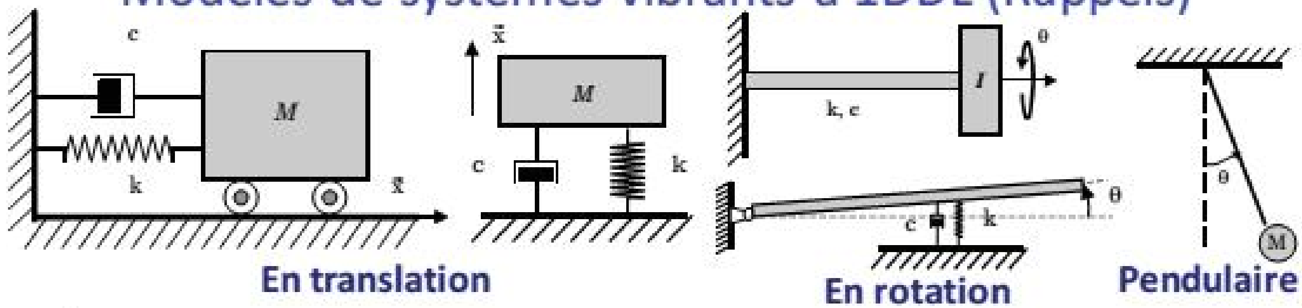
Chapitre 2

Vibrations forcées des systèmes à un degré de liberté

Le système à 1 degré de liberté constitue le modèle le plus simple d'une structure. En réalité les structures ne sont pas rigides, elles bougent et se déforment dans plusieurs directions ; leur mouvement est donc constitué de plusieurs inconnues (une infinité). Cependant pour beaucoup de situations un modèle à 1 DDL (quelquefois à 2 DDL) permet une prédiction très satisfaisante du comportement de la structure, et présente l'avantage de pouvoir ˆêtre résolu rapidement "à la main". De plus les phénomènes intervenant pour les systèmes à 1 DDL et leur interprétation seront forcément présents dans les systèmes discrets (i.e. à n DDL) et dans les systèmes continus.
Il faut distinguer 3 systèmes à 1 DDL: le système en translation, le système en rotation, et le système pendulaire.

Modèles de systèmes vibrants à 1DDL (Rappels)



Paramétrage	Translation	Rotation	Pendulaire
Déplacement	Longitudinal : x	Angulaire : θ	Angulaire : θ
Inertie	Masse : M	Moment d'inertie : I	Masse : M
Raideur	Résistance à l'allongement : k	Résistance à la torsion : k	Pesanteur
Amortissement	Frottements visqueux : c		

<u>Objectif :</u>

Déterminer la forme du mouvement de la structure en fonction :

- du temps : x(t), θ(t)
- de la fréquence de l 'excitation : x(W), θ(W)

Écriture de l'équation du mouvement à 1DDL

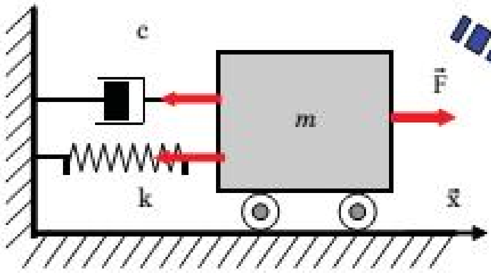
(en translation)

2 méthodes

Bilan des forces (PFD) :

- Force d'excitation : F
- Force de rappel élastique : $-kx$
- Force de frottement visqueux : $-c\dot{x}$

$$m\ddot{x} = \sum Forces = F - c\dot{x} - kx$$



Conservation de l'énergie :

- Énergie cinétique : $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$
- Énergie potentielle élastique : $U = \frac{1}{2}kx^2$
- Puissance dissipée : $\Pi_d = c\dot{x}^2$
- Puissance extérieure : $\Pi_e = F\dot{x}$

