Université Mostefa Ben Boulaïd - Batna 2
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Solution Examen final

Exercice 1 (*04pts*)

1. *Montrer par un exemple que l'union de deux tribus A et B sur E n'est pas nécessairement une tribu.*
2. *Montrer par un exemple que l'image directe $f(A)$ d'une tribu A sur E par une application $f : E \to F$ n'est pas nécessairement une tribu sur F.*

Solution de l'exercice : 1

1. $E = \{1, 2, 3, 4\}$,
   - $A = \{\emptyset, E, \{1\}, \{2, 3, 4\}\}$ *est une tribu sur* E 0.5*pt*
   - $B = \{\emptyset, E, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ *est une tribu sur* E 0.5*pt*
   - $A \cup B = \{\emptyset, E, \{1\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ *n'est pas une tribu sur* E 0.5*pt*, *car* $\{1\} \in A \cup B$, $\{3, 4\} \in A \cup B$ *mais* $\{1, 3, 4\} \notin A \cup B$ 0.5*pt*
2. *Soient* $E = \{-2, 1, 2\}$, $F = \{1, 4\}$ *et* $f : x \to x^2$ 0.5*pt*
   - $A = \{\emptyset, E, \{-2\}, \{1, 2\}\}$ *est une tribu sur* E 0.5*pt*
   - $f(A) = \{\emptyset, E, \{4\}\}$ *n'est pas une tribu sur* F 0.5*pt* *car* $\{4\} \in f(A)$ *mais* $\{4\}^C_F = \{1\} \notin f(A)$ 0.5*pt*

Exercice 2 (*06pts*) *Soient* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f : (X, \mathcal{F}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ *une fonction mesurable.*

1. *Montrer que* $\forall n \geq 1, A_n = \{x \in X : |f(x)| \leq n\}$ *est* $\mathcal{F}$*-mesurable*
2. *Montrer que* $\bigcup_{n\geq 1} A_n = X$
3. *Déduire que*

$$\mu(X) \neq 0 \Rightarrow \exists A \in \mathcal{F} \text{ tel que } \mu(A) > 0 \text{ et } f \text{ bornée sur } A$$

Solution de l'exercice : 2

1. *Soit* $n \geq 1$ 0.25*pt*

$$\begin{aligned} A_n &= \{x \in X : |f(x)| \leq n\} \\ &= \{x \in X : -n \leq f(x) \leq n\} \\ &= \{x \in X : f(x) \in [-n, n]\} \\ &= f^{-1}([-n, n]) \quad 01pt \end{aligned}$$

On a

- $\forall n \geq 1,\ [-n, n] \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, 0.25*pt*
- *par hypothèse* f *est une fonction mesurable de* $(X, \mathcal{F})$ *dans* $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ 0.25*pt*

alors par définition des fonction numérique mesurable

$$\forall n \geq 1,\ f^{-1}([-n, n]) \in \mathcal{F} \quad 0.75pt$$

2. *On a*

$$\begin{aligned}\bigcup_{n\geq 1} A_n &= \bigcup_{n\geq 1}\{x\in X : |f(x)|\leq n\}\\ &= \bigcup_{n\geq 1} f^{-1}\left([-n,n]\right)\\ &= f^{-1}\left(\bigcup_{n\geq 1}[-n,n]\right)\\ &= f^{-1}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\\ &= X \quad \color{red}{01pt}\end{aligned}$$

3. *On suppose que* $\mu(X)\neq 0$, *alors* $\mu(X)>0$ $\color{red}{0.25pt}$.
   On remarque que
   - f *est bornée sur* A_n $\color{red}{0.25pt}$
   - $(A_n)_{n\geq 1}$ *est une suite d'ensemble croissante* $\color{red}{0.25pt}$

   et donc d'après le théorème de la continuité croissante de la mesure μ $\color{red}{0.25pt}$ *on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\mu(A_n)=\mu\left(\bigcup_{n\geq 1}[-n,n]\right)=\mu(X)>0 \quad \color{red}{01pt}$$

   par suite

$$\exists n\geq 1,\ A_n\in\mathcal{F} \text{ tel que } \mu(A_n)>0 \text{ et } f \text{ bornée sur } A_n \quad \color{red}{0.5pt}$$

Exercice 3 (***03pts***) *Soient mesurable* $(X,\mathcal{P}(X),\delta_a)$ *un espace mesuré, avec* δ_a *est la mesure de Dirac en point* $a\in X$ *et* $f: X\to[0;+\infty]$ *une fonction mesurable. Montrer que*

$$\int_X f\ d\delta_a = f(a)$$

Indication *:* $X = A\cup A^c$ *avec* $A=\{a\}$

Solution de l'exercice : 3 *On pose* $A=\{a\}$

$$\begin{aligned}\int_X f\ d\delta_a &= \int_{A\cup A^c} f\ d\delta_a\\ &= \int_A f\ d\delta_a + \int_{A^c} f\ d\delta_a \quad \color{red}{0.5pt}\end{aligned}$$

