Université Mostefa Ben Boulaïd - Batna 2
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques
Mathématiques Appliquées Master 2

Solution Examen final

Exercice 1 ***(09pts)*** *Soit* $(\Omega, (S_n), (\mathcal{F}_n), \mathbb{P})$ *un marché financier de Cox, Ross et Rubinstein tel que* $a < r < b$ et $N \geq 2$. *Le prix à la date* n *d'une option européenne* h *sera noté* $\Pi_n(h)$. *On notera* h *l'option européenne définie par*

$$h = \sqrt{S^1_{N-1} S^1_N}$$

1. *Montrer qu'il existe un nombre réel* α, *que l'on calculera explicitement en fonction de* a, b, p et r *tel que*
$$\Pi_n(h) = \alpha S^1_n \quad \forall n \leq N-1$$
2. *Montrer que*
$$\Pi_n(h) \leq \frac{S^1_n}{\sqrt{1+r}} \quad \forall n \leq N-1 .$$
3. *On appelle* $(\phi_n \ ; \ n = 1, 2, \dots, N)$ *le portefeuille de couverture de* h
   - (a) *Calculer explicitement* ϕ_n *pour* $n < N$.
   - (b) *Vérifier que ce portefeuille est autofinancé.*

Indication $\mathbb{E}\left(\sqrt{X}\right) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X)}$

Solution de l'exercice : 1 *1. puisque* $a < r < b$, *alors le marché et viable et complet* $0.25pt$, *et on a* $\forall n \leq N-1$

$$\begin{aligned}\Pi_n(h) =& \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \mathbb{E}^* (h \mid \mathcal{F}_n) \quad 0.5pt \\ =& \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \mathbb{E}^* \left(\sqrt{S^1_{N-1} S^1_N} \mid \mathcal{F}_n\right)\end{aligned}$$

On a $T_n = \dfrac{S^1_n}{S^1_{n-1}} \in \{1+a, 1+b\}$ $\quad 0.25pt$, *alors*

$$S_N = S^1_n . T_{n+1} . T_{n+2} .... T_N \quad 0.25pt$$

par suite

$$\begin{aligned}\Pi_n(h) =& \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \mathbb{E}^* \left(\sqrt{(S^1_n)^2 T^2_{n+1} . T^2_{n+2} .... T^2_{N-1} . T_N} \mid \mathcal{F}_n\right) \\ =& \frac{1}{(1+r)^{N-n}} \mathbb{E}^* \left(S^1_n T_{n+1} . T_{n+2} .... T_{N-1} \sqrt{T_N} \mid \mathcal{F}_n\right) \quad 0.25pt\end{aligned}$$

On a S^1_n *est* $\mathcal{F}_n$ *mesurable* $\quad 0.25pt$ *et puisque* $a < r < b$, *alors les variables* T_n *sont indépendantes* $\quad 0.25pt$ *donc*

$$\begin{aligned}\Pi_n(h) =& \frac{1}{(1+r)^{N-n}} S^1_n \mathbb{E}\left(T_{n+1} . T_{n+2} .... T_{N-1} \sqrt{T_N}\right) \quad 0.5pt \\ =& \frac{1}{(1+r)^{N-n}} S^1_n \mathbb{E}(T_{n+1}) .... \mathbb{E}(T_{N-1}) \mathbb{E}\left(\sqrt{T_N}\right) \quad 0.25p\end{aligned}$$

puisque $a < r < b$, *alors*

— *les variables* T_n *sont équidistribuées* 0.25*pt*
— $E(T_n) = 1 + r, \forall n \leq N - 1$ 0.25*pt*
— $E(\sqrt{T_N}) = p\sqrt{1+a} + (1-p)\sqrt{1+b}$ 0.25*pt*
— $p = \dfrac{b-r}{b-a}$ 0.25*pt*

donc

$$\begin{aligned}\Pi_n(h) =&\frac{(1+r)^{N-n-1}}{(1+r)^{N-n}} S_n \left(p\sqrt{1+a} + (1-p)\sqrt{1+b}\right)\\ =&\frac{p\sqrt{1+a} + (1-p)\sqrt{1+b}}{(1+r)} S_n \quad 0.5pt\end{aligned}$$

donc $\alpha = \dfrac{p\sqrt{1+a} + (1-p)\sqrt{1+b}}{(1+r)}$ 0.25*pt*

2. *d'après la 1ère question on a*

$$\Pi_n(h) = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} S_n \mathbb{E}\left(T_{n+1}\right) \ldots \mathbb{E}\left(T_{N-1}\right) \mathbb{E}\left(\sqrt{T_N}\right)$$

et comme $\mathbb{E}\left(\sqrt{T_N}\right) \leq \sqrt{\mathbb{E}\left(T_N\right)}$, *alors*

$$\begin{aligned}\Pi_n(h) =&\frac{1}{(1+r)^{N-n}} S_n \mathbb{E}\left(T_{n+1}\right) \ldots \mathbb{E}\left(T_{N-1}\right) \mathbb{E}\left(\sqrt{T_N}\right)\\ \leq&\frac{1}{(1+r)^{N-n}} S_n \mathbb{E}\left(T_{n+1}\right) \ldots \mathbb{E}\left(T_{N-1}\right) \sqrt{\mathbb{E}\left(T_N\right)} \quad 0.5pt\\ =&\frac{(1+r)^{N-n-1}.\sqrt{1+r}}{(1+r)^{N-n}} S_n \quad 0.25pt\\ =&\frac{S_n^1}{\sqrt{1+r}} \quad 0.25pt\end{aligned}$$

