Chapitre I

Rappels de cinétique, dynamique

1. Définitions :

1.1 Vibration

La vibration est un phénomène dynamique, c'est-à-dire en mouvement. L'étude des mouvements périodiques et, plus particulièrement, du mouvement oscillatoire conduit à une définition de la vibration.

1.2 Mouvement périodique : Parmi les mouvements mécaniques les plus variés qui se produisent autour de vous, il existe souvent des mouvements qui se répètent. Pensez au battement de votre cœur, au mouvement d'une balançoire, au passage des pales d'un ventilateur de plafond ou encore au mouvement alternatif des pistons d'un moteur à explosion. Tous ces mouvements ont un trait commun : une répétition d'un même cycle de mouvements.

Un cycle est une suite ininterrompue de mouvements ou de phénomènes qui se renouvellent toujours dans le même ordre. Prenez à titre d'exemple le cycle à quatre temps d'un moteur à explosion. Un cycle complet comprend quatre étapes (admission, compression, explosion, échappement) qui sont toujours réalisées dans le même ordre.

On appelle mouvement périodique un mouvement qui se répète et dont chaque cycle se reproduit identiquement. La durée d'un cycle est appelée période **T**.

1.3 Mouvement oscillatoire et vibration : Un mouvement périodique particulièrement intéressant dans le domaine de la mécanique est celui d'un objet qui se déplace de sa position d'équilibre et y revient en effectuant un mouvement de va-et-vient par rapport à cette position.

Ce type de mouvement périodique se nomme oscillation ou mouvement oscillatoire. Les oscillations d'une masse reliée à un ressort, le mouvement d'un pendule ou les vibrations d'un instrument à corde sont des exemples de mouvements oscillatoires.

On appelle vibration le phénomène dynamique qui décrit un objet animé d'un mouvement oscillatoire. L'objet en question peut être une machine ou un de ses composants dont la position d'équilibre est souvent définie comme la position au repos.

1.4 Mouvement sinusoïdale : Théoriquement, si une masse reliée à un ressort est mise en mouvement, la masse oscille - mouvement de va-et-vient autour de sa position d'équilibre stable (masse au repos) - sans jamais s'arrêter. On dit qu'un mouvement vibratoire est sinusoïdal, si l'élongation *x* (*y* ou *z*) d'un point vibrant est une fonction sinusoïdale simple du temps.

$$x(t) = A.\sin(\omega t + \varphi) \;\; ou\; bien\; x(t) = A.\cos(\omega t + \varphi)$$

Avec **A** : l'amplitude d'un mouvement, elle se place à l'origine.

et ω : étant sa pulsation : $\omega = 2.\pi.f = \frac{2.\pi}{T}$

Ce type de mouvement est appelé mouvement harmonique simple (MHS)
Un mouvement oscillatoire n'est harmonique que s'il est linéaire au voisinage d'une position d'équilibre stable.

1.5 Coordonnées généralisées : On appelle coordonnées généralisées d'un système physique un ensemble de variables réelles, qui ne correspondent pas toutes à des coordonnées cartésiennes (par exemple : angles, positions relatives), et permettant de décrire ce système, en particulier dans le cadre de la mécanique lagrangienne. Le terme « généralisées » vient de l'époque où les coordonnées cartésiennes étaient considérées comme étant les coordonnées normales ou (position et mouvement).
Un système en mouvement (translation (x, y, z), rotation (Ox, Oy, Oz))

1.6 Degré de liberté : On appel degré de liberté (DDL) d'un système la capacité de ce système d'effectuer le mouvement de translation et de rotation par rapport aux axes.

