Université Mostefa Ben Boulaïd - Batna 2
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques
Mathématiques Appliquées L3

Solution de TD 02

Fonctions mesurables

Définition 1 *Soit $(X, \mathcal{F})$ et $(Y, \mathcal{M})$ deux espaces mesurables. L'application $f : X \to Y$ est dite **mesurable** si,*

$$\forall B \in \mathcal{M} : \ f^{-1}(B) \in \mathcal{F} \tag{1}$$

avec

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \tag{2}$$

Fonctions **numérique** mesurables

Définition 2 *Soit la fonction $f : (X, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est dite **mesurable si et seulement si** ,*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \ f^{-1}(]\alpha, +\infty[) \in \mathcal{F} \tag{3}$$

avec

$$f^{-1}(]\alpha, +\infty[) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \tag{4}$$

Remarque : On peut remplacer l'intervalle $]\alpha, +\infty[$ par n'importe quelle intervalle engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Quelques propriétés de fonctions mesurables

Proposition 1

1. *Si f et g sont des applications numériques mesurables sur $(X, \mathcal{F})$; alors*

$$f \pm g, \ fg, \ \sup(f, g), \ \inf(f, g), \ f_+ = sup(f, 0), \ f_- = sup(-f, 0), \ |f|, \ \frac{1}{f}, f \neq 0$$

   *sont des applications **mesurables**.*

2. ***la fonction constante est mesurable.***

Composition de deux fonctions mesurable

Théorème 1 *Soit $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{M})$ et $(Z, \mathcal{N})$ trois espaces mesurables. **Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont mesurables alors $g \circ f$ est mesurable.***

Exercice 1

1. *Soit f une application de $(E, \mathcal{F})$ dans $(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ mesurable . Montrer que l'ensemble $\{x \in E : f(x) = \alpha\}$, $\forall \alpha \in \bar{\mathbb{R}}$ est mesurable.*
2. *Soient f, g deux applications de $(E, \mathcal{F})$ dans $(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ mesurables. Montrer que les parties suivantes sont mesurables : $(f = g) = \{x \in E : f(x) = g(x)\}$, $(f \neq g) = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$, $(f > g) = \{x \in E : f(x) > g(x)\}$*

Solution de l'exercice : 1 *1. On montrer que l'ensemble* $\{x \in E : f(x) = \alpha\}$, $\forall \alpha \in \bar{\mathbb{R}}$ *est mesurable, c'est à dire on montre :*

$$\forall \alpha \in \bar{\mathbb{R}} \ : \ \{x \in E : f(x) = \alpha\} \in \mathcal{F}$$

avec f *une application mesurable de* $(E, \mathcal{F})$ *dans* $(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$.

(a) *Pour* $\alpha \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}\{x \in E : f(x) = \alpha\} =& \{x \in E : \alpha \le f(x) \le \alpha\}\\ =& \{x \in E : \alpha \le f(x) \ \textit{et} \ f(x) \le \alpha\}\\ =& \{x \in E : \alpha \le f(x)\} \cap \{x \in E : f(x) \le \alpha\}\\ =& f^{-1}([\alpha, +\infty[) \cap f^{-1}(]-\infty, \alpha]) \qquad \textit{d'après } (4)\end{aligned}$$

puisque f *est une fonction mesurable alors, d'après* (3) *on a*

$$f^{-1}(]-\infty, \alpha]) \in \mathcal{F} \quad \textit{et} \quad f^{-1}([\alpha, +\infty[) \in \mathcal{F}$$

et comme $\mathcal{F}$ *est une* $\sigma-$*algèbre, alors elle est stable par intersection dénombrable, et donc*

$$f^{-1}([\alpha, +\infty[) \cap f^{-1}(]-\infty, \alpha]) \in \mathcal{F}$$

par suite

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ : \ \{x \in E : f(x) = \alpha\} \in \mathcal{F} \tag{5}$$