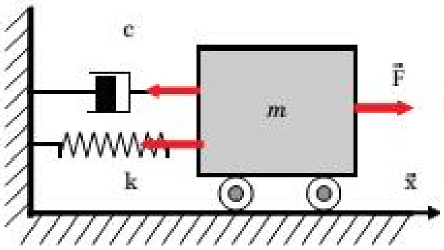
$$\frac{d(T+U)}{dt} + \Pi_d = \Pi_e$$

$$\boxed{m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F}$$

Pour un système en rotation θ soumis à un couple Γ

$$\boxed{I\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + K\theta = \Gamma}$$

Écriture de l'équation du mouvement à 1DDL



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}$$

avec

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$ Pulsation propre ou naturelle

$$\boxed{\xi = \frac{c}{2m\omega_0}}$$ Facteur d'amortissement

2 états de vibrations des structures

➢ Les Vibrations libres (VL)

Excitation
- Pas de force extérieure

$F(t) = 0 \Rightarrow$ libre
- Position et/ou vitesse initiales non nulles

Réponse

Vibration naturelle de la structure
- sans amortissement :

Mouvement harmonique (= à fréquence constante) à la fréquence naturelle (ou propre)
- avec amortissement :

Mouvement pseudo harmonique amorti

➢ Les Vibrations forcées (VF)

Excitation
- Force extérieure entretenue (= permanente) ou transitoire (= courte durée)

$F(t) \neq 0 \Rightarrow$ forcée

Réponse

Vibration forcée de la structure

Mouvement accordé à l'excitation :
Amplitude et phase
selon le spectre de l'excitation

\+

Vibration libre si x_0 et/ou $v_0 \neq 0$

Solutions de l 'équation du mouvement
Vibrations libres amorties ($c \neq 0$)

Équation du mouvement :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \omega_0{}^2\, x(t) = 0$$

Solutions de la forme : $x(t) = Xe^{st}$

Équation caractéristique : $s^2 + \frac{c}{m}s + \omega_0{}^2 = 0$

Racines :

$$s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0{}^2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$\boxed{\xi = \frac{c}{2m\omega_0}}$$

ξ : facteur d'amortissement

3 cas d'amortissement selon ξ

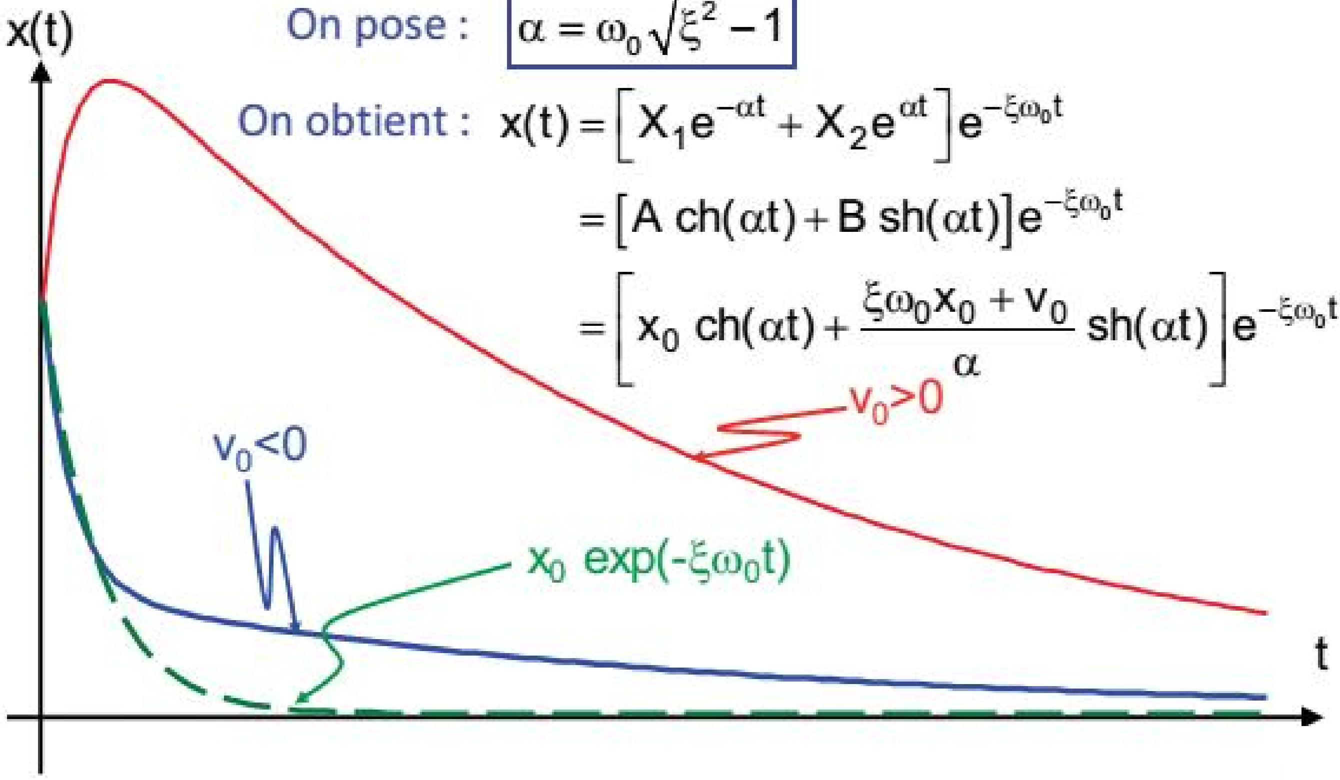
Mouvement libre d’un système amorti amortissement sur-critique : $\xi > 1$