2. Éléments cinétiques des systèmes matériels

2.1 Masse d'un système matériel

• Distribution discontinue de masse: $= \sum mi$

• Distribution continue de masse: $m = \int dm$

i. Distribution volumique de masse: $m = \;\; \rho\; A\; d\tau$

ii. Distribution surfacique de masse: $m = \quad \sigma\ A\ ds$

iii. Distribution linéique de masse: $m = \int \lambda\ A\ dl$

2.2 Centre de masse d'un système matériel

• Définition de centre de masse:

i. Distribution discontinue de masse: $\overrightarrow{OC} = \frac{\sum m_i \overrightarrow{OC_i}}{\sum m_i}\ ou\ \sum m_i \overrightarrow{CC_i} = 0$

ii. Distribution continue de masse : $\overrightarrow{OC} = \frac{\int \overrightarrow{OA} dm}{\int dm}\ ou\ \int \overrightarrow{CA} dm = 0$

3. Moment d'inertie

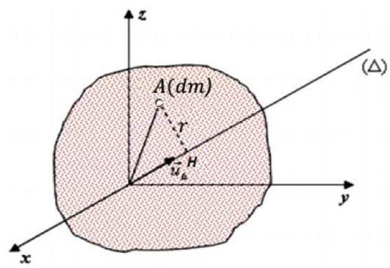
• Moment d'inertie de masse m par rapport à l'axe Δ: $I = m.r^2$

• Moment d'inertie d'un système discontinue de masse, par rapport à l'axe Δ:

$$I = \sum m_i.r_i^2$$

• Moment d'inertie d'un système continue de masse, par rapport à l'axe Δ:

$$I = \int r^2 dm$$



3.1 Opérateur d'inertie

Matrice d'inertie ou opérateur d'inertie : $[I]_0 = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}_{\Re}$

Moment d'inertie par rapport à l'axe (Ox) : $I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm$

Moment d'inertie par rapport à axe (Oy) : $I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm$

Moment d'inertie par rapport à (Oz) : $I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm$

Produit d'inertie : $I_{xy} = \int xydm\ ,\ I_{xz} = \int xzdm\ ,\ I_{yz} = \int yzdm \}$

3.2 Théorème de Huygens-Steiner

Connaissant le tenseur d’inertie d’un solide par rapport à son centre de masse G (pour les solides de formes simples, on les trouve dans des tables), le théorème de Huygens-Steiner permet alors d’obtenir le tenseur d’inertie relativement à n’importe quel point C du solide.

• Formule de Steiner pour les moments d’inertie :

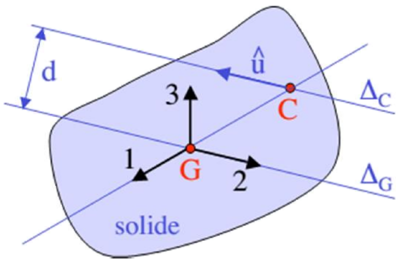
– Δ_C= axe de direction $\hat{\mathbf{u}}$ passant par un point C quelconque

– Δ_G= axe de direction $\hat{\mathbf{u}}$ passant par le centre de masse G

– d = distance entre les deux axes Δ_C et Δ_G

$$
\begin{aligned}
I_{\Delta_C} &= \sum_{i,j} (\tilde{I}_C)_{ij}\, u_i u_j = \sum_{i,j} (\tilde{I}_G)_{ij}\, u_i u_j + \sum_{i,j} M\left[\overrightarrow{CG}^2 u_i u_j \delta_{ij} - (CG)_i u_i (CG)_j u_j\right] \\
&= I_{\Delta_G} + M\left[\overrightarrow{CG}^2 - \left(\overrightarrow{CG}\cdot\hat{u}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{I_{\Delta_C} = I_{\Delta_G} + \underbrace{M\, d^2}_{=\text{ moment d'inertie d'une masse M à une distance d de } \Delta_C}}
$$



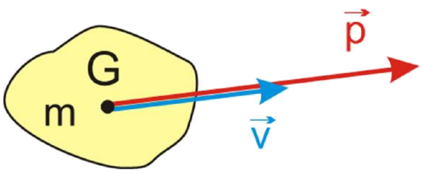
Le moment d'inertie d'un solide par rapport à une droite est égal à la somme du moment d'inertie par rapport à cette droite de la masse du solide concentrée au centre de masse C (Md^2) et du moment d'inertie du solide par rapport à la droite parallèle passant par G ($I_{\Delta G}$).

