Chapitre 3

Fonctions intégrables

Dans tout ce chapitre, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ désigne un espace mesuré. Dans la suite on étudier l'intégrale de Lebesgue sur X par rapport à la mesure μ.

3.1 Intégrale d'une fonction étagée positive.

On note $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des fonctions étagées positives mesurables de $(X, \mathcal{M})$ dans $\mathbb{R}_+$ muni de la tribu borélienne.

Définition 3.1.1 *Soit $f \in \mathcal{E}_+$, de décomposition canonique $f = \sum_{i=1}^{n} a_i . \chi_{A_i}$. On pose*

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i . \mu(A_i) \tag{3.1}$$

Cette quantité s'appelle intégrale sur X de la fonction f par rapport à la mesure μ.

L'intégrale $\int f d\mu$ est un élément de $[0, +\infty]$. Bien que les a_i soient tous réels elle peut très bien valoir $+\infty$, si pour un $a_i > 0$, le correspondant $\mu(_{A_i})$ vaut $+\infty$. Rappelons la convention $0 \times (+\infty) := 0$ qui est bien utile ici lorsque $\mu\left(f^{-1}(\{0\})\right) = +\infty$.

Exemples 3.1.2 *1) Si f est une fonction constante, alors sa décomposition canonique s'écrit $f = a\chi_X$, avec $a \geq 0$. La formule (3.1) nous donne alors*

$$\int a d\mu = a.\mu(X).$$

2) Si $f = a\chi_A$ avec $a > 0$, $A \in \mathcal{M}$ et $A \neq X$, sa décomposition canonique est $f = a\chi_A + 0\chi_{A^c}$ d'où

$$\int a.\chi_A d\mu = a.\mu(A) + 0.\mu(A^c) = a.\mu(A).$$

Remarque 3.1.3 *Le cas particulier $a = 1$, dans 2) de l'exemple précédent est d'une grande utilité car il permet d'exprimer la mesure d'un ensemble sous la forme d'une intégrale*

$$\mu(A) = \int \chi_A d\mu, \text{ pour tout } A \in \mathcal{M} \tag{3.2}$$

Le lemme suivant sera utile pour prouver quelques propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$.

Lemme 3.1.4 *[5]*
L'intégrale d'une fonction étagée positive f ne dépend pas de la décomposition choisie pour f. C'est-à-dire, si $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m \in [0, +\infty[$ et $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_m \in \mathcal{M}$ avec

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i.\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j.\chi_{B_j}.$$

Alors on a

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i.\mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j.\mu(B_j)$$

Proposition 3.1.5 *L'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ est homogène, additive et croissante, c'est-à-dire pour tout $f, g \in \mathcal{E}_+$ et $\alpha > 0$,*
i) $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$
ii) $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$
iii) Si $f \leq g$ *alors* $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Démonstration. i) Si $f = \sum_{i=1}^{n} a_i.\chi_{A_i}$ et $\alpha > 0$, alors $\alpha f = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_i.\chi_{A_i}$ et l'homogénéité est évidente. Dans ce cas particulier, il convient de remarquer que si $\int f d\mu = +\infty$, on a encore $0 \times \int f d\mu = 0 = \int (0 \times f) d\mu$ grâce à la convention $0 \times (+\infty) = 0$.
ii) Soit $f = \sum_{i=1}^{n} a_i.\chi_{A_i}$ et $g = \sum_{j=1}^{m} b_j.\chi_{B_j}$, alors $f + g = \sum_{i=1}^{n} a_i.\chi_{A_i} + \sum_{j=1}^{m} b_j.\chi_{B_j}$ et donc

$$\int (f+g) d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i.\mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j.\mu(B_j) = \int f d\mu + \int g d\mu$$

iii) Soit $f, g \in \mathcal{E}_+$ avec $f \leq g$ alors $g - f \in \mathcal{E}_+$ et $g = f + (g - f)$. Par ii) on a

$$\int g d\mu = \int f d\mu + \int (g-f) d\mu \geq \int f d\mu,$$

puisque $\int (g-f) d\mu \in [0, +\infty]$. ■

3.2 Intégrale d'une fonction mesurable positive, convergence monotone et lemme de Fatou.

Nous notons $\mathcal{L}_+^0$ l'ensemble des fonctions $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurables positives.

Définition 3.2.1 *Pour $f \in \mathcal{L}_+^0$ on appelle intégrale sur X de f par rapport 'à μ l'élément de $[0, +\infty]$ noté $\int f d\mu$ et défini par*

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int s d\mu : s \in \mathcal{E}_+,\ s \leq f \right\}. \tag{3.3}$$

Pour $A \in \mathcal{M}$ on définit aussi

$$\int_A f d\mu := \int f \chi_A d\mu \tag{3.4}$$

Remarque 3.2.2 *Si $f \in \mathcal{E}_+$ les deux définitions de l'intégrale de f par (3.1) et par (3.3) coïncident. En effet, notons $\int^{etag} f d\mu$ l'intégrale de f au sens de (3.1) et $\int^{mes} f d\mu$ celle au sens de (3.3). Pour toute $s \in \mathcal{E}_+$ telle que $s \leq f$, on a l'inégalité $\int^{etag} s d\mu \leq \int^{etag} f d\mu$, en vertu du a Proposition 3.1.5. Par conséquent dans (3.3) la borne supérieure est atteinte pour $s = f$, ce qui implique $\int^{etag} f d\mu = \int^{mes} f d\mu$.*

Cette intégrale possède la propriété de la croissance.

Proposition 3.2.3 *Pour toutes $f, g \in \mathcal{L}_+^0$, si $f \leq g$ alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.*

Démonstration. Par l'inclusion

$$\{s \in \mathcal{E}_+,\ s \leq f\} \subset \{s \in \mathcal{E}_+,\ s \leq g\}$$

et par (3.3) on trouve $\int f d\mu \leq \int g d\mu$. ■

Nous donnons maintenant le premier des grands théorèmes d'interversion limite-intégrale ($\lim \int = \int \lim$).