(b) *Pour* $\alpha = -\infty$

$$\begin{aligned}\{x \in E : f(x) = -\infty\} =& \{x \in E : \forall n \in \mathbb{N}^*, \ f(x) < -n\}\\ =& \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{x \in E : f(x) < -n\}\\ =& \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} f^{-1}([-\infty, -n[) \qquad \textit{d'après } (4)\end{aligned}$$

puisque f *est une fonction mesurable alors, d'après* (3) *on a*

$$f^{-1}([-\infty, -n[) \in \mathcal{F}$$

et comme $\mathcal{F}$ *est une* $\sigma-$*algèbre, alors elle est stable par intersection dénombrable, et donc*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} f^{-1}([-\infty, -n[) \in \mathcal{F}$$

par suite

$$\alpha = -\infty \ : \ \{x \in E : f(x) = \alpha\} \in \mathcal{F} \tag{6}$$

(c) *Pour* $\alpha = +\infty$

$$\begin{aligned}\{x \in E : f(x) = +\infty\} =& \{x \in E : \forall n \in \mathbb{N}^*, \ f(x) > n\}\\ =& \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{x \in E : f(x) > n\}\\ =& \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} f^{-1}(]n, +\infty]) \qquad \textit{d'après } (4)\end{aligned}$$

puisque f est une fonction mesurable alors, d'après (3) on a

$$f^{-1}(]n, +\infty]) \in \mathcal{F}$$

et comme $\mathcal{F}$ est une $\sigma-$algèbre, alors elle est stable par intersection dénombrable, et donc

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} f^{-1}(]n, +\infty]) \in \mathcal{F}$$

par suite

$$\alpha = +\infty \;:\; \{x \in E : f(x) = \alpha\} \in \mathcal{F} \tag{7}$$

donc d'après (5),(6) et (7) on a

$$\forall \alpha \in \bar{\mathbb{R}} \;:\; \{x \in E : f(x) = \alpha\} \in \mathcal{F}$$

2. (a)

$$\begin{aligned}(f = g) =&\{x \in E : f(x) = g(x)\}\\ =&\{x \in E : f(x) - g(x) = 0\}\\ =&\{x \in E : (f - g)(x) = 0\}\end{aligned}$$

d'après la proposition 1 l'application $(f - g)$ est mesurable, et donc d'après la 1ère question de l'exercice 01, on a

$$\{x \in E : (f - g)(x) = 0\} \in \mathcal{F}$$

par suite

$$(f = g) \in \mathcal{F}$$

(b) *on a*

$$(f \neq g) = (f = g)^c$$

comme $(f = g) \in \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$ stable par passage au complémentaire (car $\mathcal{F}$ est une $\sigma-$algèbre), donc

$$(f = g)^c \in \mathcal{F} \Rightarrow (f \neq g) \in \mathcal{F}$$

(c)

$$\begin{aligned}(f > g) =&\{x \in E : f(x) > g(x)\}\\ =&\{x \in E : f(x) - g(x) > 0\}\\ =&\{x \in E : (f - g)(x) > 0\}\\ =&(f - g)^{-1}(]0, +\infty]) && \textit{d'après } (4)\end{aligned}$$

puisque $(f - g)$ est une application mesurable de de $(E, \mathcal{F})$ dans $(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$, alors d'après (3)

$$(f - g)^{-1}(]0, +\infty]) \in \mathcal{F}$$

et donc

$$(f > g) \in \mathcal{F}$$

Mesure positive

Définition 3 *une* ***mesure positive*** *sur* $(X, \mathcal{F})$ *est une application d'ensembles* $\boldsymbol{\mu : X \to [0, +\infty]}$ *vérifiant les propriétés suivantes*

1. $$\mu(\emptyset) = 0 \tag{8}$$

2. $\forall (A_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{F}$ ***disjoints 2 à 2***

$$\mu\left(\cup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) \tag{9}$$

On dit que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *est un* ***espace mesuré.***