• Axes principaux :

Si les axes Δ_G et CG sont des axes principaux d’inertie au point G alors les axes Δ_C et CG sont des axes principaux d’inertie au point C

4. Quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'un solide de masse m et de vitesse du centre d'inertie $\vec{V}$ est: $\vec{p} = m\vec{v}$



Point d'application: centre d'inertie G

Direction: celle de $\vec{v}$

Sens: celui de $\vec{v}$

Norme: p = mv

Unité S. I. de la quantité de mouvement

Si m = 1 kg et v = 1 m/s alors p = 1 kgm/s

Quantité de mouvement d'un système constitué de plusieurs solides

La quantité de mouvement d'un système constitué de plusieurs solides est la somme vectorielle des quantités de mouvement des solides qui constituent le système.
Si le système est formé par n solides sa quantité de mouvement est:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_n$$

5. Moment cinétique

Le moment cinétique au point O d'un point matériel M de masse m, animé d'une vitesse $\vec{V}$ est $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}$

Remarque : le moment cinétique dépend du référentiel choisi ainsi que du point O
Théorème du moment cinétique :
Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un mobile ponctuel par rapport à un point fixe O est égale au moment en O de la résultante des forces appliquées au mobile :

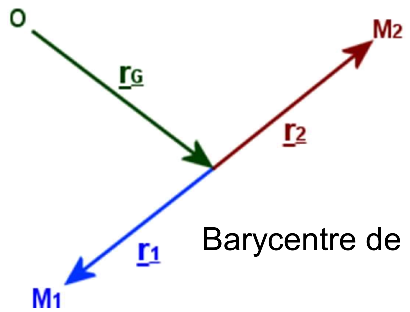
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F})$$

Si le référentiel n'est pas galiléen, $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(\vec{f}_{inertie})$

Le moment cinétique est conservé si $\vec{F} = \vec{0}$ ou bien que la résultante des forces est colinéaire au vecteur position à tout instant. Une telle force est appelée force centrale.

6. Théorème de Koenig

Soients M_1 et M_2 deux points matériels de masse respective m_1 et m_2.
Soit G le barycentre de ces deux points matériels tel que :



Barycentre de deux points matériels

Le moment cinétique au point G, LG, dans un référentiel R est alors :

LG = m_1 GM_1 L V1 + m_2 GM_2 L V_2

LG = m_1 r_1 L V_1 + (VG + V_1) + m_2 r_2 L (VG + V_2)

Or: m_1 GM_1 + m_2 GM_2 = 0

D'où : V_2 = m_1 (r_2 -r_1) / (m_1 + m_2)

ce qui donne : LG = 0 L VG + (r_1 -r_2) L [m_1 m_2 (r_1 -r_2) / m_1 m_2]

ou encore : LG = Lbar

Lbar : moment cinétique au point G dans le référentiel barycentrique.

Soit Lo le moment cinétique au point O dans un référentiel R tel que :

Lo = LG + OG L M VG

D'où

Lo = LG + OG L (m_1 + m_2) VG Théorème de Koenig.

7. Energie cinétique

7.1 Définition

L'énergie cinétique d'un system matériel continu (S) en mouvement par rapport à un repère fixe R est défini par:

$$E_C = \frac{1}{2}\int (\vec{v}_A)^2 dm$$

7.2 Théorème Koënig à l'énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} m v_c^2 + E_c^*$$

Où E_c^* est l'énergie cinétique de dans le référentiel du centre de masse

Travail et puissance d'une force

$$W = \sum \vec{F}_i . d\overrightarrow{OA}_i = \sum \left(\vec{F}_{i,int} + \vec{F}_{i,ext}\right) . d\overrightarrow{OA}_i$$

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \sum \vec{F}_i . \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \sum \vec{F}_i . \vec{v}_{A_i} = \sum \left(\vec{F}_{i,int} + \vec{F}_{i,ext}\right) \vec{v}_{A_i}$$

Théorème de l'énergie cinétique

$$E_C = \sum \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_{A_i}\right)^2 \quad \Rightarrow \frac{dE_C}{dt} = \sum m_i \frac{d\vec{v}_{A_i}}{dt} . \vec{v}_{A_i} = \sum \vec{F}_i . \vec{v}_i = P = P_{int} + P_{ext}$$

- $P_{int} = \sum \vec{F}_{i,int} . \vec{v}_{A_i}$ **:** Puissance fournie au système par les forces intérieures ;
- $P_{ext} = \sum \vec{F}_{i,ext} . \vec{v}_{A_i}$ **:** puissance fournie au système par les forces extérieures.

