Corrigé type Interrogation mesure et Integration L3

2022/2023.

- Question de Cours: $\mathcal{F}$ est une σ-algèbre sur E

  - $\emptyset \in \mathcal{F}$ 0,50
  - $\forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ 0,50
  - $\forall (A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$ 0,50

- Exercice 01: 1) On pose $[1+\frac{1}{n}, 4-\frac{1}{2n}] = A_n$

$A_1 = [2, \frac{7}{2}]$; $A_2 = [\frac{3}{2}, \frac{15}{4}]$; $A_3 = [\frac{4}{3}, \frac{23}{6}]$, ... 0,50

On remarque que $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'ensemble Croissante 01,00

alors, $\bigcup_{n\geq 1} A_n = \lim_{n\to+\infty} [1+\frac{1}{n}, 4-\frac{1}{2n}] =]1,4[$ 02,00

Puisque: $1 \notin [1+\frac{1}{n}, 4-\frac{1}{2n}]$ $\forall n\geq 1$ 0,50 et

$4 \notin [1+\frac{1}{n}, 4-\frac{1}{2n}]$ $\forall n \geq 1$ 0,50

2) $\lambda([a,b]) = b-a$.

$\lambda\left(\bigcup_{n\geq 1}[1+\frac{1}{n}, 4-\frac{1}{2n}]\right) = \lambda(]1,4[) = 3$ 1,50

$\lambda\left(\bigcup_{n\geq 1}[1+\frac{1}{n}, 4-\frac{1}{2n}]\right) = \lim_{n\to+\infty} \lambda\left([1+\frac{1}{n}, 4-\frac{1}{2n}]\right)$ 01,00

Puisque $\left([1+\frac{1}{n}, 4-\frac{1}{2n}]\right)_{n\geq 1}$ croissante 01,00

$= \lim_{n\to+\infty}\left(3 - \frac{3}{2n}\right) = 3$. 01,00

Exercice 02: $\mu : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to \overline{\mathbb{R}}_+$

$A \to \mu(A)$

avec: $\mu(A) = \sum_{k\geq 1} \delta_{1/k}(A)$ $\delta_{1/k}$ mesure de Dirac

On montre que : μ est une mesure positive.

Par définition de l'app μ : $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\mu(A) \in \overline{\mathbb{R}}_+$

$\Rightarrow \mu(A) \geq 0$ donc μ est positive 0,50

On montre :

1) $\mu(\emptyset) = 0$? 0,50

$\mu(\emptyset) = \sum_{k \geq 1} \delta_{1/k}(\emptyset) = \sum_{k \geq 1} 0 = 0$ 1,00

" Puisque $\delta_{1/k}$ est une mesure, alors $\delta_{1/k}(\emptyset) = 0$ 1,00

2) $\forall (A_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ disjointes 2 à 2 : $\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$ 0,50?

Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ 0,50 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ disj 2 à 2 :

$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) := \sum_{k \geq 1} \delta_{1/k}\left(\bigcup_{n} A_n\right)$ --- (*) 0,50

Comme $\delta_{1/k}$ est une mesure 0,50 et $(A_n)_{n \geq 1}$ disj 2 à 2 0,50

alors $\delta_{1/k}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \delta_{1/k}(A_n)$ 0,50

$* = \sum_{k \geq 1} \sum_{n \geq 1} \delta_{1/k}(A_n)$

$= \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 1} \delta_{1/k}(A_n) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$ 1,00

donc μ est une mesure positive 0,50