On pose : $\boxed{\alpha = \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}}$

On obtient : $x(t) = \left[X_1 e^{-\alpha t} + X_2 e^{\alpha t}\right] e^{-\xi\omega_0 t}$

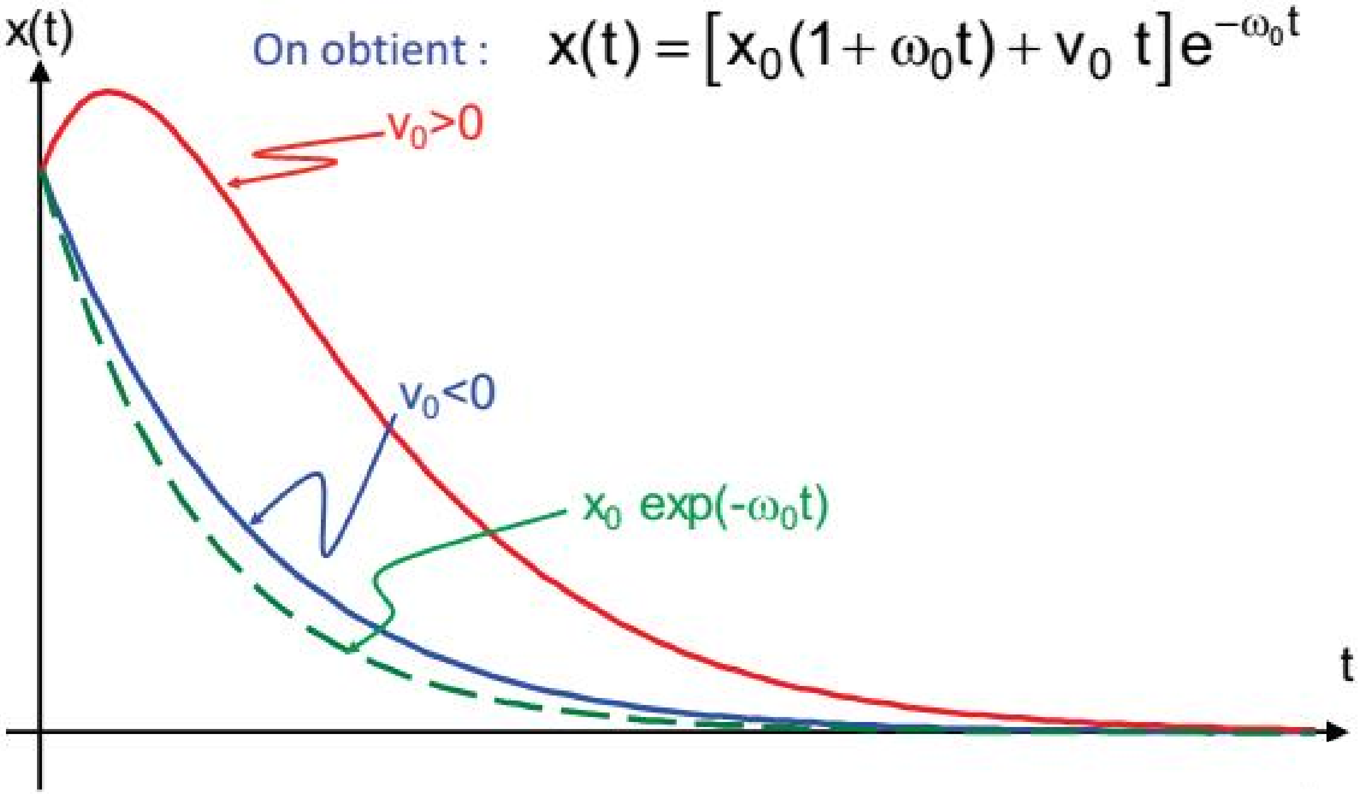
$$= \left[A\,\mathrm{ch}(\alpha t) + B\,\mathrm{sh}(\alpha t)\right] e^{-\xi\omega_0 t}$$