En intégrant l'expression précédente entre deux instants t_1 et t_2, le théorème de l'énergie cinétique devient :

$$E_C(t_2) - E_C(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (P_{\text{int}} + P_{ext}) dt$$

$$E_C(t_2) - E_C(t_1) = W_{\text{int}} + W_{ext}$$

9. Equation de Newton

8.1. Mouvement de translation

Si un système de masse m est soumis à des forces extérieures, la loi fondamentale de la dynamique (L.F.D.) nous donne :

$$\sum_i \vec{F_i} = m\vec{\gamma_i} = m\vec{a_i}$$

8.2. Mouvement de rotation

La Loi fondamentale de la dynamique d'un mouvement de rotation s'écrit :

$$\sum_i M_\Delta(\vec{F_i}) = J.\ddot{\theta} = J.\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

10. Bilan énergétique :

L'énergie totale d'un système isolé se conserve : $E_T = E_C + E_P = Cste$

L'équation différentielle du mouvement d'un système est donnée par :

$$\frac{dE_T}{dt} = 0$$

11. Equation de Lagrange

La fonction de Lagrange ou Lagrangien représente la variation : $L = E_C - E_P$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = \sum_j F_{ext} = F - F_f$$

…équation de Lagrange de translation

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = \sum_j M_\Delta(F_{ext})$$

… équation de Lagrange de rotation

- Définition :

Par définition la fonction de dissipation est égale à la demi-puissance dissipée.

$$D = \frac{1}{2}P_d = \frac{1}{2}\beta\dot{q}^2$$

Où : $P_d = \beta\dot{q}^2$ la puissance dissipée par les forces de frottement sous forme de chaleur et β est la constante de frottement.

F_{ext}: forces extérieures appliquées {− Force de Frottement au système, − Force entrainant le mouvement (sinusoïdal)

Si F_{ext} = 0, le système est isolé et la fonction de Lagrange est différente d'une fonction du temps ($\mathcal{L} \neq (t)$), le système est dit conservatif.

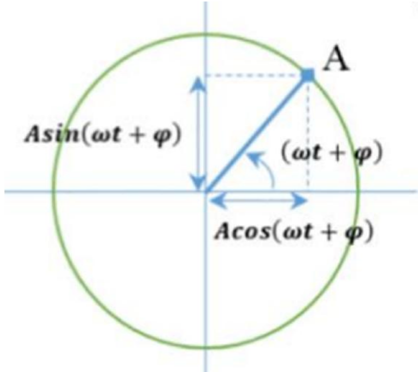
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

12. Cinématique des vibrations harmoniques :

12.1 Interprétation vectorielle de la vibration harmonique :

On peut considérer une vibration harmonique comme étant un vecteur de module A dont l'extrémité exécute une rotation uniforme sur un cercle de rayon R=A, tandis que les extrémités de ses projections sur les axes ont des vibrations définies par :

$\boldsymbol{x(t) = Acos(\omega t + \varphi)}$ et $\boldsymbol{y(t) = Asin(\omega t + \varphi)}$



Ce mode de représentation d'une vibration harmonique présente surtout l'intérêt pour l'étude de la composition d'une vibration.

