Université Mostefa Ben Boulaïd - Batna 2
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques
Mathématiques Appliquées L3

Solution de TD 03

Fonction étagée positive

Définition 1 *Soit $(X, \mathcal{F})$ un espace mesurable. La fonction numérique $f : X \to \mathbb{R}^+$ est dite **étagée positive mesurable** si*

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \quad avec \quad \begin{cases} (\alpha_i)_{1 \le i \le n} \ge 0, & \alpha_i \ne \alpha_j,\ i \ne j \\ (A_i)_{1 \le i \le n} \in \mathcal{F}, & X = \cup_{i=1}^{n} A_i, \quad A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \ne j \end{cases} \tag{1}$$

On note $\mathcal{E}_X^+$ l'ensemble des fonctions étagées positives de $(X, \mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}^+$ muni de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$

Intégrale d'une fonction étagée positive

Définition 2 *Soit $f \in \mathcal{E}_X^+$ alors*

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) \tag{2}$$

Quelques propriétés sur l'intégrale des fonctions étagées positives

Propriétés 1 *Soient $f, g \in \mathcal{E}_X^+$, $A \in \mathcal{F}$ et $a \ge 0$*

1. $$\int_X a d\mu = a\mu(X) \tag{3}$$
2. $$\int_X a \mathbb{1}_A d\mu = \int_A a d\mu = a\mu(A) \tag{4}$$
3. $$\int_X f \mathbb{1}_A d\mu = \int_A f d\mu \tag{5}$$
4. $$\int_X a f d\mu = a \int_X f d\mu \tag{6}$$
5. $$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu \tag{7}$$
6. $$f \le g \Rightarrow \int_X f d\mu \le \int_X g d\mu \tag{8}$$

Quelques propriétés sur la fonction indicatrice

Propriétés 2 *1.*

$$\mathbb{1}_{(\cap_{i\geq 1} A_i)} = \prod_{i\geq 1} \mathbb{1}_{A_i} \tag{9}$$

2. Si $(A_i)_{i\geq 1}$ sont disjoints 2 à 2, alors

$$\mathbb{1}_{(\cup_{i\geq 1} A_i)} = \sum_{i\geq 1} \mathbb{1}_{A_i} \tag{10}$$

Exercice 1 (***Intégrale d'une fonction étagée positive***).
Soient $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, et $A, B \in \mathcal{F}$. Calculer

1. $\displaystyle\int_A \mathbf{1}_B \, d\mu.$
2. $\displaystyle\int_X f \, d\mu$ *avec* $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \in A \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$

Solution de l'exercice : 1 *1.*

$$\begin{aligned}
\int_A \mathbb{1}_B \, d\mu &= \int_X \mathbb{1}_B \mathbb{1}_A \, d\mu && \textit{d'après } (5) \\
&= \int_X \mathbb{1}_{A\cap B} \, d\mu && \textit{d'après } (9) \\
&= \mu(A \cap B) && \textit{d'après } (4)
\end{aligned}$$

2. On a

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \in A \\ 2 & \text{sinon} \end{cases},$$

alors

$$f(x) = 3\mathbb{1}_A + 2\mathbb{1}_{A^c},$$

par suite

$$\begin{aligned}
\int_X f \, d\mu &= \int_X 3\mathbb{1}_A + 2\mathbb{1}_{A^c} \, d\mu \\
&= \int_X 3\mathbb{1}_A \, d\mu + \int_X 2\mathbb{1}_{A^c} \, d\mu && \textit{d'après } (7) \\
&= 3\mu(A) + 2\mu(A^c) && \textit{d'après } (4)
\end{aligned}$$

Exercice 2 (***Intégrale d'une fonction étagée positive***).
Calculer l'intégral de Lebesgue sur l'intervalle $[0,+\infty[$ *des fonctions* f *et* g *tel que :*

1. $f(x) = e^{-[x]}$.
2. $g(x) = \dfrac{1}{[x]!}$,

d'où $[x] = \{n \in \mathbb{N}; n \leq x < n+1\}$.