Exercice 2 *Soit* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré,* $(Y, \mathcal{M})$ *un espace mesurable et* $g : X \to Y$ *une application mesurable. On pose :*

$$\upsilon(A) = \mu(g^{-1}(A)), \forall A \in \mathcal{M} \tag{10}$$

1. *Montrer que* υ *est une mesure sur* $(Y, \mathcal{M})$. *(On dit que* υ *est* **la mesure image** *de* μ *par* g*).*
2. *On se place sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_a)$ *où* a *est un réel fixé et on considère* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application mesurable. Déterminer la mesure image de* δ_a *par* g*.*
3. *On se place sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *et et on considère* $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$*. la fonction partie entière.*
   - (a) *Montrer que* g *est mesurable.*
   - (b) *Montrer que la mesure image de* λ *par* g *est la mesure de comptage sur* $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$*.*

Solution de l'exercice : 2

1. *On montre que*

$$\upsilon(A) = \mu(g^{-1}(A)), \forall A \in \mathcal{M}$$

est une mesure positive.
On a puisque μ *est une mesure positive, alors*

$$\forall A \in \mathcal{M} : \mu(g^{-1}(A)) \geq 0 \Rightarrow \upsilon(A) \geq 0$$

et donc υ *est une application positive*

(a) *On montre* $\upsilon(\emptyset) = 0$

$$\begin{aligned} \upsilon(\emptyset) =& \mu(g^{-1}(\emptyset)) \\ =& \mu(\emptyset) && \textit{puisque } g \textit{ est une application} \\ =& 0 && \textit{d'après } (8)\ \mu \textit{ est une mesure} \end{aligned}$$

(b) *On montre* $\forall (A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{M}$ *disjoints 2 à 2*

$$\upsilon\left(\cup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \upsilon(A_n)$$

Soit $(A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{M}$ *disjoints 2 à 2*

$$\begin{aligned} \upsilon\left(\cup_{n\geq 1} A_n\right) =& \mu\left(g^{-1}\left(\cup_{n\geq 1} A_n\right)\right) \\ =& \mu\left(\cup_{n\geq 1} g^{-1}\left(A_n\right)\right) \qquad \textit{puisque } g \textit{ est une application} \end{aligned}$$

car la suite $(A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{M}$ *est disjointes 2 à 2, alors la suite* $(g^{-1}(A_n))_{n\geq 1} \in \mathcal{M}$ *est aussi disjointes 2 à 2, en effet pour* $n \neq m$

$$g^{-1}(A_n) \cap g^{-1}(A_m) = g^{-1}(A_n \cap A_m) = g^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

donc

$$\begin{aligned} \upsilon\left(\cup_{n\geq 1} A_n\right) =& \mu\left(\cup_{n\geq 1} g^{-1}\left(A_n\right)\right) \\ =& \sum_{n\geq 1} \mu\left(g^{-1}\left(A_n\right)\right) \qquad \textit{d'après } (9)\ \mu \textit{ est une mesure} \\ =& \sum_{n\geq 1} \upsilon\left(A_n\right) \end{aligned}$$

Donc d'après (a) et (b) l'application υ *est une mesure positive.*

2. δ_a *est la mesure de Dirac en* a*, alors par définition de la mesure de Dirac, on a*

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \delta_a(A) = \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases} \tag{11}$$

alors d'après (10) la mesure image de δ_a *par* g *est donné par :* $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \upsilon(A) =& \delta_a(g^{-1}(A)) \\ =& \begin{cases} 1 & a \in g^{-1}(A) \\ 0 & a \notin g^{-1}(A) \end{cases} \qquad \textit{d'après } (11) \\ =& \begin{cases} 1 & g(a) \in A \\ 0 & g(a) \notin A \end{cases} \\ =& \delta_{g(a)}(A) \qquad \textit{d'après } (11) \end{aligned}$$

donc la mesure image de δ_a *par* g *est la mesure* $\delta_{g(a)}$*.*

3. *Soit* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ *la fonction partie entière.*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ g(x) = [x] = \{z \in \mathbb{Z} : z \leq x < z+1\}$$

(a) *On montre que* g *est une application mesurable. Alors d'après (1), on montre*