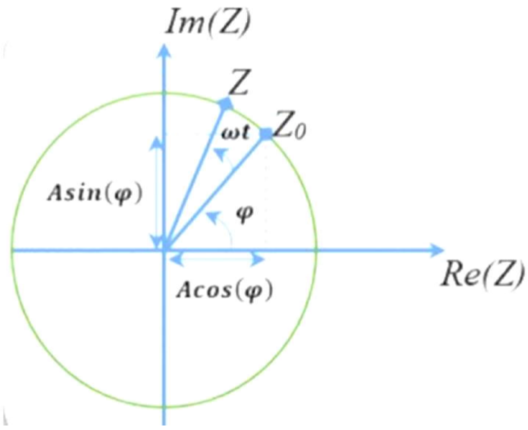
12.2 Représentation d'une vibration à l'aide d'une variable complexe :

La vibration harmonique peut être représentée dans le plan complexe par la variable complexe Z, telque : $Z = A.e^{i(\omega t+\varphi)}$ qui est explicité comme la somme de deux variables de vibration harmoniques :

$$Z = x + iy = A[cos(\omega t + \varphi) + i.sin(\omega t + \varphi)].$$

La partie réelle de cette expression représente une vibration harmonique sur l'axe Ox et la partie imaginaire une deuxième vibration sur l'axe Oy (figure ci-contre).

$x = Re(Z) = Acos(\omega t + \varphi)$; $y = Im(Z) = Asin(\omega t + \varphi)$



Le nombre complexe $Z_0 = Ae^{i\varphi}$ représente le vecteur $\vec{A}$sur le même support à t=0 tandis que le nombre $Z = A.e^{i(\omega t+\varphi)}$ représente le vecteur $\vec{A}$ que forme avec l'axe Ox (ω étant la vitesse angulaire égale $\frac{2\pi}{T}$, et $(\omega t + \varphi)$ et $(\omega t + \varphi)$ étant l'angle au temps t).

12.3 Oscillateur harmonique simple sans amortissement :

12.3.1 Définition :

On appel oscillations libres ou naturelles le mouvement d'un système isolé auquel on donne une excitation initiale à l'aide d'un système de perturbation extérieure et on l'abandonne à ses oscillations libres (à lui-même).
Un oscillateur est un système qui n'est immobile qu'à la position d'équilibre.

12.3.2 Equation de mouvement (régime sinusoïdal) :

Considérons un système physique de position x à un instant quelconque. On dit qu'il effectue un mouvement sinusoïdal si la loi d'évolution avec le temps est donnée par :

$x(t) = Acos(\omega t + \varphi)$

ω_0: étant la pulsation propre du système.

Sa vitesse est : $V = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega t + \varphi)$

Son accélération est :

$$\gamma = a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -A{\omega_0}^2 \cos(\omega t + \varphi) = -{\omega_0}^2.x(t)$$

Ce qui donne : $\frac{d^2x}{dt^2} + {\omega_0}^2.x(t) = 0$

Ou encore : $\ddot{x} + {\omega_0}^2.x = 0$ qui représente l'équation différentielle du mouvement libre non amorti.

La solution générale d'une équation de ce type est : $x(t) = Acos(\omega t + \varphi)$

Chaque fois qu'un système physique obéit à une équation du type : $\ddot{x} + {\omega_0}^2.x = 0$, il décrit un mouvement penulaire sinusoïdal, un tel système physique est appelé « Oscillateur harmonique ».

On obtient des oscillateurs harmoniques chaque fois que la force de rappel est proportionnelle au déplacement.