$$= \left[x_0\,\mathrm{ch}(\alpha t) + \frac{\xi\omega_0 x_0 + v_0}{\alpha}\,\mathrm{sh}(\alpha t)\right] e^{-\xi\omega_0 t}$$



Mouvement libre d’un système amorti avec amortissement critique : $\xi = 1$

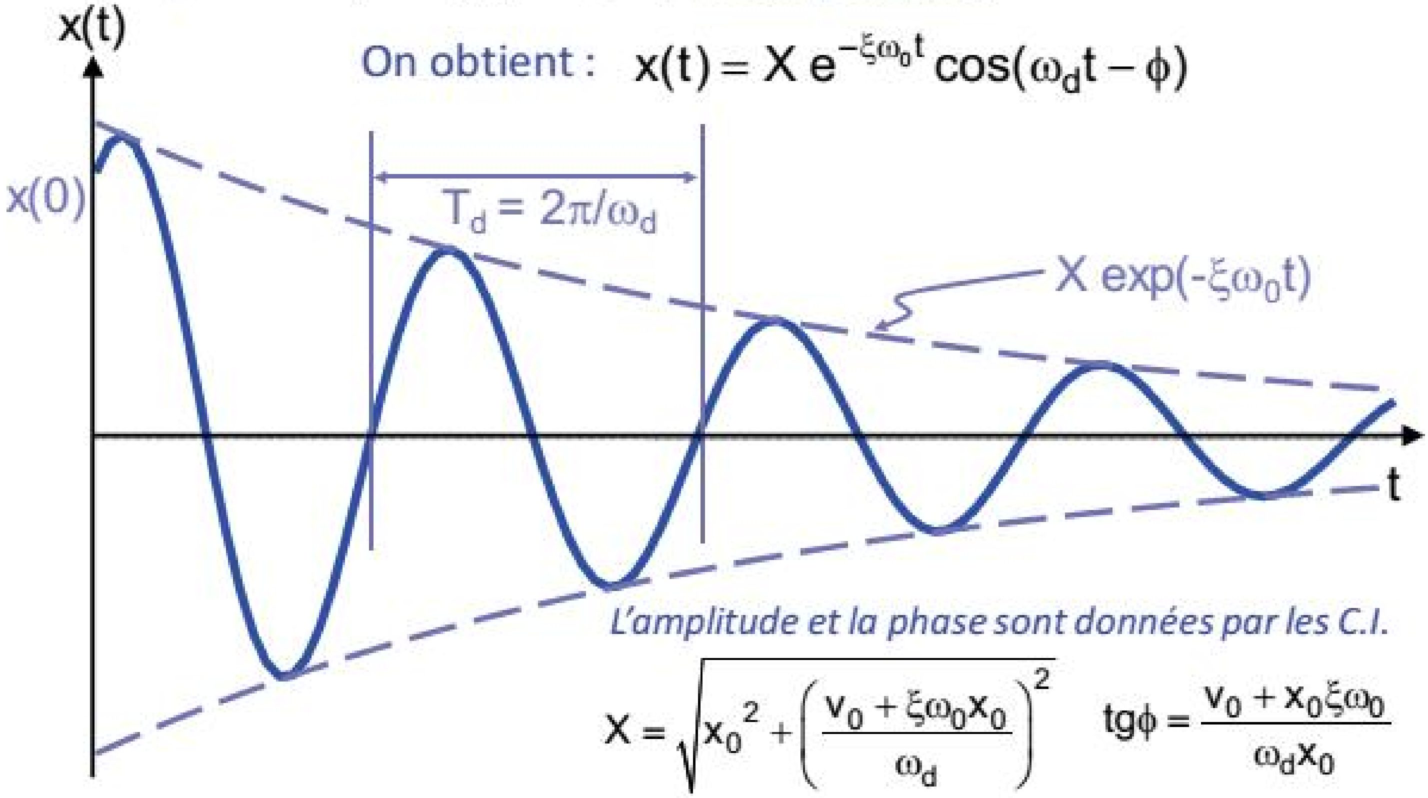
On obtient : $x(t) = \left[x_0(1 + \omega_0 t) + v_0\ t\right] e^{-\omega_0 t}$