Théorème 3.2.4 *(de la convergence monotone ou de Beppo-Levi)*
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite croissante dans* $\mathcal{L}^0_+$ *et soit* $f = \lim\limits_{n\longrightarrow +\infty} f_n = \sup\limits_{n\geq 1} f_n$. *Alors*

$$\int f d\mu = \lim_{n\longrightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \sup_{n\geq 1} \int f_n d\mu$$

Démonstration. L'appartenance de f à $\mathcal{L}^0_+$ a déjà été vue (Proposition 2.3.10). Par la proposition précédente (croissance de l'intégrale), la suite $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\geq 1}$ est croissante dans $[0, +\infty]$, donc convergente vers $L \in [0, +\infty]$

$$L := \lim_{n\longrightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \sup_{n\geq 1} \int f_n d\mu$$

Pour tout $n \geq 1$ on a $f_n \leq f$ et par la croissance de l'intégrale on obtient $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$, puis en prenant le supremum sur $n \geq 1$,

$$L \leq \int f d\mu.$$

Par ailleurs, soit $s \in \mathcal{E}_+$ tel que $s \leq f$ et soit $\alpha \in]0, 1[$. On définit

$$A_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha.s(x)\} \tag{3.5}$$

Comme $A_n = (f_n - \alpha.s)^{-1}([0, +\infty])$ et la fonction $x \longrightarrow f_n(x) - \alpha.s(x)$ est mesurable alors $A_n \in \mathcal{M}$ pour tout $n \geq 1$. D'autre part, la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est croissante car si $x \in A_n$, alors $\alpha.s(x) \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ par croissance de $(f_n)_{n\geq 1}$, donc $x \in A_{n+1}$ et aussi on a $X = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$. Grâce a la définition de A_n on peut écrire une inégalité entre des fonctions mesurables positives,

$$\alpha.s.\chi_{A_n} \leq f_n \chi_{A_n} \leq f_n.$$

On en déduit par croissance de l'intégrale et (3.4),

$$\int_{A_n} (\alpha.s) d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu \tag{3.6}$$

De plus, si $s = \sum_{i=1}^{m} b_i.\chi_{B_i}$, alors $s.\chi_{A_n} = \sum_{i=1}^{m} b_i.\chi_{(B_i \cap A_n)}$ donc on a

$$\int_{A_n} s d\mu = \sum_{i=1}^{m} b_i.\mu(B_i \cap A_n). \tag{3.7}$$

Pour tout $i = 1, ..., m$, la suite $(B_i \cap A_n)_{n \geq 1}$ est croissante et

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_i \cap A_n = B_i \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right) = B_i \cap X = B_i$$

Dans (3.7), on peut passer à la limite quand n tend vers $+\infty$, en appliquant la continuité croissante de la mesure μ (voir Théorème 1.4.1),

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{A_n} s d\mu = \sum_{i=1}^{m} b_i. \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(B_i \cap A_n) \right) = \sum_{i=1}^{m} b_i \mu(B_i) = \int s d\mu.$$

Faisant tendre n vers l'infini dans (3.6) on obtient ainsi, pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et tout $s \in \mathcal{E}_+$ avec $s \leq f$ on a

$$\alpha \int s d\mu \leq L. \tag{3.8}$$

Dans (3.8), on prend d'abord le sup sur $\alpha \in]0, 1[$, puis le sup sur $\{s \in \mathcal{E}_+, \ s \leq f\}$ et on trouve

$$\int f d\mu \leq L.$$

■

Corollaire 3.2.5 *Si $(f_n)_{n \geq 1}$ est décroissante dans $\mathcal{L}^0_+$ et si $\int f_0 d\mu < \infty$ alors on a*

$$\int f d\mu = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int f_n d\mu,$$

où $f = \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n$.

Démonstration. En appliquant le théorème de Beppo-Levi à la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ telle que $g_n = f_0 - f_n$. ■

Corollaire 3.2.6 *(homogénéité et additivité de l'intégrale dans $\mathcal{L}^0_+$)*
Pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{L}^0_+$ et toute constante $\alpha \in [0, +\infty[$,
i) $\displaystyle\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$
ii) $\displaystyle\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$

Démonstration. i) Est une conséquence immédiate de la Définition 3.2.1 et de la Proposition 3.1.5 i)
ii) Il existent deux suites croissantes $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(g_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{E}_+$ telles que $f_n \longrightarrow f$ et $g_n \longrightarrow g$ simplement. La suite $(f_n + g_n)_{n\geq 1}$ est croissante dans $\mathcal{E}_+$ et converge simplement vers $f+g$. Or, pour tout $n \geq 1$,

$$\int (f_n + g_n) d\mu = \int f_n d\mu + \int g_n d\mu.$$

On obtient donc le résultat en passant à la limite grâce au théorème de Beppo-Levi. ■

Corollaire 3.2.7 *(Interversion série-intégrale dans $\mathcal{L}^0_+$)*
Soit $(f_k)_{k\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables positives. La fonction $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ est aussi dans $\mathcal{L}^0_+$ et

$$\int \left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \right) d\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int f_k d\mu \right) \qquad \textit{(L'égalité dans } [0, +\infty]) \tag{3.9}$$

Démonstration. Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k$. Les applications $x \longmapsto S_n(x)$ sont dans $\mathcal{L}^0_+$ comme somme d'un nombre fini des applications dans $\mathcal{L}^0_+$. La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge et croissante (dans $[0, +\infty]$) vers S. Pour tout $n \geq 1$ on a

$$\int S_n d\mu = \sum_{k=0}^{n} \int f_k d\mu.$$

En prenant la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ et en utilisant le théorème de Beppo-Levi, on obtient le résultat. ■

Corollaire 3.2.8 *(Lemme de Fatou)*
Si $(f_n)_{n\geq 1}$ *est une suite dans* $\mathcal{L}_+^0$, *alors*

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty}\int f_n d\mu \geq \int \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\mu. \tag{3.10}$$

Démonstration. Posons $g := \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n$. Par définition de la limite inférieure,

$$g = \sup_{n\geq 1}\ \inf_{k\geq n} f_k.$$

Les fonctions $g_n := \inf_{k\geq n} f_k$ appartiennent à $\mathcal{L}_+^0$ (voir Proposition 2.3.10) et la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ converge en croissant vers g. Par le théorème de Beppo-Levi, on a donc

$$\int g_n d\mu \longrightarrow \int g d\mu = \int \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\mu \tag{3.11}$$