12.4 Exemples d'oscillateurs mécaniques simples :

12.4.1 Relations fondamentales de la dynamique :

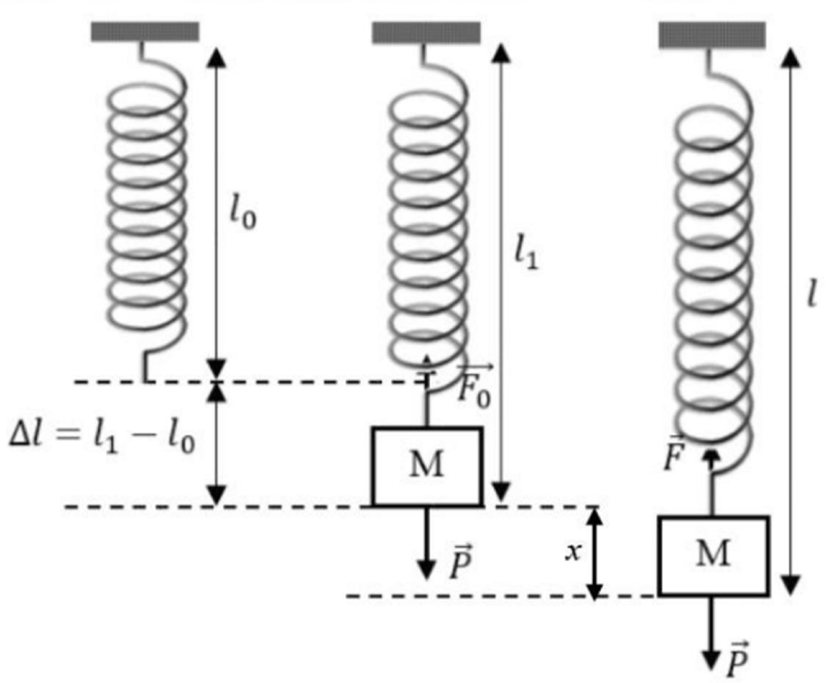
1.1.Pendule à ressort (Mouvement de la translation) :

Δl : Allangement à l'équilibre,

x : Allangement en mouvement,

F_0 : Force de rappel statique,

F : Force de rappel dynamique.



A l'équilibre : $\sum_i \vec{F_i} = \vec{P} - \vec{F_0} = \vec{0} \Rightarrow mg - k(l_1 - l_0) = 0$ sachant que $\Delta l = l_1 - l_0$

En mouvement $\sum_i \vec{F_i} = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{P} - \vec{F_0} = m.\vec{a} \Rightarrow P - F = m.a$

$mg - k(l - l_0) = m\ddot{x}$ sachant que $l=l_1+x \Rightarrow mg - k(l_1 - l_0) - kx = m\ddot{x} \ldots (1)$

Connaissant qu'à l'équilibre $mg - k(l_1 - l_0) = 0$, ceci implique que l'équation (1) devient :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \text{enfin} : \ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$$

Equation différentielle du mouvement dans cette équation x est le déplacement de la masse m par rapport à la position d'équilibre, et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est appelée pulsation propre du système.

Par la suite : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ est appelée période propre du système.

La solution de l'équation différentielle du mouvement est donnée par : $x(t) = Acos(\omega t + \varphi)$

Sachant que A et φ sont des constantes à déterminer à partir des conditions initiales qui sont réparties en deux catégories :

1er cas : à $t = 0, x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = 0$

$$x(t=0) = x_0 = Acos(\varphi) \Rightarrow A = \frac{x_0}{\cos(\varphi)}$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Et à partir des conditions initiales on a : $\dot{x}(t=0) = 0$

$$\dot{x}(t=0) = -A\omega_0 \sin(\varphi) = 0 \Rightarrow \sin(\varphi) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ ou \\ \varphi = \pi \end{cases} \text{avec} \begin{cases} A \neq 0 \\ et \\ \omega_0 \neq 0 \end{cases}$$

- Si $\varphi = 0 \rightarrow A = \frac{x_0}{\cos(0)} = x_0 \rightarrow x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)$
- Si $\varphi = \pi \rightarrow A = \frac{x_0}{\cos(\pi)} = -x_0 \rightarrow x(t) = -x_0\cos(\omega_0 t + \pi) = x_0\cos(\omega_0 t)$

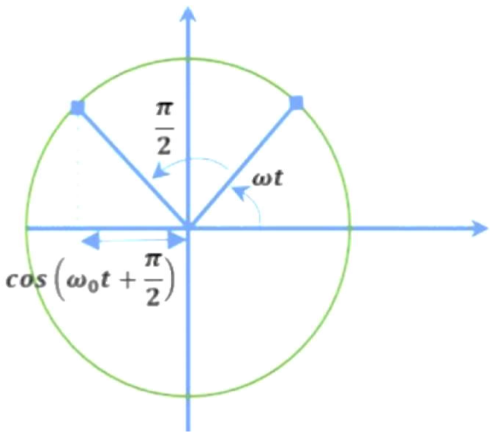
Et on remarque que dans les deux les solutions sont les mêmes et uniques: $x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)$