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) : \ g^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$*, alors*

$$A = \{z_1, z_2, z_3, ..., z_i, ...\}, \ i \in I \subset \mathbb{N}$$

alors

$$\begin{aligned} g^{-1}(A) =& \{x \in \mathbb{R} : \quad g(x) \in A\} \\ =& \{x \in \mathbb{R} : \quad [x] \in A\} \\ =& \{x \in \mathbb{R} : \quad \exists i \in I \quad [x] = z_i\} \\ =& \{x \in \mathbb{R} : \quad \exists i \in I \quad z_i \leq x < z_i + 1 = z_{i+1}\} \\ =& \bigcup_{i\in I} \{x \in \mathbb{R} : \quad z_i \leq x < z_{i+1}\} \\ =& \bigcup_{i\in I} [z_i, z_{i+1}[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Puisque $[z_i, z_{i+1}[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *stable par union dénombrable, donc* g *est une application mesurable.*

(b) *D'après* (10) *la mesure image de* λ *par* g *est donné par :* $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} \upsilon(A) =& \lambda(g^{-1}(A)) \\ =& \lambda\left(\bigcup_{i\in I}[z_i, z_{i+1}[\right) \end{aligned}$$

On remarque que la suite d'ensembles $([z_i, z_{i+1}[)_{i\in I}$ *est disjointes 2 à 2 et comme* λ *est la mesure de Lebesgue, alors d'après* (9)

$$\begin{aligned} \upsilon(A) &= \sum_{i\in I} \lambda\left([z_i, z_{i+1}[\right) \\ &= \sum_{i\in I}(z_{i+1} - z_i) \\ &= \sum_{i\in I} 1 \\ &= \begin{cases} card(I) & si\ I\ est\ fini \\ +\infty & sinon \end{cases} \\ &= \begin{cases} card(A) & si\ A\ est\ fini \\ +\infty & sinon \end{cases} \end{aligned}$$

par suite on obtient que la mesure image de λ *par* g *est la mesure de comptage sur* $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$.

Exercice 3 *Soit* $(X, \mathcal{F})$ *un espace mesurable, et soit* $f : (X, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *une application mesurable. Soit* $a > 0$ *et* f_a *la fonction définie sur* X *par*

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x) & |f(x)| \leq a \\ a & f(x) > a \\ -a & f(x) < -a \end{cases}$$

1. *Prouver que* $f_a(x) = sing(f(x)) \min(|f(x)|, a)$ *avec* $sing(y) = \dfrac{y}{|y|}$
2. *On déduire, en utilisant deux méthodes que la fonction* f_a *est mesurable.*

Solution de l'exercice : 3 *Soit*

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x) & |f(x)| \leq a \\ a & f(x) > a \\ -a & f(x) < -a \end{cases}, \quad a > 0 \tag{12}$$

1. *On montre*

$$f_a(x) = sing(f(x)) \min(|f(x)|, a)$$

   (a) *Si* $|f(x)| \leq a$, *d'après* (12) *on a*

$$f_a(x) = f(x) \quad (i)$$

de plus

$$sing(f(x)) \times \min(|f(x)|, a) = \frac{f(x)}{|f(x)|} \times |f(x)| = f(x) \quad (ii)$$

donc d'après (i) et (ii) on a : $f_a(x) = sing(f(x)) \min(|f(x)|, a)$

(b) *Si* $f(x) > a > 0$, *d'après* (12) *on a*

$$f_a(x) = a \quad (i)$$

de plus

$$sing(f(x)) \times \min(|f(x)|, a) = \frac{f(x)}{|f(x)|} \times a = \frac{f(x)}{f(x)} \times a = a \quad (ii)$$

donc d'après (i) et (ii) on a : $f_a(x) = sing(f(x)) \min(|f(x)|, a)$

(c) *Si* $f(x) < -a < 0$, *d'après* (12) *on a*

$$f_a(x) = -a \quad (i)$$

de plus

$$sing(f(x)) \times \min(|f(x)|, a) = \frac{f(x)}{|f(x)|} \times a = \frac{f(x)}{-f(x)} \times a = -a \quad (ii)$$