D'autre part, clairement pour tout $n \geq 1$, on a $g_n \leq f_n$ et donc

$$\int g_n d\mu \leq \int f_n d\mu, \text{ pour tout } n \geq 1. \tag{3.12}$$

Nous ne savons pas si le second membre de (3.12) a une limite quand n tend vers l'infini, mais par contre sa limite inférieure existe toujours. On peut ainsi passer à la limite inférieure dans (3.12), ce qui donne par conservation de l'inégalité large,

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty}\int g_n d\mu \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty}\int f_n d\mu \tag{3.13}$$

Par (3.11), on sait que la limite inférieure du premier membre de (3.13) est en fait une limite et vaut

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty}\int g_n d\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int g_n d\mu = \int \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\mu,$$

d'ou la conclusion. ■

Lemme 3.2.9 *[12]*
Soit $f \in \mathcal{L}_+^0$ *et* $A \in \mathcal{M}$ *avec* $\mu(A) = 0$. *Alors* $\int_A f d\mu = 0$

Proposition 3.2.10 *(Quelques propriétés de l'intégrale)*

Soit $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive.

1) (Inégalité de Tchebychev). Pour tout nombre réel $a > 0$ on a

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int f d\mu \tag{3.14}$$

2) $\int f d\mu = 0$ si et seulement si $f = 0$ presque partout.

3) Si $\int f d\mu < \infty$ alors $f < \infty$ presque partout.

4) Si $f, g \in \mathcal{L}^0_+$ telles que $f = g$ presque partout. Alors $\int f d\mu = \int g d\mu$.

Démonstration. 1) Considérons l'ensemble

$$A = \{x \in X : f(x) \geq a\} = f^{-1}([a, +\infty]) \in \mathcal{M}.$$

On remarque que la fonction étagée $a.\chi_A$ vérifie l'inégalité $\varphi = a.\chi_A \leq f$, en effet, si $x \in A$ on a $f(x) \geq a = \varphi(x)$ et si $x \notin A$ on a $\varphi(x) = 0 \leq f(x)$. Il résulte que

$$a.\mu(A) = \int \varphi d\mu \leq \int f d\mu.$$

2) Si $f = 0$ presque partout, alors $\mu(A) = 0$ avec $A = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ (donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in A^c$). Par l'additivité de l'intégrale et le Lemme 3.2.9, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int f d\mu &= \int f\chi_X d\mu = \int f(\chi_A + \chi_{A^c}) d\mu = \int f\chi_A d\mu + \int f\chi_{A^c} d\mu \\ &= \int_A f d\mu + \int_{A^c} f d\mu = 0 + \int_{A^c} 0 d\mu = 0. \end{aligned}$$

Inversement, supposons que $\int f d\mu = 0$. Pour tout $n \geq 1$ on pose

$$A_n = \left\{ x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Alors $A_n \in \mathcal{M}$ pour tout $n \geq 1$ car $A_n = f^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}, +\infty\right]\right)$, la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est croissante et on a

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \{x \in X : f(x) > 0\} = \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Par ailleurs, par 1), pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mu(A_n) \leq n \int f d\mu = 0.$$

Ainsi, par la continuité croissante (voir Théorème 1.4.1), on en déduit que

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(A_n) = 0,$$

d'où le résultat.

3) Pour tout $n \geq 1$,

$$\{x \in X : f(x) = +\infty\} \subset \{x \in X : f(x) \geq n\}.$$

Si l'intégrale de f est finie, on applique l'inégalité de Tchebychev avec $a = n \geq 1$ pour obtenir

$$\mu\{x \in X : f(x) = +\infty\} \leq \mu\{x \in X : f(x) \geq n\} \leq \frac{1}{n}\int f d\mu \longrightarrow 0.$$

Donc $\mu\{x \in X : f(x) = +\infty\} = 0$.

4) Soit $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$. On a $\mu(A) = 0$. Il en résulte que

$$f\chi_A = 0 \text{ presque partout } \quad \text{et} \quad g\chi_A = 0 \text{ presque partout.}$$

Comme $f\chi_{A^c} = g\chi_{A^c}$, on obtient en appliquant le Lemme 3.2.9,

$$\begin{aligned}
\int f d\mu &= \int f\chi_X d\mu = \int f(\chi_A + \chi_{A^c}) d\mu = \int f\chi_A d\mu + \int f\chi_{A^c} d\mu \\
&= \int f\chi_{A^c} d\mu = \int g\chi_{A^c} d\mu = \int g\chi_A d\mu + \int g\chi_{A^c} d\mu \\
&= \int g(\chi_A + \chi_{A^c}) d\mu = \int g d\mu.
\end{aligned}$$

■

3.3 Application : Mesures à densité par rapport à une autre mesure

A partir d'une mesure et d'une fonction mesurable positive, on peut définir une autre mesure de la manière suivante.

Théorème 3.3.1 *Soient* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ *une fonction numérique mesurable positive. Définissons la fonction d'ensembles* $\nu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ *par*

$$\nu(A) := \int_A f d\mu, \ A \in \mathcal{M} \tag{3.15}$$

Alors, ν *est une mesure sur* $(X, \mathcal{M})$*. On dit qu'elle est de densité* f *par rapport à* μ*.*

Démonstration. Calculons $\nu(\phi)$ en appliquant la définition de ν,

$$\nu(\phi) = \int_\phi f d\mu = \int f \chi_\phi d\mu = \int 0 d\mu = 0.$$

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathcal{M}$, à termes deux à deux disjoints et A sa réunion. D'après Proposition 1.1.6 on a

$$\chi_A = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{A_n}.$$

Par le Corollaire 3.2.7 on obtient

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) &= \int f\chi_A d\mu = \int \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f\chi_{A_n}\right) d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int f\chi_{A_n} d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(A_n). \end{aligned}$$

■

Exercice corrigé 3.3.2 *(Intégration par rapport à la mesure de comptage et de Dirac)*
1) Considérons $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *muni de la mesure de comptage* μ *et la fonction mesurable* $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty]$*. Calculer l'intégrale* $\int f d\mu$*.*
2) Considérons l'espace mesurable $(X, \mathcal{P}(X))$ *muni de la mesure de Dirac* δ_a *en point* $a \in X$ *et la fonction mesurable* $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$*. Calculer l'intégrale* $\int f d\delta_a$*.*

