Université Mostefa Ben Boulaïd - Batna 2
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques
Mathématiques Appliquées Master 2

Solution Exercice 09 de TD 02

Exercice 1 (***processus d'Itô.***) *Écrire les processus suivants comme des processus d'Itô en précisant leur drift et le coefficient de diffusion*

1. $X_t = B_t^2$
2. $X_t = t + \exp(B_t)$
3. $X_t = B_t^3 - 3tB_t$
4. $X_t = 1 + 2t + \exp(B_t)$

Solution de l'exercice : 1 *On sait si $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ est un processus d'Itô à valeur dans $\mathbb{R}$, alors*

$$X_t = X_0 + \int_0^t k_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

ou bien

$$dX_t = K_t dt + H_t dW_t$$

avec H_t et H_t sont respectivement le drift et le coefficient de diffusion de X_t

1. $X_t = B_t^2$. *On applique la formule d'intégration par parties (ou bien la formule d'Itô sur $f(x) = x^2$), alors*

$$\begin{aligned} d(X_t) =& d(B_t^2) \\ =& d(B_t B_t) \\ =& B_t dB_t + B_t dB_t + dB_t dB_t \\ =& dt + 2B_t dB_t \end{aligned}$$

   alors X_t est une processus d'Itô, leur drift est $K_t = 1$ et leur coefficient de diffusion est $H_t = 2B_t$.

2. $X_t = t + \exp(B_t)$. *On utilise la formule d'Itô sur la fonction $f(t,x) = t + e^x$, on a*

$$\begin{aligned} X_t = f(t,B_t) =& f(0,B_0) + \int_0^t f_s^{'}(s,B_s)ds + \int_0^t f_x^{'}(s,B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{x,x}^{"}(s,B_s)d < B,B >_s \\ =& 1 + \int_0^t ds + \int_0^t \exp(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \exp(B_s)ds \end{aligned}$$

   alors

$$dX_t = \left(1 + \frac{1}{2}\exp(B_t)\right)dt + \exp(B_t)dB_t$$

   alors X_t est une processus d'Itô, leur drift est $K_t = 1 + \frac{1}{2}\exp(B_t)$ et leur coefficient de diffusion est $H_t = \exp(B_t)$.

3. $X_t = B_t^3 - 3tB_t$. *On utilise la formule d'Itô sur la fonction* $f(t,x) = x^3 - 3tx$, *on a*

$$\begin{aligned} X_t = f(t,B_t) =& f(0,B_0) + \int_0^t f_s^{'}(s,B_s)ds + \int_0^t f_x^{'}(s,B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{x,x}^{"}(s,B_s)d<B,B>_s \\ =& \int_0^t -3B_s ds + \int_0^t (3B_s^2 - 3s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 6B_s ds \\ =& \int_0^t (3B_s^2 - 3s)dB_s \end{aligned}$$

alors

$$dX_t = \left(3B_t^2 - 3t\right) dB_t$$

alors X_t *est une processus d'Itô, leur drift est nul* $K_t = 0$ *et leur coefficient de diffusion est* $H_t = 3B_t^2 - 3t$.

4. $X_t = 1 + 2t + \exp(B_t)$. *On utilise la formule d'Itô sur la fonction* $f(t,x) = 1 + 2t + \exp x$, *on a*

$$\begin{aligned} X_t = f(t,B_t) =& f(0,B_0) + \int_0^t f_s^{'}(s,B_s)ds + \int_0^t f_x^{'}(s,B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{x,x}^{"}(s,B_s)d<B,B>_s \\ =& 1 + \int_0^t 2ds + \int_0^t \exp(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \exp(B_s)ds \\ =& 1 + + \int_0^t (2 + \frac{1}{2}\exp(B_s))ds \int_0^t \exp(B_s)dB_s \end{aligned}$$

alors

$$dX_t = (2 + \frac{1}{2}\exp(B_t))dt + \exp(B_t)dB_t$$

alors X_t *est une processus d'Itô, leur drift est* $K_t = 2 + \frac{1}{2}\exp(B_t)$ *et leur coefficient de diffusion est* $H_t = \exp(B_t)$.