par transformer chaque terme de l'équation du mouvement

$$F(t) \leftrightarrow F(s);$$

$$x(t) \leftrightarrow X(s); \quad \dot{x}(t) \leftrightarrow sX(s) - x_0; \quad \ddot{x}(t) \leftrightarrow s^2X(s) - sx_0 - v_0$$

L'équation du mouvement s'écrit alors dans le domaine complexe

$$(ms^2 + cs + k)X(s) - (ms + c)x_0 - mv_0 = F(s)$$

$$\Leftrightarrow (s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)X(s) - (s + 2\xi\omega_0)x_0 - v_0 = F(s)/m$$

## Réponse à une excitation qcq : Méthode par Laplace (3/3)

On en déduit la transformée de la réponse cherchée :

$$X(s) = \underbrace{\frac{F(s)}{m} \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}}_{\text{Réponse permanente } X_p(s)} + \underbrace{\frac{(s + 2\xi\omega_0)x_0 + v_0}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}}_{\text{Réponse transitoire } X_t(s)}$$

Soient  $s_1$  et  $s_2$  les racines du dénominateur :  $s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2$

$$X(s) = \underbrace{\frac{F(s)}{m} \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)}}_{\text{Réponse permanente } X_p(s)} + \underbrace{\frac{(s + 2\xi\omega_0)x_0 + v_0}{(s - s_1)(s - s_2)}}_{\text{Réponse transitoire } X_t(s)}$$

Les deux termes se décomposent facilement en éléments simples.

On en déduit l'expression de la réponse totale  $x(t)$  par transformation inverse (cf. formulaire)

$$X(s) \leftrightarrow x(t)$$



## Exemple : Réponse impulsionnelle

On applique cette méthode au cas d'une force impulsive :  $F(t) = F_0 \delta(t)$   
 Pour le cas où le système est immobile initialement, on obtient :

$$X(s) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad \text{avec} \quad s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Et on arrive à :

$$x(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{m\xi\omega_0} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_d t) & \text{si } \xi < 1 \\ \frac{F_0}{m} t e^{-\omega_0 t} & \text{si } \xi = 1 \\ \frac{F_0}{m\alpha} e^{-\xi\omega_0 t} \text{sh}(\alpha t) & \text{si } \xi > 1 \end{cases}$$

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\alpha = \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}$$