2ème cas : à $t=0$, $x(t=0) = 0$ et $\dot{x}(t=0) = v_0$

$$x(t=0) = Acos(\varphi) \rightarrow \cos(\varphi) = 0 \rightarrow \varphi = +\frac{\pi}{2}\ (A \neq 0)$$

$$\dot{x}(t=0) = v_0 = -A\omega_0 \sin(\varphi) \rightarrow A = -\frac{v_0}{\omega_0 \sin(\varphi)}$$

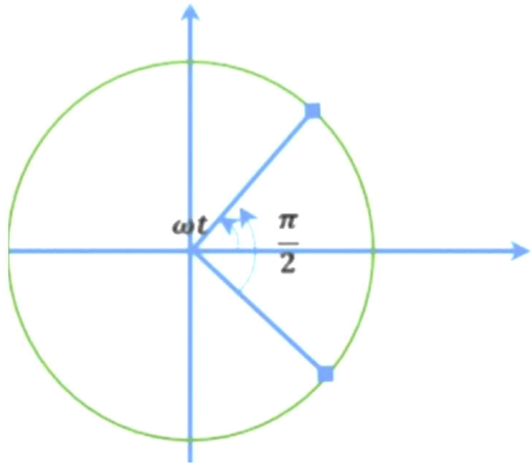
- Si $\varphi = +\frac{\pi}{2} \rightarrow A = -\frac{v_0}{\omega_0 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{v_0}{\omega_0}$



$$x(t) = -\frac{v_0}{\omega_0}\cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$$

$$\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\omega_0 t) \rightarrow x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

- Si $\varphi = -\frac{\pi}{2} \rightarrow A = -\frac{v_0}{\omega_0 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{v_0}{\omega_0}$

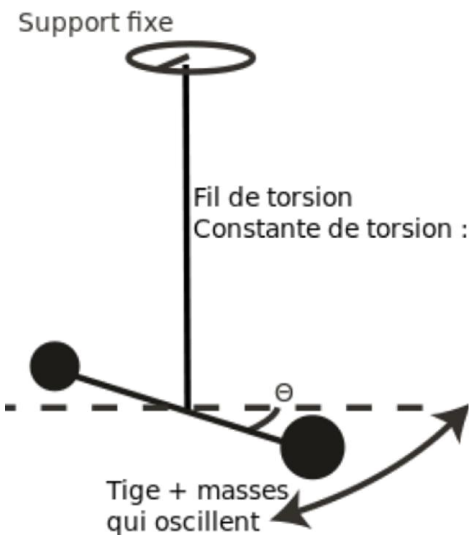


$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \to x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

12.4.2 Pendule de torsion (mouvement de rotation) :

Si on écarte le pendule de sa position d'équilibre il est soumis à un couple de rappel (ou couple de torsion) proportionnel à l'angle de déformation $\mathcal{M} = C.\theta$

C : Constante de torsion du fil.



Le principe fondamental de la dynamique (P.F.D) de rotation nous donne :

$$\sum_i \mathcal{M}_{\Delta G}(\vec{F_i}) = J\ddot{\theta} \to -C\theta = J\ddot{\theta}$$

L'équation du mouvement du système autour de l'axe OG est donc :

$$J\ddot{\theta} = J\frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta$$

Ce qui nous donne :

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{J}\theta = 0 \rightarrow \ddot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = 0$$

Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}$ pulsation propre du système.

Et $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$ période propre du système.

La solution de cette équation est : $\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

A et φ sont des constantes à déterminer par les conditions initiales.

$$\left.\begin{array}{r} Sphère: J = \frac{2}{5}MR^2 \\ Cylindre: J = \frac{1}{2}MR^2 \end{array}\right\} On\ note: MR^2 = I$$