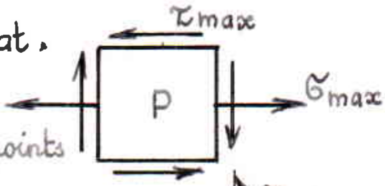
CALCUL DES ARBRES A FLEXION ET TORSION

Les differents arbres de machines tournantes sont soumis à l'action simultanée de la flexion et de la torsion. L'etat de contrainte dans les sections droites des arbres est biaxial. Pour vérifier leurs résistances, on est obligé de se servir des critères de résistance.

D'après le critère des contraintes tangentielles maximales:

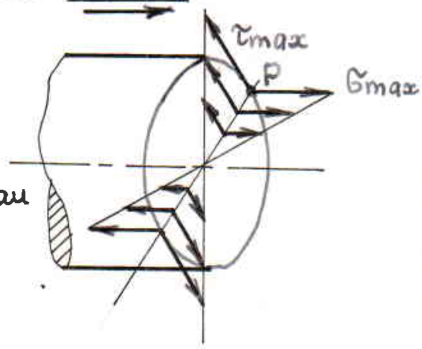
$$\sigma_{éq} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

σ_1 et σ_3 sont les contraintes principales de cet état.



τ_{max}: est la contrainte tangentielle maximale dûe au moment de torsion qui est atteinte en tous les points du contour de la section.

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{M_t}{0{,}2d^3}$$



W_p: module de résistance polaire $(W_p = 2W \cong 0{,}2\,d^3)$

σ_{max}: est la contrainte normale maximale dûe au moment fléchissant M_f résultant atteinte en deux points du contour de la section.

$$\sigma_{max} = \frac{M_f}{W} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{0{,}1\,d^3}$$

D'après la théorie des contraintes: $\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$

avec $(\sigma_x = \sigma_{max}\ ;\ \sigma_y = 0\ ;\ \tau = \tau_{max})$.

d'ou $\quad \sigma_{1,3} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{max} \pm \sqrt{\sigma_{max}^2 + 4\tau_{max}^2}\right)$;

Ayant les valeurs des contraintes principales, nous pouvons écrire la condition de résistance d'après le critère des contraintes tangentielles.

$$\sigma_{éq} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 4\tau_{max}^2} \leq [\sigma]$$

La condition de résistance s'écrit également:

$$\frac{M_{éq}}{W} \leq [\sigma] \qquad \text{où} \qquad M_{éq} = \sqrt{M_f^2 + M_t^2}$$

Comme

$$W = 0{,}1\,d^3 \qquad \text{on tire} \qquad d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{éq}}{0{,}1\,[\sigma]}}$$

Ainsi, pour effectuer le calcul d'un arbre soumis à l'action simultanée de la flexion et de la torsion, il faut suivre l'ordre suivant:

1°/ construire les diagrammes des moments fléchissants M_x et M_y respectivement dans le plan vertical et dans le plan horizontal.

2°/ Construire le diagramme du moment fléchissant résultant $M_f = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$

3°/ Construire le diagramme du moment de torsion

4°/ Calculer le moment équivalent maximal $M_{éq} = \sqrt{M_f^2 + M_t^2}$

5°/ Calculer le diamètre de la section de l'arbre.

Exercice :

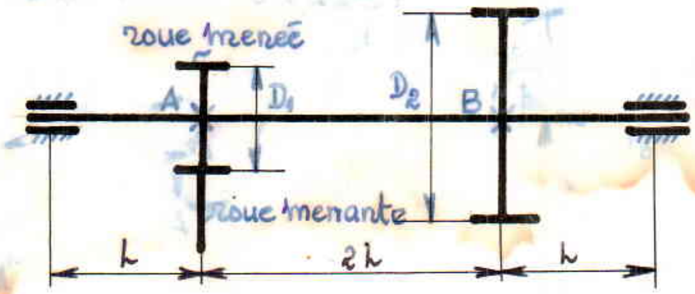
L'arbre AB sur lequel sont fixées deux roues dentées A et B est destiné à transmettre une puissance $P = 10$ kW avec une vitesse de rotation de 516 tr/mn.

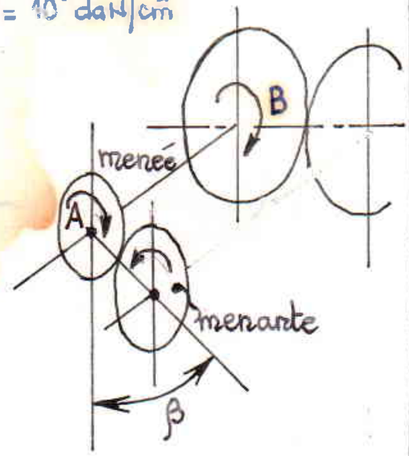
Calculer le diamètre de l'arbre.