Démonstration. 1) Puisque $\mathbb{N} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{n\}$, si ν est la mesure de densité f par rapport à μ, on a

$$\int f d\mu = \nu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{n\}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\{n\}} f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n).$$

2) Puisque $\delta_a(\{a\}) = 1$ et $\delta_a(\{a\}^c) = 0$, on a

$$\int f d\delta_a = \int_{\{a\}\cup\{a\}^c} f d\delta_a = \int_{\{a\}} f d\delta_a + \int_{\{a\}^c} f d\delta_a = f(a) \int_{\{a\}} d\delta_a + 0 = f(a).$$

Car $\delta_a(\{a\}^c) = 0$ implique que $\int_{\{a\}^c} f d\delta_a = 0$. ■

Proposition 3.3.3 *(L'intégration par rapport à une mesure à densité)*
Soit ν la mesure de densité f par rapport à μ sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{M})$. Alors pour tout $g \in \mathcal{L}_+^0$ on a

$$\int g d\nu = \int f g d\mu \tag{3.16}$$

Démonstration. On commence par vérifier (3.16) pour les fonctions indicatrices $g = \chi_A$ avec $A \in \mathcal{M}$. En effet, par (3.2) et (3.4) on a

$$\int \chi_A d\nu = \nu(A) = \int_A f d\mu = \int f \chi_A d\mu.$$

Soit maintenant $g \in \mathcal{E}_+$ une fonction étagée positive mesurable de décomposition

$$g = \sum_{i=1}^{n} a_i . \chi_{A_i}$$

En utilisant successivement la définition de $\nu(A_i)$ on en déduit

$$\int g d\nu = \sum_{i=1}^{n} a_i \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \int \chi_{A_i} f d\mu = \int \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} f d\mu = \int f g d\mu$$

Soit $g \in \mathcal{L}_+^0$ quelconque. Par la Proposition 2.3.11, il existe une suite $(g_n)_n$ croissante dans $\mathcal{E}_+$, convergeant vers g. Le produit $f g_n$ est mesurable positif. La suite $(f g_n)_n$ est croissante car f est positive et $(g_n)_n$ est croissante et aussi $(f g_n)_n$ convergeant vers $f g$.

L'application du théorème de Beppo-Levi relativement à ν pour $(g_n)_n$ et à μ pour la suite $(fg_n)_n$ nous donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int g_n d\nu = \int g d\nu \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int fg_n d\mu = \int fg d\mu. \tag{3.17}$$

Comme $g_n \in \mathcal{E}_+$, elle vérifie (3.16),

$$\int g_n d\nu = \int fg_n d\mu, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{3.18}$$

Les convergences (3.17) permettent de passer à la limite dans (3.18) pour conclure que g vérifie (3.16). ■

Proposition 3.3.4 *[17]*
Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f, g \in \mathcal{L}_+^0$ deux fonctions mesurables positives. Si ν est la mesure de densité f par rapport à' μ, alors toute autre densité g de ν est égale à f μ-presque partout dans le cas ou ν est finie. Autrement dit, si

$$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu, \text{ pour tout } A \in \mathcal{M} \quad \text{et} \quad \int f d\mu < +\infty.$$

Alors, $f = g$ μ-presque partout.

Exercice corrigé 3.3.5 *Soit la suite des fonctions $f_n : (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par*

$$f_n(x) = \chi_{[0,n[}(x) \frac{1}{E(x)!},$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.
1) Donner la limite simple de la suite $(f_n)_n$.
2) Calculer $\int \frac{1}{E(x)!} d\lambda(x)$.

Démonstration. 1) Puisque la suite $([0, n[)_{n\geq 1}$ est croissante et $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [0, n[= \mathbb{R}_+$, par (1.2) on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \chi_{[0,n[}(x) = \chi_{\bigcup_{n=1}^{+\infty}[0,n[}(x) = \chi_{\mathbb{R}_+}(x) = 1, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+.$$

Et donc

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{1}{E(x)!}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

2) La suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est croissante pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Les fonctions positives $x \mapsto f_n(x)$ sont décroissant alors mesurables. D'après le théorème de Beppo-Levi on a

$$\int \frac{1}{E(x)!} d\lambda(x) = \int \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) d\lambda(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int f_n(x) d\lambda(x)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\int f_n(x) d\lambda(x) &= \int_{[0,n[} \frac{1}{E(x)!} d\lambda(x) = \int_{\overset{n-1}{\underset{k=0}{\cup}}[k,k+1[} \frac{1}{E(x)!} d\lambda(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[k,k+1[} \frac{1}{E(x)!} d\lambda(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[k,k+1[} \frac{1}{k!} d\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \lambda\left([k, k+1[\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\int \frac{1}{E(x)!} d\lambda(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

■

3.4 Intégrale d'une fonction mesurable

Soit $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ ($f \in \mathcal{L}^0$) une fonction numérique mesurable et soient f_+ et f_- les parties positive et négative de f. Puisque $f = f_+ - f_-$ et $|f| = f_+ + f_-$ on a f est mesurable si et seulement si f_+ et f_- sont mesurables.

Définition 3.4.1 *On dit que f est intégrable par rapport à μ si*

$$\int |f|\, d\mu < \infty.$$

Dans ce cas, on pose

$$\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu \tag{3.19}$$

On notera $\mathcal{L}^1(\mu)$ l'espace des fonctions $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrables.

Remarque 3.4.2 *Si* $\int |f| \, d\mu < \infty$, *alors comme* $f_+ \leq |f|$ *et* $f_- \leq |f|$, *on a aussi*

$$\int f_+ d\mu < \infty \quad et \quad \int f_- d\mu < \infty$$

et la définition précédente fait sens.

Donnons un premier exemple de fonction intégrable.