3. (a) *On a*

$$V_n(\phi) = \phi_n^0 (1+r)^n + \phi_n^1 S_n^1 = \alpha S_n^1 \quad 0.5pt$$

Puisque ϕ_n^0 *et* ϕ_n^1 *sont* $\mathcal{F}_{n-1}$*-mesurables, ce sont des fonctions de* $S_1^1, \ldots, S_{n-1}^1$ *seulement* 0.25*pt* *et,*

$$S_n^1 = \begin{cases} S_{n-1}^1(1+b) \\ S_{n-1}^1(1+a) \end{cases} \quad 0.25pt$$

alors

$$\begin{cases} \phi_n^0 (1+r)^n + \phi_n^1 S_{n-1}^1 (1+b) = \alpha S_{n-1}^1 (1+b) \\ \phi_n^0 (1+r)^n + \phi_n^1 S_{n-1}^1 (1+a) = \alpha S_{n-1}^1 (1+a) \end{cases} \quad 0.5pt$$

et donc

$$\phi_n^1 = \frac{\alpha S_{n-1}^1 (b-a)}{S_{n-1}^1 (b-a)} = \alpha \quad 0.5pt$$

et

$$\phi_n^0 = 0 \quad 0.5pt$$

(b) on a

$$\begin{aligned}\phi_n S_n =& \phi_n^0(1+r)^n + \phi_n^1 S_n^1\\ =& 0.(1+r)^n + \alpha S_n^1\\ =& \phi_{n+1} S_n \quad 0.75pt\end{aligned}$$

donc la stratégie est autofinancé. 0.25*pt*

Exercice 2 (***06pts***) *Soit* $(Z_t)_{0\leq t<1}$ *le processus défini par*

$$Z_t = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \exp\left(-\frac{B_t^2}{2(1-t)}\right)$$

1. *Montrer que* $(Z_t)_{0\leq t<1}$ *est une martingale locale.*
2. *Ecrire* $(Z_t)_{0\leq t<1}$ *sous la forme*

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t \Phi_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \Phi_s^2 ds\right)$$

où Φ *est un processus que l'on précisera.*

Solution de l'exercice : 2 *Soit* $(Z_t)_{0\leq t<1}$ *le processus défini par*

$$Z_t = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \exp\left(-\frac{B_t^2}{2(1-t)}\right)$$

1. *On appliquant la formule d'Itô sur la fonction*

$$f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(1-t)}\right) \quad 0.25pt,$$

on a

$$\begin{aligned}Z_t =& f(t,B_t)\\ =& f(0,B_0) + \int_0^t f_s'(s,B_s)ds + \int_0^t f_x'(s,B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{x,x}''(s,B_s)d<B,B>_s \quad 0.5pt\end{aligned}$$

on a :

— $f_t'(t,B_t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1-t)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\dfrac{B_t^2}{2(1-t)}\right) - \dfrac{1}{2}\dfrac{B_t^2}{(1-t)^{\frac{5}{2}}} \exp\left(-\dfrac{B_t^2}{2(1-t)}\right)$ 0.5*pt*

— $f_x'(t,B_t) = -\dfrac{B_t}{(1-t)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\dfrac{B_t^2}{2(1-t)}\right)$ 0.25*pt*

— $f_{x,x}''(t,B_t) = -\dfrac{1}{(1-t)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\dfrac{B_t^2}{2(1-t)}\right) + \dfrac{B_t^2}{(1-t)^{\frac{5}{2}}} \exp\left(-\dfrac{B_t^2}{2(1-t)}\right)$ 0.5*pt*

— $d<B,B>_t = dB_t dB_t = dt$ 0.25*pt*

et donc

$$Z_t = 1 + \int_0^t -\frac{B_s}{(1-s)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{B_s^2}{2(s-t)}\right) dB_s \quad 0.5pt$$

et par suite

$$dZ_t = -\frac{B_t}{(1-t)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{B_t^2}{2(1-t)}\right) dB_t \quad 0.25pt \tag{1}$$

Comme le drift de Z_t est nulle 0.25pt, alors $(Z_t)_{0\leq t<1}$ est une martingale locale