donc d'après (i) et (ii) on a : $f_a(x) = sing(f(x)) \min(|f(x)|, a)$

2. *On montre que la fonction* f_a *est mesurable.*
   (a) $1^{\text{ère}}$ *méthode. Par hypothèse On a* f *est mesurable, alors* ***d'après la proposition 1***
   - *La fonction* $|f(x)|$ *est aussi mesurable.*
   - *La fonction constante* a *est aussi mesurable.*
   - *La fonction* $\min(|f(x)|, a)$ *de deux fonctions mesurable est aussi mesurable.*
   - *La fonction* $sing(f(x)) = \dfrac{f(x)}{|f(x)|}$ *est aussi mesurable (comme quotient de deux fonctions mesurables)*
   - *Finalement* $sing(f(x)) \times \min(|f(x)|, a)$ *est aussi mesurable (comme produit de deux fonctions mesurables)*

   donc f_a *est une fonction mesurable*

   (b) $2^{\text{ème}}$ *méthode. Par définition d'après* (1), *On montre :*

   $$\forall V \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : f_a^{-1}(V) \in \mathcal{F}$$

   - *Posons*

   $$A_1 = f^{-1}(]-\infty, -a[), \quad A_2 = f^{-1}([-a, a]), \quad A_3 = f^{-1}(]a, +\infty[)$$

   On remarque

   $$A_1 \in \mathcal{F}, \quad A_2 \in \mathcal{F}, \quad A_3 \in \mathcal{F}$$

   puisque f *est une fonction mesurable par hypothèse et* $]-\infty, -a[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}), [-a, a] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *et* $]a, +\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

— *On remarque que*

$$\begin{aligned} X =& f^{-1}(\mathbb{R}) \\ =& f^{-1}\left(]-\infty,-a[\cup[-a,a]\cup]a,+\infty[\right) \\ =& f^{-1}\left(]-\infty,-a[\right)\cup f^{-1}\left([-a,a]\right)\cup f^{-1}\left(]a,+\infty[\right) \\ =& A_1\cup A_2\cup A_3 \end{aligned}$$

— *On remarque aussi que* $(f_a)_{|A_1} = -a$, $(f_a)_{|A_2} = f(x)$ *et* $(f_a)_{|A_3} = a$ *sont des fonctions mesurables, car* f *est une fonction mesurable par hypothèse et* a *et* $-a$ *sont des fonctions constantes. Donc*

$$(f_a^{-1})_{|A_1}\in\mathcal{F},\quad (f_a^{-1})_{|A_2}\in\mathcal{F},\quad (f_a^{-1})_{|A_3}\in\mathcal{F}$$

alors, soit $V\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} f_a^{-1}(V) =& f_a^{-1}(V)\cap X \\ =& f_a^{-1}\cap(A_1\cup A_2\cup A_3) \\ =& (f_a^{-1}\cap A_1)\cup(f_a^{-1}\cap A_2)\cup(f_a^{-1}\cap A_3) \\ =& (f_a^{-1})_{|A_1}\cup(f_a^{-1})_{|A_2}\cup(f_a^{-1})_{|A_3}\in\mathcal{F} \end{aligned}$$

donc f_a *est une fonction mesurable*

$\sigma-$algèbre - Tribu

Définition 4 *Soit* X *un ensemble et* $\boldsymbol{\mathcal{F}\in\mathcal{P}(X)}$ *une famille de parties de* X*. On dit que* $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ *est une* ***tribu*** *(ou* ***σ-algèbre****) sur* $\boldsymbol{X}$*, si*

1. $\boldsymbol{\emptyset\in\mathcal{F}}$.
2. $\boldsymbol{\forall A\in\mathcal{F}\Rightarrow A^c\in\mathcal{F}}$ ***"Stabilité par passage au complémentaire"***
3. $\boldsymbol{\forall(A_n)_{n\geq1}\in\mathcal{F}\Rightarrow\bigcup_{n\geq1}A_n\in\mathcal{F}}$ ***"Stabilité par union dénombrable"***

Exercice 4 *Le but de cet exercice est de construire un espace mesurable* $(X,\mathcal{T})$ *et une application bijective* $f:(X,\mathcal{T})\to(X,\mathcal{T})$ *mesurable, mais dont la réciproque* f^{-1} *n'est pas mesurable. Pour cela, on pose* $X=\mathbb{Z}$ *et* $\mathcal{T}$ *est l'ensemble des parties* A *de* $\mathbb{Z}$ *ayant la propriété suivante : pour tout entier* $n\geq1, 2n\in A$ *si et seulement si* $2n+1\in A$.