Vibrations libres avec amortissement sous - critique : $\xi < 1$

On pose : $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ *Pseudo pulsation*

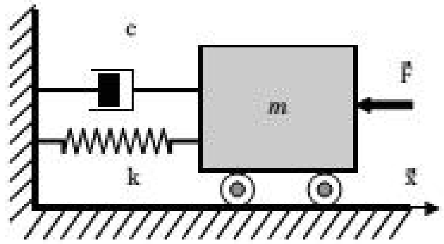
On obtient : $x(t) = X\, e^{-\xi\omega_0 t}\cos(\omega_d t - \phi)$



L'amplitude et la phase sont données par les C.I.

$$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \xi\omega_0 x_0}{\omega_d}\right)^2} \qquad \operatorname{tg}\phi = \frac{v_0 + x_0\xi\omega_0}{\omega_d x_0}$$

Vibrations forcées harmoniques



Rappel de l'équation du mouvement :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

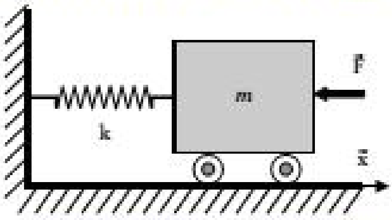
Excitation harmonique (notation complexe) :

$$F(t) = F_0\cos(\Omega t) = F_0\,\mathrm{Re}\left[e^{j\Omega t}\right]$$

Réponse totale = Réponse transitoire $x_t(t)$ + Réponse permanente $x_p(t)$

- $x_t(t)$ = Réponse en régime libre (voir + haut)
- $x_p(t)$ = Mouvement après disparition du transitoire
  - Harmonique de même pulsation Ω que l'excitation
  - Amplitude X et Déphasage ψ à déterminer

Vibrations forcées *harmoniques* - systèmes *non amortis*



L 'équation du mouvement est :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos(\Omega t) \quad (1)$$

La réponse transitoire est la solution générale (celle en V.L.) :

$$x_t(t) = X_t \cos(\omega_0 t - \phi_t)$$

La réponse permanente est la solution particulière de la forme :

$$x_p(t) = X_p \cos(\Omega t)$$

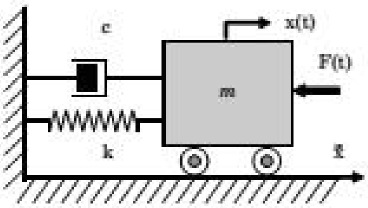
En la substituant dans (1) on a l'amplitude : $X_p = \dfrac{F_0}{k - m\Omega^2} = \dfrac{F_0/m}{{\omega_0}^2 - \Omega^2}$

Le mouvement forcé permanent s'écrit : $\boxed{x_p(t) = \dfrac{F_0/m}{{\omega_0}^2 - \Omega^2}\cos(\Omega t)}$

et la solution complète (transitoire + permanent) : $x(t) = x_t(t) + x_p(t)$

Remarque : Sans amortissement, l'excitation et la réponse sont en phase .