On a

- $\delta_a(A^c)=0$ $\color{red}{0.5pt}$, *alors*

$$\int_{A^c} f\ d\delta_a = 0 \quad \color{red}{0.5pt} \tag{1}$$

— $\delta_a(A) = 1$ 0.5*pt*, *alors*

$$\int_A f \; d\delta_a = \int_A f(x) \; d\delta_a(x) = \int_{\{a\}} f(x) \; d\delta_a(x) = f(a)\delta_a(A) = f(a) \quad 0.5pt \qquad (2)$$

de (1) *et* (2) *on a*

$$\int_X f \; d\delta_a = f(a) \quad 0.5pt$$

Exercice 4 (***07pts***)

1. *Calculer*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}} \; dx$$

2. *Montrer que*

$$\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{x})e^{-x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{n!}{(2n)!}.$$

Indication *:*

$$u \in \mathbb{R}, \cos(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!}. \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!}e^{-x}dx = 1$$

Solution de l'exercice : 4 1. (a) *en utilisant le théorème de convergence monotone.*

On pose

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{n+2}}, \;\; \forall n \geq 0, \;\; \forall x \in [1, +\infty[$$

— *On a* $\forall n \geq 0, \; f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{n+2}}$ *est une fonction continue sur* $[1, +\infty[$ 0.25*pt*, *alors* $(f_n)_{n\geq 0}$ *est suite de fonctions mesurables* 0.25*pt*

— $\forall n \geq 0, \forall x \in [1, +\infty[, \;\; f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{n+2}} \geq 0$ 0.25*pt*

Donc $(f_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{M}^+_{[1,+\infty[}$ (a).

— *On a* $\forall n \geq 0, \forall x \in [1, +\infty[$

$$\begin{aligned} x^{n+1} + x^{2n+3} \geq x^n + x^{2n+3} &\Rightarrow x^{n+1}(1+x^{n+2}) \geq x^n(1+x^{n+3}) \\ &\Rightarrow \frac{x^{n+1}}{1+x^{n+3}} \geq \frac{x^n}{1+x^{n+2}} \\ &\Rightarrow f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \quad 01pt \end{aligned}$$

alors $(f_n)_{n\geq 0}$ *est une suite de fonctions croissante sur* $[1, +\infty[$ (b).

—

$$\forall x \in [1, +\infty[, \;\; \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{x^2} \quad (c) \quad 0.5pt$$

Alors d'après $(a),(b),(c)$, *toutes les hypothèses du théorème de convergence monotone* $0.25pt$ *sont vérifiées, donc*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^{n+2}}\,dx &= \int_1^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{x^n}{1+x^{n+2}}\,dx\\ &=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx\\ &=1 \quad 01pt\end{aligned}$$

(b) *en utilisant le théorème de convergence dominée.*
On pose

$$f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^{n+2}},\ \forall n\geq 0,\ \forall x\in[1,+\infty[$$

— *On a* $\forall n\geq 0,\ f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^{n+2}}$ *est une fonction continue sur* $[1,+\infty[$ $0.25pt$, *alors* $(f_n)_{n\geq 0}$ *est suite de fonctions mesurables* $0.25pt$

Donc $(f_n)_{n\geq 0}\in\mathcal{M}_{[1,+\infty[}$ (a).

—

$$\forall n\geq 0,\forall x\in[1,+\infty[,\quad |f_n(x)|\leq g(x)=\frac{1}{x^2}\quad 0.75pt$$

—

$$\forall x\in[1,+\infty[,\quad g(x)=\frac{1}{x^2}\geq 0\quad 0.25pt$$

—

$$\int_1^{+\infty}|g(x)|\,dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=1<+\infty\quad 0.5pt$$

alors $\exists g(x)=\dfrac{1}{x^2}:[1,+\infty[\to[0,+\infty[$ *intégrable telle que*

$$\mid f_n(x)\mid\leq g(x),\ \forall x\in[1,+\infty[\ (\boldsymbol{p.p.}x\in[1,+\infty[)\quad (b)$$

—

$$\forall x\in[1,+\infty[\ (\boldsymbol{p.p.}x\in[1,+\infty[),\ \lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\frac{1}{x^2}\quad (c)\quad 0.5pt$$

Alors d'après $(a),(b),(c)$, *toutes les hypothèses du théorème de convergence dominée* $0.25pt$ *sont vérifiées, donc*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^{n+2}}\,dx &= \int_1^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{x^n}{1+x^{n+2}}\,dx\\ &=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx\\ &=1 \quad 0.75pt\end{aligned}$$

*

2. *D'après l'indication on a*

$$\forall x \geq 0, \cos(\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} \quad 0.25pt$$

alors

$$\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{x}) e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} e^{-x} dx \quad 0.5pt$$

On pose

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} e^{-x}, \ \forall n \geq 0, \ \forall x \in [0, +\infty[$$

— *On a* $\forall n \geq 0, \ f_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} e^{-x}$ *est une fonction continue sur* $[0, +\infty[$ 0.25*pt*, *alors* $(f_n)_{n\geq 0}$ *est suite de fonctions mesurables* 0.25*pt*

Donc $(f_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{M}_{[0,+\infty[}$ (a).

— *D'après l'indication on a*

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n! \quad 0.25pt$$

alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} e^{-x} dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(2n)!} \quad 0.5pt\end{aligned}$$

d'après le critère d'Alembert 0.25*pt* *la série de terme générale* $\dfrac{n!}{(2n)!}$ *est convergente* 0.25*pt* *donc*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx < +\infty \quad 0.25pt$$

et par suite

$$\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{x}) e^{-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n e^{-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}. \quad 0.75pt$$