1. *Donner des exemples d'éléments de* $\mathcal{T}$
2. *Montrer que* $\mathcal{T}$ *est une tribu.*
3. *On pose* $f:n\in\mathbb{Z}\mapsto n+2$*. Démontrer que* f *est mesurable, mais que* f^{-1} *ne l'est pas.*

Solution de l'exercice : 4 *On a*

$$\mathcal{T}=\{A\in\mathcal{P}(\mathbb{Z}):\forall n\geq1,\ 2n\in A\Leftrightarrow 2n+1\in A\}$$

1. $A=\{2,3\}\in\mathcal{T}$, $B=\{3,4,5\}\notin\mathcal{T}$, $C=\{0\}\in\mathcal{T}$

l'ensemble C vérifie la condition

$$\{\forall n \geq 1,\ 2n \notin A \Leftrightarrow 2n+1 \notin A\} \Leftrightarrow \{\forall n \geq 1,\ 2n \in A \Leftrightarrow 2n+1 \in A\}$$

2. *On montre que $\mathcal{T}$ est une tribu. D'après la définition 4, on montre*

   (a) $\emptyset \in \mathcal{T}$?

   On a
   $$\forall n \geq 1,\ 2n \notin \emptyset \Leftrightarrow 2n+1 \notin \emptyset$$
   alors,
   $$\forall n \geq 1,\ 2n \in \emptyset \Leftrightarrow 2n+1 \in \emptyset$$
   et donc $\emptyset \in \mathcal{T}$

   (b) $\forall A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T}$?

   Soit $A \in \mathcal{T}$, on montre que $A^c \in \mathcal{T}$, alors il suffit de montrer
   $$\forall n \geq 1,\ 2n \in A^c \Leftrightarrow 2n+1 \in A^c$$
   Soit $n \geq 1$, tel que
   $$\begin{aligned} 2n \in A^c &\Leftrightarrow 2n \notin A \\ &\Leftrightarrow 2n+1 \notin A && \textbf{\textit{puisque}}\ A \in \mathcal{T} \\ &\Leftrightarrow 2n+1 \in A^c \end{aligned}$$
   donc $A^c \in \mathcal{T}$

   (c) $\forall (A_m)_{m\geq 1} \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{m\geq 1} A_m \in \mathcal{T}$?

   soit $(A_m)_{m\geq 1} \in \mathcal{T}$, on montre que $\bigcup_{m\geq 1} A_m \in \mathcal{T}$, alors il suffit de montrer que
   $$\forall n \geq 1,\ 2n \in \bigcup_{m\geq 1} A_m \Leftrightarrow 2n+1 \in \bigcup_{m\geq 1} A_m$$
   Soit $n \geq 1$, tel que
   $$\begin{aligned} 2n \in \bigcup_{m\geq 1} A_m &\Leftrightarrow \exists m \geq 1,\ 2n \in A_m \\ &\Leftrightarrow \exists m \geq 1,\ 2n+1 \in A_m && \textbf{\textit{puisque}}\ A_m \in \mathcal{T},\ \forall m \geq 1 \\ &\Leftrightarrow 2n+1 \in \bigcup_{m\geq 1} A_m \end{aligned}$$
   donc $\bigcup_{m\geq 1} A_m \in \mathcal{T}$

   Finalement, d'après $(a), (b)$ et (c), $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\mathbb{Z}$.