Vibrations forcées *harmoniques* - systèmes *sous amortis*



$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}(t) + 2\xi\omega_0\dot{x}(t) + {\omega_0}^2 x(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t) \quad (2)$$

La réponse transitoire (celle en V.L.) : $x_t(t) = X_t\, e^{-\xi\omega_0 t}\cos(\omega_d t - \phi_t)$

La solution particulière est de la forme : $x_p(t) = X_p \cos(\Omega t - \phi_p)$

Par substitution dans (2) on obtient le mouvement forcé permanent :

$$\boxed{X_p(\Omega) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \Omega^2)^2 + 4(\xi\Omega\omega_0)^2}}} \qquad \boxed{\phi_p(\Omega) = \mathrm{Arctg}\left(\frac{2\xi\omega_0\Omega}{{\omega_0}^2 - \Omega^2}\right)}$$

La solution complète : $x(t) = x_t(t) + x_p(t)$

$$x(t) = \underbrace{[X_t \cos(\omega_d t - \phi_t)]e^{-\xi\omega_0 t}}_{\text{Réponse transitoire}} + \underbrace{X_p \cos(\Omega t - \phi_p)}_{\text{Réponse permanente}}$$

Vibrations forcées *harmoniques* – Réponse permanente

On a : $x_p(t) = X_{(\Omega)} \cos\left(\Omega t - \Phi_{(\Omega)}\right)$ avec

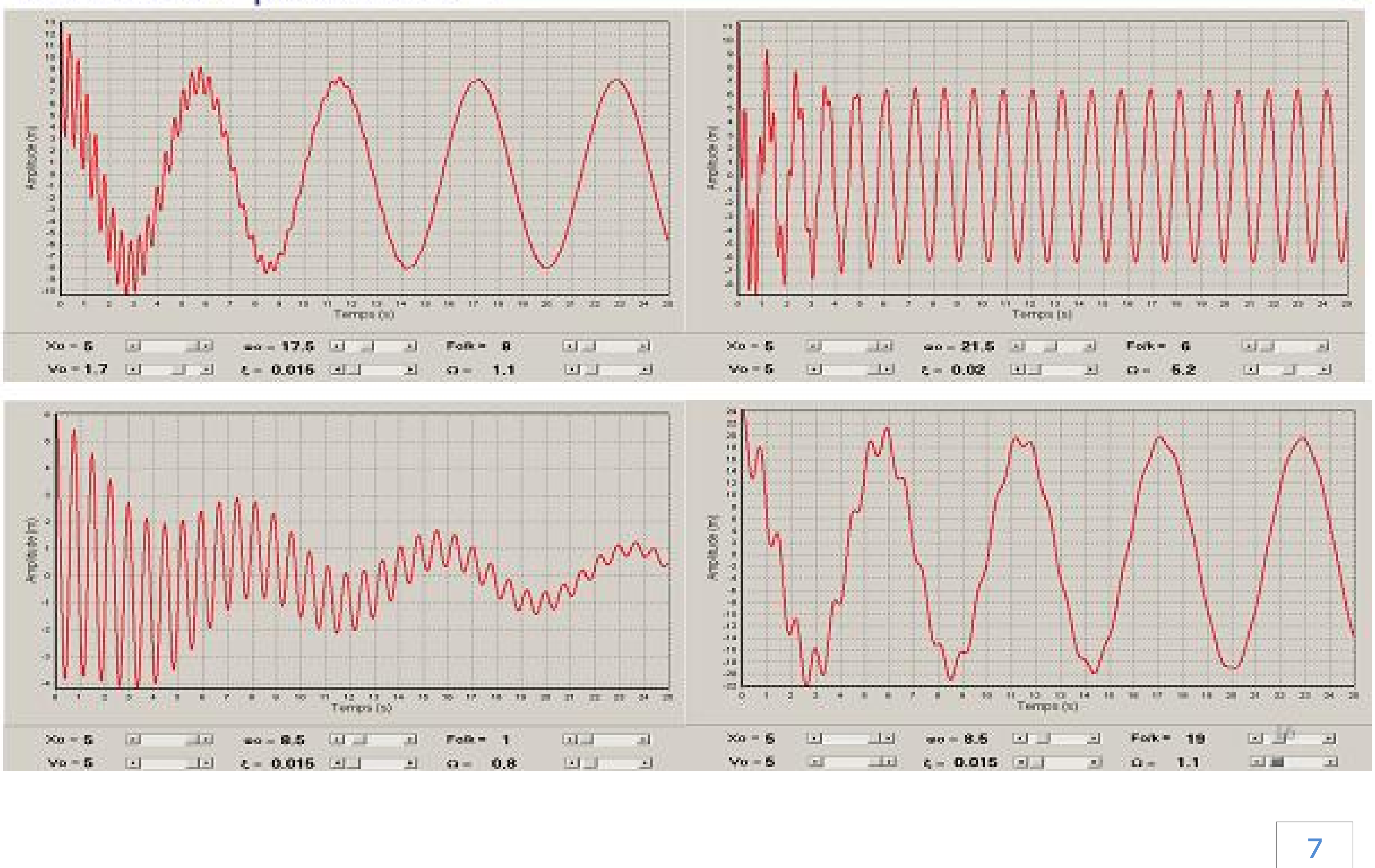
$$\boxed{X(\Omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\Omega)^2}}}$$