Étant donné :

$l = 100$ mm ; $D_1 = 100$ mm ; $D_2 = 200$ mm ; $[\sigma] = 10^3$ daN/cm²

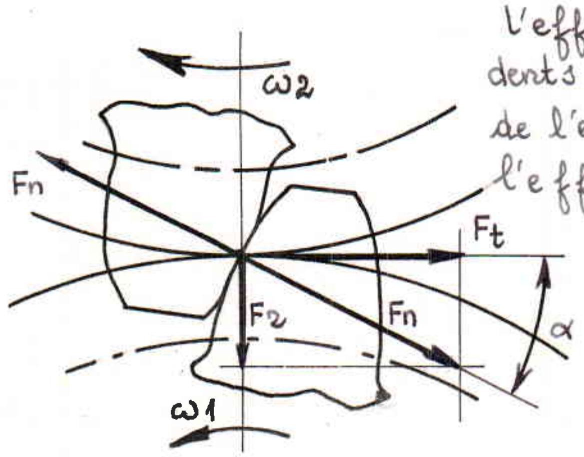
L'angle de pression $\alpha = 20°$; $\beta = 65°$





Solution :

Efforts au contact des dents des roues :



L'effort normal au point de contact des dents est égal à la somme géométrique de l'effort tangentiel "F_t" et de l'effort radial "F_r".

$$F_t = \frac{2 . M_t}{D_1}$$

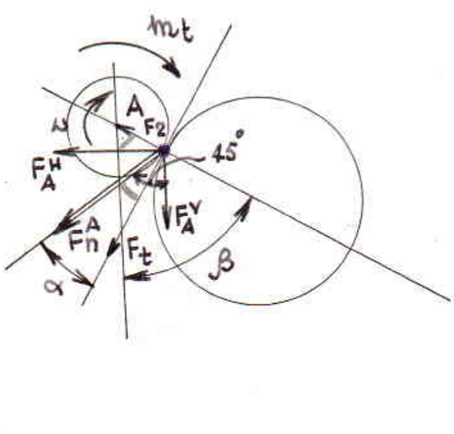
$$F_n = \frac{F_t}{\cos\alpha}$$

L'action normal au point de contact des roues menée et menante est

$$F_n = \frac{2 . M_t}{D_1 . \cos\alpha}$$

où : M_t est le moment de torsion sur la roue menée

Efforts sur la roue menée A :



$$M_t = 95500 . \frac{P}{n} = 95500 . \frac{10}{516} = 1850{,}7 \text{ daNcm}$$

$$F_n^A = \frac{2 . M_t}{D_1 . \cos\alpha} = \frac{2 . 1850{,}7}{10 . \cos 20°} = 393{,}7 \text{ daN}$$

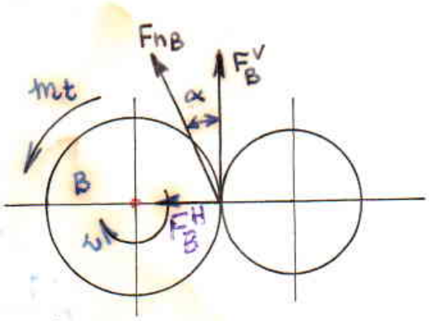
$$F_A^H = F_n^A . \cos 45 = 393{,}7 . 0{,}707 = 278{,}3 \text{ daN}$$

$$F_A^V = F_n^A . \sin 45 = 393{,}7 . 0{,}707 = 278{,}3 \text{ daN}$$

Le moment de torsion est dirigée dans le sens du mouvement de la roue, Efforts dans la roue menante B :

D'une manière analogue,

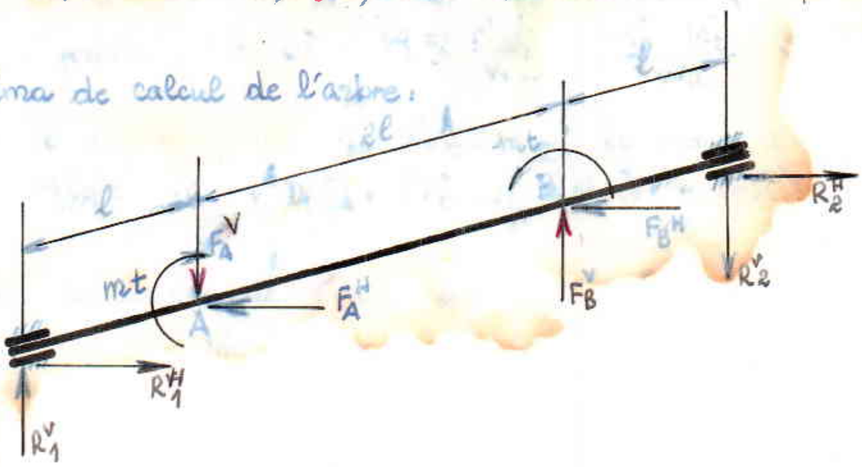
$F_n^B = \dfrac{2 \cdot M_t}{D_2 \cdot \cos\alpha} = \dfrac{2 \cdot 1850,7}{20 \cdot \cos 20^\circ} = 196,88$ daN