3. *Soit $f : n \in \mathbb{Z} \mapsto n+2$, on montre que f est une application mesurable, alors d'après (1) on montre*
   $$\forall A \in \mathcal{T} : f^{-1}(A) \in mathcalT$$

Soit $A \in \mathcal{T}$

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) =& \{n \in \mathbb{Z} : f(n) \in A\} \\ =& \{n \in \mathbb{Z} : n+2 \in A\} \\ =& \{n \in \mathbb{Z} : n \in (A-2)\} \\ =& A-2 \end{aligned}$$

On montre que $(A-2) \in \mathcal{T}$. Soit $n \geq 1$, tel que

$$\begin{aligned} 2n \in (A-2) \Leftrightarrow & 2n+2 \in A \\ \Leftrightarrow & 2(n+1) \in A \\ \Leftrightarrow & 2(n+1)+1 \in A && \textit{puisque } A \in \mathcal{T} \\ \Leftrightarrow & 2n+1 \in (A-2) \end{aligned}$$

donc $(A-2) \in \mathcal{T}$, et par suite f est une application mesurable.

— *On montre que f^{-1} n'est pas une application mesurable. alors on montre*

$$\exists A \in \mathcal{T} : \ f(A) \notin \mathcal{T}$$

Soit $A = \{0\} \in \mathcal{T}$, et $f(A) = \{2\} \notin \mathcal{T}$, donc f^{-1} n'est pas une application mesurable

mesurabilité de la fonction indicatrice

Proposition 2 *Soit $\mathbb{1}_A : (X, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ la fonction indicatrice de l'ensemble A*

$$\mathbb{1}_A \textit{ est mesurable } \Leftrightarrow \ A \in \mathcal{F}$$

Suite de fonctions mesurables

Proposition 3 *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables de $(X, \mathcal{F})$ dans $(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$. Alors*

1. *Les applications*
$$\sup_n f_n, \inf_n f_n, \limsup_n f_n, \liminf_n f_n : X \to \bar{\mathbb{R}}$$
sont mesurables.
2. *Si la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers f, alors f est une fonction mesurable.*
3. *Plus généralement, l'ensemble*
$$\{x \in X : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \ \textit{existe}\}$$
est mesurable.

Exercice 5 *Prouver que les fonctions suivantes sont mesurables (boréliennes) :*

1. *la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$*
2. *la fonction $x \mapsto x+1$ si $x > 0$ et $-x$ si $x \leq 0$.*
3. *la dérivée f' d'une fonction dérivable f.*

4. *la fonction* $(x,y) \to \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$ *et* 0 *sinon*
5. *la fonction* $x \to \exp(\cos x)$

Solution de l'exercice : 5

1. *On montre que la fonction indicatrice de* $\mathbb{Q}$ *est une fonction borélienne*
   — 1^{re} *méthode.*
   D'après la proposition 2, il suffit de montrer que $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*. On sait que* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *est engendrée par les ouverts de* $\mathbb{R}$ *ou bien par les fermés de* $\mathbb{R}$ *"puisque* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *est stable par passage au complémentaire".*
   On a $\mathbb{Q}$ *est un ensemble dénombrable, alors*
   — $\mathbb{Q} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *puisque* $\{q\}$ *est un fermé et* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *stable par union dénombrable.*
   On remarque aussi que
   $$\{q\} =]-\infty, q] \cap [q, +\infty[$$
   ou bien
   $$\{q\} = \bigcap_{n\geq 1}]\frac{1}{n} - q, \frac{1}{n} + q[$$
   — 2^{me} *méthode.*
   en utilisant la définition des fonctions mesurables, d'après (1) on montre
   $$\forall A in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \ \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$
   soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, alors*
   $$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}^{-1} = \{x \in \mathbb{R} : \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) \in A\} = \begin{cases} \emptyset & 0 \notin A, 1 \notin A \\ \mathbb{Q} & 0 \notin A, 1 \in A \\ \mathbb{R}/\mathbb{Q} & 0 \in A, 1 \notin A \\ \mathbb{R} & 0 \in A, 1 \in A \end{cases} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$
   puisque $\emptyset, \mathbb{Q}, \mathbb{R}/\mathbb{Q}, \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
2. *On montre que la fonction* $x \mapsto x+1$ *si* $x > 0$ *et* $-x$ *si* $x \leq 0$*. On a*
   $$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = (x+1)\mathbb{1}_{]0,+\infty[} + (-x)\mathbb{1}_{]-\infty,0]}$$
   on remarque que
   — $x \mapsto x+1$ *est une fonction mesurable car elle continue sur* $\mathbb{R}$.
   — $\mathbb{1}_{]0,+\infty[}$ *est une fonction mesurable car* $]0, +\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
   — $x \mapsto -x$ *est une fonction mesurable car elle continue sur* $\mathbb{R}$.
   — $\mathbb{1}_{]-\infty,0]}$ *est une fonction mesurable car* $]-\infty, 0] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
   alors d'après la proposition 1, f *est une fonction mesurable de* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, (comme produit et somme de fonctions mesurables.) donc* f *est Borélienne*
3. *On a*
   — f *est mesurable de* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *car elle est continue sur* $\mathbb{R}$ *(*f *est une fonction dérivable sur* $\mathbb{R}$*).*