Exercice corrigé 3.4.3 *Soit* $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction mesurable. On suppose qu'il existe une partie mesurable* $A \in \mathcal{M}$ *telle que*
i) $\mu(A) < \infty$ *et* $f(x) = 0$ *pour tout* $x \notin A$
ii) Il existe un réel $C > 0$ *tel que* $|f(x)| \leq C$ *pour tout* $x \in A$.
Montrer que $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Démonstration. De i) et ii) on déduit que

$$|f| \leq C\chi_A$$

D'où

$$\int |f| \, d\mu \leq \int C\chi_A d\mu = C\mu(A) < \infty$$

Comme f est mesurable, on en déduit que $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. ■

Proposition 3.4.4 *Soit* $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction numérique intégrable. Alors, l'ensemble*

$$A = \{x \in X : |f(x)| = +\infty\}$$

est négligeable.
En d'autres termes toute fonction intégrable $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *est égale presque partout à une fonction intégrable* $\widetilde{f} : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Pour tout $n \geq 1$ posons

$$A_n = \{x \in X : |f(x)| \geq n\} = |f|^{-1}([n, +\infty]) \in \mathcal{M}$$

Donc on a

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{et} \quad A_{n+1} \subset A_n, \text{ pour tout } n \geq 1$$

Et aussi la relation $\chi_{A_1} \leq |f|$ implique que

$$\mu(A_1) = \int \chi_A d\mu \leq \int |f| \, d\mu < +\infty.$$

Donc par la contonuité décroissante (Théorème 1.4.1) on obtient

$$\mu(A) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(A_n).$$

D'après l'inégalité de Tchebychev (3.14) pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mu(A_n) = \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq n\}) \leq \frac{1}{n} \int |f| \, d\mu = \frac{C}{n} \longrightarrow 0$$

On en déduit que

$$\mu(A) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(A_n) = 0.$$

■

Théorème 3.4.5 *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Alors $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et on a*

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu. \tag{3.20}$$

Démonstration. Si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, il résulte immédiatement de la Proposition 2.3.6 et la Définition 3.4.1 que $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Par ailleurs, on a

$$\left| \int f d\mu \right| = \left| \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu \right| \leq \int f_+ d\mu + \int f_- d\mu = \int (f_+ + f_-) \, d\mu,$$

et comme $|f| = f_+ + f_-$, le théorème est démontré. ■

Proposition 3.4.6 *(Quelques propriétés)*

Pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, on pose

$$\|f\|_1 = \int |f| \, d\mu.$$

1) Si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ avec $\|f\|_1 = 0$ alors $f = 0$ presque partout.

2) Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, alors $f + g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\alpha f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Et aussi l'application $f \longmapsto \int f d\mu$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}^1(\mu)$. De plus,

$$\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 \quad et \quad \|\alpha f\|_1 = \alpha \|f\|_1$$

3) Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $f \leq g$, alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$

4) Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $f = g$ presque partout, alors $\int f d\mu = \int g d\mu$.

Démonstration. 1) Pour tout $n \geq 1$, posons

$$A_n = \left\{ x \in X : |f(x)| \geq \frac{1}{n} \right\} = |f|^{-1} \left(\left[\frac{1}{n}, +\infty \right] \right) \in \mathcal{M}$$

La suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est croissante avec

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$$

La continuité croissante de la mesure μ (Théorème 1.4.1) donne

$$\mu(A) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(A_n).$$

D'après l'inégalité de Tchebychev, pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mu(A_n) \leq n \|f\|_1 = 0$$

Il s'ensuit que $\mu(A_n) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et par conséquent

$$\mu(A) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(A_n) = 0.$$

Ceci prouve que f est nulle presque partout.

2) $f + g$ est mesurable et $|f + g| \leq |f| + |g|$ donc on a

$$\int |f + g| \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu + \int |g| \, d\mu < \infty.$$

Ce qui implique que $f+g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.

En outre,

$$(f+g)_+ - (f+g)_- = f+g = f_+ - f_- + g_+ - g_-$$

Donc

$$(f+g)_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + (f+g)_-$$

Ainsi,

$$\int (f+g)_+ \, d\mu + \int f_- d\mu + \int g_- d\mu = \int f_+ d\mu + \int g_+ d\mu + \int (f+g)_- \, d\mu$$

Ce sont des intégrales finies donc

$$\begin{aligned}
\int (f+g) \, d\mu &= \int (f+g)_+ \, d\mu - \int (f+g)_- \, d\mu \\
&= \int f_+ d\mu + \int g_+ d\mu - \int f_- d\mu - \int g_- d\mu \\
&= \left(\int f_+ d\mu - \int f_- d\mu\right) + \left(g_+ d\mu - \int g_- d\mu\right) \\
&= \int f d\mu + \int g d\mu
\end{aligned}$$

D'autre part, si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors αf est mesurable et

$$\int |\alpha f| \, d\mu = |\alpha| \int |f| \, d\mu < \infty$$

et donc $\alpha f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\|\alpha f\|_1 = \alpha \|f\|_1$.

Si $\alpha \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\int \alpha f d\mu &= \int (\alpha f)_+ \, d\mu - \int (\alpha f)_- \, d\mu \\
&= \alpha \int f_+ d\mu - \alpha \int f_- d\mu \\
&= \alpha \int f d\mu
\end{aligned}$$

Si $\alpha \leq 0$,

$$\begin{aligned}
\int \alpha f d\mu &= \int (\alpha f)_+ \, d\mu - \int (\alpha f)_- \, d\mu \\
&= (-\alpha) \int f_- d\mu - (-\alpha) \int f_+ d\mu \\
&= \alpha \int f d\mu
\end{aligned}$$

3) Comme pour les fonctions mesurables positives (Proposition 3.2.3).

4) Si $f = g$ presque partout, alors $f_+ = g_+$ presque par tout et $f_- = g_-$ presque partout, d'où

$$\int f_+ d\mu = \int g_+ d\mu \quad \text{et} \quad \int f_- d\mu = \int g_- d\mu$$

en vertu du Proposition 3.2.10. Il s'ensuit que $\int f d\mu = \int g d\mu$. ■

3.5 L'espace $L^1(\mu)$ des fonctions intégrables.

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Considérons sur $\mathcal{L}^1(\mu)$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par

$$f\mathcal{R}g \Longleftrightarrow f = g \text{ presque partout.}$$

On note $L^1(\mu)$ le quotient de $\mathcal{L}^1(\mu)$ par cette relation d'équivalence. Un élément de $L^1(\mu)$ est donc une classe d'équivalence de fonctions dans $\mathcal{L}^1(\mu)$; la classe de $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ sera notée $\dot{f} \in L^1(\mu)$

$$L^1(\mu) = \mathcal{L}^1(\mu) \backslash \mathcal{R} = \left\{ \dot{f} : f \in \mathcal{L}^1(\mu) \right\}.$$

D'après la Proposition 3.4.4, toute élément de $L^1(\mu)$ est de la forme $\dot{f}$ où $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ est une fonction numérique finie partout, c'est à dire telle que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in X$. On vérifie immédiatement que $L^1(\mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni de lois usuelles de classes d'équivalence.