$$\boxed{\Phi(\Omega) = \mathrm{Arctg}\left[\frac{2\xi\omega_0\Omega}{\omega_0{}^2 - \Omega^2}\right]}$$

- L'amplitude et la phase de $x_p(t)$ dépendent de la pulsation Ω de l'excitation
- Résonance : l'amplification de la force appliquée est maximum lorsque sa fréquence tend vers la fréquence propre : $\Omega \rightarrow \omega_0 \Rightarrow X(\Omega) \rightarrow$ maximum
- A la résonance la phase varie de π

Exemples de réponses temporelles transitoire + permanent

$$\boxed{x(t) = X_t \cos(\omega_d t - \phi_t) e^{-\xi\omega_0 t} + \frac{F_0}{m} \frac{\cos(\Omega t - \phi_p)}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \Omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\Omega)^2}}}$$



Excitation T périodique - Réponse

- Lorsque l'excitation F(t) est périodique, on montre (Dvpt en série de Fourier) qu'elle peut s'écrire comme une somme de fonctions harmoniques $F_n(t)$
- Si T est la période de F(t) et $\Omega = 2\pi/T$, les harmoniques F_n ont pour pulsation $n\Omega$
- Chaque harmonique produit sa propre réponse $x_n(t)$:

$$F_n(t) = F_n \cos(n\Omega t - \psi_n) \Longrightarrow x_n(t) = X_n \cos(n\Omega t - \psi_n - \phi_n)$$

Avec $$X_n(n\Omega) = \frac{F_n/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - (n\Omega)^2\right)^2 + 4\xi^2(\omega_0 n\Omega)^2}}$$

et $$tg\phi_n(n\Omega) = \frac{2\xi n\Omega\omega_0}{\omega_0^2 - (n\Omega)^2}$$

Finalement le principe de superposition donne la réponse totale:

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \cos(n\Omega t - \psi_n - \phi_n)}$$

Réponse à une excitation qcq : Méthode par Laplace (1/3)

Transformée de Laplace

$$f(t) \leftrightarrow F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

Propriétés utiles :

Linéarité

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \leftrightarrow \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s)$$