— *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f_n(x) = n\left(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\right)$$

est mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ car, d'après la proposition 1 $(f_n)_{n\geq 1}$ est la différence de deux fonctions ($nf(x+\frac{1}{n})$ et $f(x)$) mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

— *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} n\left(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\right) = f'(x)$$

Puisque f' est une limite simple d'une suite de fonctions mesurables, alors d'après la proposition 3, f' est mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Ainsi f' est borélienne.

4. *Remarquons que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$, (car elle n'est pas continue au point $(0,0)$). Considérons la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$f_n(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2+\frac{1}{n}}, \quad \forall n \geq 1$$

On a

— *. $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions mesurables car les fonctions f_n sont continues (f_n représente le quotient de deux fonctions continues "fonctions polynômes et la fonction dénominateur est non nulle").*

— *f est la limite (simple) de la suite de fonction $(f_n)_{n\geq 1}$ car*

(a) *Pour $(x,y) = (0,0)$, on a $f_n(0,0) = 0$ donc*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(0,0) = 0 = f(0,0)$$

(b) *Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x,y) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2+\frac{1}{n}} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = f(x,y)$$

Donc d'après la proposition 3, f est mesurable de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Ainsi f est Borélienne.

5. *la fonction $f(x) = \exp(\cos x)$ est la composition de deux fonction mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, car les fonctions $x \to \cos x$ et $x \to \exp x$ sont continues sur $\mathbb{R}$, alors d'après le théorème 1, f' est mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Ainsi f' est borélienne.*

Exercice 6 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone.*

1. *Montrer que, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, c[)$ est un intervalle.*
2. *En déduire que f est mesurable.*

Solution de l'exercice : 6 *On supposera f croissante, le cas f décroissante étant symétrique.*

1. *On montrer que, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, c[)$ est un intervalle, alors on montre que pour tout $c \in \mathbb{R}$*

$$\forall x, y \in f^{-1}(]-\infty, c[), \forall z \in \mathbb{R} \text{ tq } x < z < y \Rightarrow z \in f^{-1}(]-\infty, c[) \tag{13}$$

   Soit $c \in \mathbb{R}$, et soient $x, y \in f^{-1}(]-\infty, c[)$ et considérons $z \in \mathbb{R}$ tel que $x < z < y$. Puisque f est croissante, on a

$$f(x) \leq f(z) \leq f(y)$$

   et puisque $y \in f^{-1}(]-\infty, c[)$, alors $f(z) < c$, par suite

$$f(z) < c \Rightarrow c \in f^{-1}(]-\infty, c[)$$

   donc, d'après (13) on a, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, c[)$ est un intervalle.

2. *Rappelons que les ensembles $]-\infty, c[$, $c \in \mathbb{R}$, engendrent la tribu des boréliens.*
   - *Pour prouver que f est mesurable, il suffit donc de prouver que*

$$\forall c \in \mathbb{R}, f^{-1}(]-\infty, c[) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

     d'après la 1ère question on a

$$\forall c \in \mathbb{R}, f^{-1}(]-\infty, c[) \quad \text{est un intervalle,}$$

     et donc borélien

$$\forall c \in \mathbb{R}, f^{-1}(]-\infty, c[) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

     finalement f est une fonction mesurable (borélienne)