$F_B^V = F_n^B \cdot \cos\alpha = 196,88 \cdot 0,94 = 185,$[illegible] daN

$F_B^H = F_n^B \cdot \sin\alpha = 196,88 \cdot 0,34 = 67$ daN

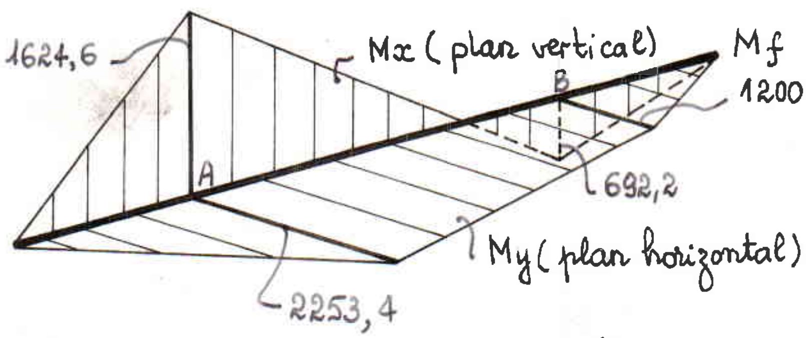
Schéma de calcul de l'arbre :



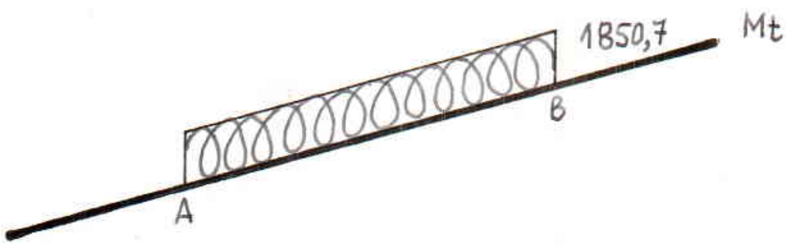
L'arbre est donc est sollicité à la torsion et à la flexion.

D'après le principe de superposition des effets des forces, on peut considérer l'action de chacune des forces séparement :

- Traçons les diagrammes des moments fléchissants M_x et M_y respectivement dans les plans vertical et horizontal.



- Traçons le diagramme des moments de torsion.



- D'après les diagrammes, la section "A" est la plus sollicitée :

$M_{t_A} = 1850,7$ daN.cm

$M_{xA} = 1624,6$ daN.cm

$M_{yA} = 2253,4$ daN.cm

99

Le moment résultant fléchissant est déterminer par la formule:

$$M_{fA} = \sqrt{M_{xA}^2 + M_{yA}^2} = \sqrt{1624{,}6^2 + 2253{,}4^2} = 2777{,}97 \text{ daN.cm}$$

L'état de contrainte étant biaxial, pour vérifier la résistance de la section, utilisons le critère des contraintes tangentielles:

$$\sigma_{éq} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

Après substitution de σ_1 et σ_3 on obtient:

$$\sigma_{éq} = \frac{M_{éq}}{W_x} = \frac{\sqrt{M_f^2 + M_t^2}}{W_x} \leq [\sigma]$$

Selon le même critère de résistance le moment équivalent est:

$$M_{éq} = \sqrt{M_{xA}^2 + M_{yA}^2 + M_t^2} = \sqrt{2777{,}97^2 + 1850{,}7^2} = 3337{,}9 \text{ daN.cm}$$

Par la condition de résistance, nous déterminons le diamètre de l'arbre

$$\frac{M_{éq}}{W_x} \leq [\sigma] \Rightarrow W_x \geq \frac{M_{éq}}{[\sigma]}$$

$$W_x = 0{,}1\, d^3$$

alors :

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{éq}}{0{,}1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3337{,}9}{0{,}1 \cdot 10^3}} = 3{,}21 \text{ cm} = 32{,}1 \text{ mm}$$