Transformée des dérivées

$$\dot{f}(t) \leftrightarrow sF(s) - f(0)$$

$$\ddot{f}(t) \leftrightarrow s^2 F(s) - s f(0) - \dot{f}(0)$$

Propriétés de décalage

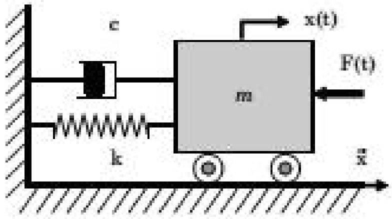
$$f(t - t_0) \leftrightarrow F(s)e^{-st_0}$$

$$e^{-ts_0} f(t) \leftrightarrow F(s + s_0)$$

Transformées usuelles

$\delta(t)$	$\leftrightarrow$	1
$t^n e^{s_0 t}$	$\leftrightarrow$	$\dfrac{n!}{(s-s_0)^{n+1}}$
$\sin(s_0 t)$	$\leftrightarrow$	$\dfrac{s_0}{s^2+s_0^2}$
$\cos(s_0 t)$	$\leftrightarrow$	$\dfrac{s}{s^2+s_0^2}$
$\sinh(s_0 t)$	$\leftrightarrow$	$\dfrac{s_0}{s^2-s_0^2}$
$\cosh(s_0 t)$	$\leftrightarrow$	$\dfrac{s}{s^2-s_0^2}$

Réponse à une excitation qcq : Méthode par Laplace (2/3)



Lorsque F(t) est une force qcq, non exprimable en combinaison linéaire de fonctions harmoniques, il peut être plus simple de passer dans l'espace complexe de Laplace où les calculs sont plus directs.

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=F(t)$$

On commence par transformer chaque terme de l'équation du mouvement

$$F(t)\leftrightarrow F(s);$$

$$x(t)\leftrightarrow X(s);\quad \dot{x}(t)\leftrightarrow sX(s)-x_0;\quad \ddot{x}(t)\leftrightarrow s^2X(s)-sx_0-v_0$$

L'équation du mouvement s'écrit alors dans le domaine complexe

$$\left(ms^2+cs+k\right)X(s)-(ms+c)x_0-mv_0=F(s)$$

$$\Leftrightarrow\left(s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0{}^2\right)X(s)-(s+2\xi\omega_0)x_0-v_0=F(s)/m$$

Réponse à une excitation qcq : Méthode par Laplace (3/3)

On en déduit la transformée de la réponse cherchée :

$$X(s)=\underbrace{\frac{F(s)}{m}\frac{1}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0{}^2}}_{\text{Réponse permanente } X_p(s)}+\underbrace{\frac{(s+2\xi\omega_0)x_0+v_0}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0{}^2}}_{\text{Réponse transitoire } X_t(s)}$$

Soient s_1 et s_2 les racines du dénominateur : $s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0{}^2$

$$X(s)=\underbrace{\frac{F(s)}{m}\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}}_{\text{Réponse permanente } X_p(s)}+\underbrace{\frac{(s+2\xi\omega_0)x_0+v_0}{(s-s_1)(s-s_2)}}_{\text{Réponse transitoire } X_t(s)}$$

Les deux termes se décomposent facilement en éléments simples.

On en déduit l'expression de la réponse totale x(t) par transformation inverse (cf. formulaire) $\quad X(s)\leftrightarrow x(t)$

Exemple : Réponse impulsionnelle

On applique cette méthode au cas d'une force impulsive : $F(t) = Fo\,\delta(t)$

Pour le cas ou le système est immobile initialement, on obtient :

$$X(s) = \frac{F_o}{m}\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} \quad \text{avec} \quad s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2-1}$$

Et on arrive à :

$$\omega_d = \omega_o\sqrt{1-\xi^2}$$

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{F_o}{m\xi\omega_o}e^{-\xi\omega_o t}\sin(\omega_d t) & \text{si } \xi < 1 \\ \dfrac{F_o}{m}.t.e^{-\omega_o t} & \text{si } \xi = 1 \\ \dfrac{F_o}{m\alpha}e^{-\xi\omega_o t}\,\mathrm{sh}(\alpha t) & \text{si } \xi > 1 \end{cases}$$

$$\alpha = \omega_o\sqrt{\xi^2-1}$$