On sait ((4) dans Proposition 3.4.6) que si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ avec $\dot{f} = \dot{g}$, alors $\int f d\mu = \int g d\mu$. On peut donc définir l'intégrale de $\dot{f} \in L^1(\mu)$ en posant

$$\int \dot{f} d\mu = \int f d\mu \quad \text{et} \quad \left\| \dot{f} \right\|_1 = \int |f| \, d\mu$$

Proposition 3.5.1 *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Alors*

(i) L'application $\dot{f} \longmapsto \|f\|_1$ est une norme sur $L^1(\mu)$.

(ii) L'application $\Psi : \dot{f} \longmapsto \int f d\mu$ est une forme linéaire continue sur $L^1(\mu)$ de norme ≤ 1.

Démonstration. (i) On sait (Proposition 3.4.6) que l'application $f \longmapsto \|f\|_1$ est une semi norme sur $\mathcal{L}^1(\mu)$, alors $\dot{f} \longmapsto \|f\|_1$ est une semi norme sur $L^1(\mu)$. Maintenant, si $\left\|\dot{f}\right\|_1 = 0$, donc $f = 0$ presque partout et donc $\dot{f} = \dot{0}$.
(ii) Pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ on a

$$\left|\Psi(\dot{f})\right| = \left|\int f d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu = \left\|\dot{f}\right\|_1$$

Ce qui prouve que l'application linéaire Ψ est continue de norme ≤ 1. ∎

Remarque 3.5.2 *Dans la pratique, on commet l'abus de langage qui consiste à notés par la même lettre la fonction $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et sa classe $\dot{f} \in L^1(\mu)$. L'intérêt est que les éléments de $\mathcal{L}^1(\mu)$ sont des fonctions (non des classes d'équivalence), mais l'intérêt de $L^1(\mu)$ est d'être' un espace vectoriel normé.*

Théorème 3.5.3 *[3]*
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Alors
(i) $L^1(\mu)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_1$.
(ii) Les (classes de) fonctions étagées (simples) mesurables forment un sous espace vectoriel de $L^1(\mu)$ qui est dense dans $L^1(\mu)$ pour la norme $\|\cdot\|_1$.

Corollaire 3.5.4 *[3]*
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Si $(\dot{f}_n)_{n\geq 1}$ une suite de $L^1(\mu)$ qui converge vers $\dot{f} \in L^1(\mu)$ pour la norme $\|\cdot\|_1$. Alors, il existe une sous suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge presque partout vers f.

3.6 Théorème de convergence dominée dans $L^1(\mu)$.

Théorème 3.6.1 *Soit '$(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions numériques mesurables. On suppose que*

1) $f_n \longrightarrow f$ presque partout

2) Il existe une fonction fixe $g : X \longrightarrow [a, +\infty[$ intégrable telle que

$$|f_n| \leq g \text{ presque partout} \tag{3.21}$$

Alors, f est intégrable et $\|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.
En particulier, on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n d\mu = \int f d\mu \tag{3.22}$$

Démonstration. Tout d'abord, comme les fonctions $x \longmapsto f_n(x)$ sont mesurables et $(f_n)_n$ convergent presque par tout vers f, la fonction f est mesurable. Par (3.21) en on déduit que $|f(x)| \leq g(x)$ pour tout presque $x \in X$. Comme $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, on a

$$\int |f| \, d\mu \leq \int g d\mu < \infty,$$

et par conséquent f est intégrable.
Montrons que $\|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$. A cet effet, posons pour tout $k \geq 1$

$$F_k = \sup_{i,j \geq k} |f_i - f_j|$$

On définit ainsi une fonction mesurable positive, qui est intégrable car

$$|f_i - f_j| \leq |f_i| + |f_j| \leq 2g, \text{ pour tout } i, j$$

D'où $F_k \leq 2g$. Comme $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, alors $F_k \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pour tout $k \geq 1$. La suite $(F_k)_k$ est une suite décroissante des fonctions positives intégrables qui converge vers 0 presque partout. En effet, puisque $f_i - f_j \longrightarrow 0$ presque par tout quand $i, j \to +\infty$ on a $F_k \longrightarrow 0$ presque partout. D'après le théorème de Beppo-Levi, $\int F_k d\mu \longrightarrow 0$ quand $k \longrightarrow +\infty$.
De la relation

$$\int |f_i - f_j| \, d\mu \leq \int F_k d\mu \longrightarrow 0, \text{ quand } k \longrightarrow +\infty,$$

on déduit que la suite $(F_k)_{k \geq 1}$ est de Cauchy dans $L^1(\mu)$, donc converge vers une fonction $g \in L^1(\mu)$. D'après le Corollaire 3.5.4, il existe une sous suite $(F_{k_\ell})_\ell$ qui converge presque partout vers g et comme $f_k \longrightarrow f$ presque partout, on en déduit que $f = g$ presque partout. Mais alors, $\|f_n - f\|_1 = \|f_n - g\|_1 \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Pour le cas particulier, on a

$$\left| \int f_n d\mu - \int f d\mu \right| \leq \int |f_n - f| \, d\mu = \|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Ce qui achève la démonstration du théorème de convergence dominée de Lebesgue. ■

Corollaire 3.6.2 *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(\varphi_n)_n$ une suite de fonctions numériques intégrables. On suppose que la série de fonctions $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ converge presque partout et que les fonctions $\left|\sum_{k=1}^{n} \varphi_k\right|$ sont majorées par une fonction intégrable indépendante de n. Alors, $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ est intégrable et on a*

$$\int \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int \varphi_k d\mu \tag{3.23}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions intégrables

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k$$

qui converge presque partout vers $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ et qui sont majorées en module par une fonction intégrable fixe. ■

3.7 Comparaison de l'intégrale de Lebesgue avec l'intégrale de Riemann.

Proposition 3.7.1 *[11]Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Les conditions suivantes sont équivalentes* *(i) f est Riemann intégrable sur $[a,b]$.*

(ii) f est bornée sur $[a,b]$ et l'ensemble de ses points de discontinuité est négligeable pour la mesure de Lebesgue λ.