2. *On appliquant formule d'Itô sur la fonction*

$$f(t,x) = \exp\left(\int_0^t \Phi_s dx - \frac{1}{2}\int_0^t \Phi_s^2 ds\right) 0.25pt,$$

on a

$$\begin{aligned} Z_t =& f(t,B_t) \\ =& f(0,B_0) + \int_0^t f_s'(s,B_s)ds + \int_0^t f_x'(s,B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{x,x}''(s,B_s)d < B,B >_s \end{aligned}$$

on a :

— $f_t'(t,B_t) = -\frac{1}{2}\Phi_t^2 Z_t$ 0.25pt

— $f_x'(t,B_t) = \Phi_t Z_t$ 0.25pt

— $f_{x,x}''(t,B_t) = \Phi_t^2 Z_t$ 0.25pt

et donc

$$Z_t = 1 + \int_0^t \Phi_s Z_s dB_s \quad 0.5pt$$

et par suite

$$dZ_t = \Phi_t Z_t dB_t \quad 0.25pt \tag{2}$$

d'après l'équation (1) et l'équation (2) on trouve

$$\begin{aligned} dZ_t =& -\frac{B_t}{(1-t)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{B_t^2}{2(1-t)}\right) dB_t \\ =& -\frac{B_t}{(1-t)}\frac{1}{\sqrt{1-t}} \exp\left(-\frac{B_t^2}{2(1-t)}\right) dB_t \\ =& -\frac{B_t}{(1-t)} Z_t dB_t \quad 0.5pt \end{aligned}$$

donc

$$\Phi_t = -\frac{B_t}{(1-t)} \quad 0.5pt$$

Exercice 3 (***05pts***) *Calculer*

$$\mathbb{E}\left(e^{-rt}(K-S_t)_+\right)$$

avec

$$dS_t = S_t\left(rdt + \sigma dB_t\right), S_0 = x$$

Solution de l'exercice : 3 *La solution explicite de l'EDS*

$$dS_t = S_t\left(rdt + \sigma dB_t\right), S_0 = x$$

est donnée par

$$S_t = x\exp\left((r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B_t\right) \quad \textcolor{red}{0.5pt}$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{-rt}(K-S_t)_+) =&\mathbb{E}\left[e^{-rt}\left(K-x\exp((r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B_t)\right)_+\right]\\ =&\mathbb{E}\left[\left(e^{-rt}K-x\exp(-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma B_t)\right)_+\right]\end{aligned}$$

On a $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$ $\textcolor{red}{0.25pt}$, *alors* $g=\frac{B_t}{\sqrt{t}}\sim\mathcal{N}(0,1)$ $\textcolor{red}{0.25pt}$, *par suite* $W_t=\sqrt{t}g$ *et donc*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{-rt}(K-S_t)_+) =&\mathbb{E}\left[\left(e^{-rt}K-x\exp(-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma\sqrt{t}g)\right)_+\right] \quad \textcolor{red}{0.5pt}\\ =&\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-rt}K-x\exp(-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma\sqrt{t}y)\right)_+\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy \quad \textcolor{red}{0.5pt}\end{aligned}$$

On a

$$e^{-rt}K-x\exp(-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma\sqrt{t}y)\geq 0 \Rightarrow y\leq \frac{\ln\left(\frac{K}{x}\right)-(r-\frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}=\alpha_1 \quad \textcolor{red}{0.5pt}$$

alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{-rt}(K-S_t)_+) &=\int_{-\infty}^{\alpha_1}\left(e^{-rt}K-x\exp(-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma\sqrt{t}y)\right)\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy\\ &=\int_{-\infty}^{\alpha_1}e^{-rt}K\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy-x\int_{-\infty}^{\alpha_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma\sqrt{t}y-\frac{y^2}{2})dy \quad \textcolor{red}{0.5pt}\\ &=\int_{-\infty}^{\alpha_1}e^{-rt}K\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy-x\int_{-\infty}^{\alpha_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\sigma\sqrt{t})^2}{2}}dy \quad \textcolor{red}{0.25pt}\end{aligned}$$

On a

$$\int_{-\infty}^{\alpha_1}e^{-rt}K\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy=e^{-rt}K\mathcal{N}(\alpha_1) \quad \textcolor{red}{0.5pt}$$

et

$$\int_{-\infty}^{\alpha_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\sigma\sqrt{t})^2}{2}}dy=\int_{-\infty}^{\alpha_1-\sigma\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\mathcal{N}(\alpha_2) \quad \textcolor{red}{0.5pt}$$

avec $\alpha_2=\alpha_1-\sigma\sqrt{t}$ $\textcolor{red}{0.25pt}$, *donc*

$$\mathbb{E}(e^{-rt}(K-S_t)_+)=e^{-rt}K\mathcal{N}(\alpha_1)-x\mathcal{N}(\alpha_2) \quad \textcolor{red}{0.5pt}$$