Théorème 3.7.2 *[11]*

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Riemann intégrable sur $[a,b]$. Alors f est Lebesgue intégrable sur $[a,b]$ et son intégrale de Lebesgue coïncide avec son intégrale de Riemann

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x)dx \tag{3.24}$$

Intégrales généralisées

Soit $I = (\alpha, \beta)$ un intervalle non compact de $\mathbb{R}$ (soit I n'est pas borné, soit I est borné et non fermé). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et supposons que la restriction de f à tout intervalle compact $[a,b]$ de I est Riemann intégrable.

Définition 3.7.3 *Lorsque la limite*

$$\lim_{a \overset{>}{\longrightarrow} \alpha, b \overset{<}{\longrightarrow} \beta} \int_a^b f(x)dx$$

existe, on dit que l'intégrale $\int_I f(x)dx$ est convergente et on pose

$$\int_I f(x)dx = \lim_{a \overset{>}{\longrightarrow} \alpha, b \overset{<}{\longrightarrow} \beta} \int_a^b f(x)dx$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_I f(x)dx$ est divergente.

Si $\int_I |f(x)|\, dx$ est convergente, on dit que l'intégrale $\int_I f(x)dx$ est absolument convergente.

Le théorème suivant fait la lien entre convergence absolue de l'intégrale $\int_I f(x)dx$ et Lebesgue intégrabilité de f sur I.

Théorème 3.7.4 *Soit I un intervalle non compact de $\mathbb{R}$. Pour toute fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dont la restriction à tout intervalle compact $[a,b] \subset I$ est Riemann intégrable, les conditions suivantes sont équivalentes* *(i) f est Lebesgue intégrable sur I.*

(ii) L'intégrale $\int_I |f(x)|\, dx$ est convergente.

Lorsque l'une de ces conditions est réalisée, on a

$$\int_I f d\lambda = \int_I f(x)dx \tag{3.25}$$

Démonstration. (i)$\Longrightarrow$(ii). Si f est Lebesgue intégrable sur I, alors $|f|$ est aussi Lebesgue intégrable sur I et pour tout intervalle $[a,b]$ inclus dans I

$$\int_a^b |f(x)|\, dx = \int_{[a,b]} |f|\, d\lambda \leq \int_I |f|\, d\lambda < +\infty,$$

d'où il résulte que $\int_I |f(x)|\, dx < \infty$.

(ii)$\Longrightarrow$(i). Posons $I = (\alpha, \beta)$ et choisisons des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ de points de I tels que

$(a_n)_n$ est décroissante et $a_n \longrightarrow \alpha$

$(b_n)_n$ est croissante et $b_n \longrightarrow \beta$

$a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq 1$.

Posons $f_n = f\chi_{[a_n,b_n]}$. Comme f est Riemann intégrable sur $[a_n, b_n]$, elle est Lebesgue intégrable sur $[a_n, b_n]$ et f_n Lebesgue intégrable sur I. Les fonctions $|f_n|$ forment une suite croissante de fonctions Lebesgue intégrables sur I qui converge simplement vers $|f|$. En outre,

$$\int_I |f_n|\, d\lambda = \int_{[a_n,b_n]} |f|\, d\lambda = \int_{a_n}^{b_n} |f(x)|\, dx \leq \int_I |f(x)|\, dx < +\infty,$$

et le théorème de Beppo-Levi prouve que $|f|$ est intégrable au sens de Lebesgue sur I. Comme on a

$$|f_n| \leq |f|, \text{ pour tout } n \geq 1,$$

le théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 3.6.1) implique que f est Lebesgue intégrable sur I et que

$$\int_I f d\lambda = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_I f_n d\lambda = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx = \int_I f(x)dx.$$

■

Exemple 3.7.5 *La fonction* $x \longrightarrow \frac{1}{x^\alpha}$ *est Lebesgue intégrable sur* $[a, +\infty[$ *(où* $a > 0$*) si et seulement si* $\alpha > 1$.

Démonstration. En effet, la relation

$$\int_a^n \frac{dx}{x^\alpha} = \varphi_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln n - \ln a & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

montre que $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
Il s'ensuit que la fonction $x \longrightarrow \frac{1}{x^\alpha}$ est Lebesgue intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$. Dans ce cas on a

$$\int_{[a,+\infty[} \frac{1}{x^\alpha} d\lambda(x) = \frac{1}{(\alpha - 1)a^{\alpha-1}}$$

■

Exercice corrigé 3.7.6 *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application continue et bornée sur* $\mathbb{R}$. *Après avoir montré son existence, calculer*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx} f(x) dx \tag{3.26}$$

Démonstration. Les fonctions $x \longmapsto f_n(x) = e^{-nx} f(x)$ sont continues sur $[0, +\infty[$ donc mesurables. L'application f est bornée donc il existe $M > 0$ telle que

$$\left|e^{-nx} f(x)\right| \leq M.e^{-nx}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout } n \geq 1.$$

Puisque $\int_0^{+\infty} e^{-nx} < \infty$, alors $\int_0^{+\infty} |e^{-nx} f(x)dx| < \infty$ et donc la limite (3.26) existe et par le Théorème 3.7.4 on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx} f(x) dx = \int_{[0,+\infty[} f_n d\lambda$$

La suite $(f_n)_n$ est convergente vers $f = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq 1$ on a

$$\left|e^{-nx} f(x) dx\right| \leq M.e^{-x} = g(x),$$

et

$$\int_{[0,+\infty[} g d\lambda = \int_0^{+\infty} g(x)dx < \infty.$$

Donc par le théorème de convergence dominée il suit que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx} f(x)dx = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{[0,+\infty[} f_n d\lambda = \int_{[0,+\infty[} f d\lambda = 0$$

■

3.8 Continuité et dérivabilité sous le signe $\int$

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, f une fonction de $X \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par f_t, f_x les applications partielles

$$x \longmapsto f_t(x) = f(x,t) \quad \text{et} \quad t \longmapsto f_x(t) = f(x,t).$$

Nous supposerons dans tout ce paragraphe que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction f_t est intégrable

$$f_t \in L^1(\mu), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{3.27}$$

On définit alors une fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$F(t) = \int f_t(x) d\mu(x) = \int f(x,t) d\mu(x) \tag{3.28}$$

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons à la continuité et dérivabilité de la fonction F.

Théorème 3.8.1 *(Continuité sous $\int$)*
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : X \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant l'hypothèse (3.27) et $t_0 \in \mathbb{R}$; on suppose de plus que
(i) Pour presque partout $x \in X$, la fonction f_x est continue de la variable t au point $t_0 \in \mathbb{R}$.
(ii) Il existe $\varepsilon > 0$, et $g \in L^1(\mu)$ tels que

$$|f(x,t)| \leq g(x), \text{ pour tout } t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[.$$

Alors, la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par (3.28), est continue en t_0.

Démonstration. Il suffit de montrer que $F(t_n) \longrightarrow F(t_0)$ pour toute suite $(t_n)_n$ de $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ qui converge vers t_0. Posons

$$f_n(x) = f(x, t_n).$$

Pour presque partout $x \in X$, la fonction f_x est continue au point t_0 et donc

$$f_n(x) = f(x, t_n) = f_x(t_n) \longrightarrow f_x(t_0) = f(x, t_0),$$

quand $n \longrightarrow +\infty$. Par ailleurs,

$$|f_n(x)| = |f(x, t_n)| \leq g(x)$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 3.6.1), on a

$$F(t_n) = \int f_n(x) d\mu(x) \longrightarrow \int f(x, t_0) d\mu(x) = F(t_0)$$

quand $n \longrightarrow +\infty$, d'où le théorème. ■

Théorème 3.8.2 *(Dérivation sous le signe $\int$)*
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : X \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant l'hypothèse (3.27) et $t_0 \in \mathbb{R}$; on suppose de plus qu'il existe $\varepsilon > 0$, $A \in \mathcal{M}$ et $g \in L^1(\mu)$ tels que
(i) L'application $t \mapsto f(x, t)$ est dérivable pour tout $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ et pour tout $x \in A^c$.
(ii) Pour tout $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ et pour tout $x \in A^c$ on a

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x).$$

Alors, la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par (3.28), est dérivable en t_0 et

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu(x).$$

Démonstration. Soit $(t_n)_n$ une suite de $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ telle que $t_n \longrightarrow t_0$ lorsque et $t_n \neq t_0$ pour tout $n \geq 1$. Soit f_n définie par

$$f_n(x) = \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0}.$$

La suite $(f_n)_n$ est dans $L^1(\mu)$ et converge presque partout vers la fonction $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$ car l'application $t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ est continue pour tout $x \in A^c$. Par ailleurs, d'après le théorème d'accroissements finis, si $x \in A^c$ et $n \geq 1$, il existe $\theta_{x,n} \in]0, 1[$ tel que

$$f_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, \theta_{x,n} t_0 + (1 - \theta_{x,n}) t_n)$$

et donc

$$|f_n(x)| \leq g(x), \text{ pour tout } x \in A^c \text{ et } n \geq 1.$$

D'après le théorème de convergence dominée (Théorème 3.6.1) (appliquée sur la suite $(f_n)_n$), la fonction $x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ (qui est définie presque partout $x \in X$) est dans $L^1(\mu)$ et on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int f_n(x) d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu(x)$$

Ceci etant vrai pour toute suite $(t_n)_n$ dans $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ telle que $t_n \longrightarrow t_0$ lorsque et $t_n \neq t_0$ pour tout $n \geq 1$, on en déduit bien que F est dérivable en t_0 et

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu(x).$$

■

3.9 Application au calcule de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

D'après le Théorème 3.7.4, la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, +\infty[$. Posons

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

et proposons nous de calculer la valeur de I. A cet effet, considérons la fonction f définie pour $x \geq 0$ par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1 + t^2} dt$$

comme on a

$$\left| \frac{e^{-xt^2}}{1 + t^2} \right| \leq \frac{1}{1 + t^2}, \text{ pour tout } x, t \geq 0$$

et que la fonction $t \longmapsto \frac{1}{1+t^2}$ est Lebesgue intégrable sur $[0,+\infty[$, la fonction f est bien définie, et elle est continue en vertu du Théorème 3.8.1. Notons que l'on a

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}.$$

En outre, puisque $\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow +\infty$ pour tout $t > 0$, il résulte du théorème de convergence dominnée (Théorème 3.6.1) que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$. Pour $x > 0$ on a

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}) = \frac{-t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}.$$

En outre, pour $x \geq a > 0$, on a

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2})\right| = t^2\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \leq e^{-at^2}$$

et, comme la comme fonction $t \longmapsto e^{-at^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, il résulte du théorème de dérivation sous signe d'intégration que f est dérivable sur tout intervalle $]a,+\infty[$ avec $a > 0$, donc est dérivable sur $]0,+\infty[$, de dérivée

$$f'(x)) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}dt$$

On a donc

$$f(x) - f'(x)) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}dt, \text{ pour } x > 0.$$

Posons $u = \sqrt{x}t$ dans la dernière, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}dt = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{I}{\sqrt{x}}.$$

La fonction f est donc sulution de l'équation différentielle

$$f - f' = \frac{I}{\sqrt{x}} \tag{3.29}$$

Alors,

$$f(x) = e^x\left(C - 2I\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt\right), \text{ pour } x > 0,$$

et cette formule reste vraie par continuité pour $x = 0$. Puisque $f(0) = \frac{\pi}{2}$, on a $C = \frac{\pi}{2}$ et donc au total

$$f(x) = e^x \left(\frac{\pi}{2} - 2I \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt \right)$$

Puisque $f(x) \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow +\infty$, on a nécessairement

$$\frac{\pi}{2} - 2I \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 0,$$

sait $\frac{\pi}{2} - 2I^2 = 0$, d'où l'on tire

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$