Solution de l'exercice : 2 *On* $[x] = \{n \in \mathbb{N}; n \leq x < n+1\}$, *alors*

$$[x] = n \quad si \quad x \in [n, n+1[\tag{11}$$

1. $\forall x \in [0,+\infty[$

$$f(x) = e^{-[x]} = \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-n}\mathbb{1}_{[n,n+1[}(x) \quad \textit{d'après } (11)$$

d'après (1) *on a* $f \in \mathcal{E}_X^+$ (f *est une fonction étagée positive mesurable*) *puisque*

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-n}\mathbb{1}_{[n,n+1[}(x),$$

avec

(a) $\forall n \in \mathbb{N},\ e^{-n} \geq 0$.
(b) $e^{-n} \neq e^{-m},\ n \neq m$
(c) $\forall n \in \mathbb{N},\ [n, n+1[\in \mathcal{B}([0,+\infty[)$.
(d) $[0,+\infty[= \cup_{n\geq 1}[n, n+1[$.
(e) $([n, n+1[)_{n\geq 1}$ *sont disjoints 2 à 2*

alors

$$\begin{aligned}
\int_{[0,+\infty[} e^{-[x]}\ d\lambda &= \int_{[0,+\infty[} \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-n}\mathbb{1}_{[n,n+1[}(x)\ d\lambda \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-n}\lambda\left([n, n+1[\right) && \textit{d'après } (2) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-n}(n+1-n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-k} && \textit{suite géométrique } q = e^{-1} \\
&= \frac{e}{e-1}.
\end{aligned}$$

2. $\forall x \in [0,+\infty[$

$$g(x) = \frac{1}{[x]!} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}\mathbb{1}_{[n,n+1[}(x) \quad \textit{d'après } (11)$$

d'après (1) *on a* $g \in \mathcal{E}_X^+$ (g *est une fonction étagée positive mesurable*) *puisque*

$$g(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\mathbb{1}_{[n,n+1[}(x),$$

avec

(a) $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{n!} \geq 0.$

(b) $\frac{1}{n!} \neq \frac{1}{m!},\ n \neq m$

(c) $\forall n \in \mathbb{N},\ [n, n+1[\in \mathcal{B}([0, +\infty[).$

(d) $[0, +\infty[= \cup_{n\geq 1}[n, n+1[.$

(e) $([n, n+1[)_{n\geq 1}$ *sont disjoints 2 à 2*

alors

$$\begin{aligned}
\int_{[0,+\infty[} \frac{1}{[x]!}\, d\lambda &= \int_{[0,+\infty[} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} \mathbb{1}_{[n,n+1[}(x)\ d\lambda \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} \lambda\left([n, n+1[\right) && \textit{d'après } (2) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} = e
\end{aligned}$$

Mesure positive

Définition 3 *une* ***mesure positive*** *sur* $(X, \mathcal{F})$ *est une application d'ensembles* $\boldsymbol{\mu : X \to [0, +\infty]}$ *vérifiant les propriétés suivantes*

1. $$\mu(\emptyset) = 0 \tag{12}$$

2. $\forall (A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{F}$ ***disjoints 2 à 2***

$$\mu\left(\cup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n) \tag{13}$$

On dit que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *est un* ***espace mesuré.***

Intégrale des fonctions mesurables positives

Définition 4 *Soit* $f \in \mathcal{M}_X^+$ ($\mathcal{M}_X^+$ *l'ensemble des fonctions* $f : X \to [0, +\infty]$ *mesurables positives)*

$$\int_X f d\mu = \sup\{\int_X s\ d\mu\ :\ s \in \mathcal{E}_X^+,\ s \leq f\} \tag{14}$$

Fonction mesurable positive comme limite d'une suite de fonction étagée positive

Proposition 1 *Soit* $(X, \mathcal{F})$ *un espace mesurable.*

$$\forall f \in \mathcal{M}_X^+ \Rightarrow \exists (g_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{E}_X^+\ (g_n)_{n\geq 1} \textit{ croissante : } \lim_{n\to+\infty} g_n = f \tag{15}$$

Quelques propriétés de fonctions mesurables positives

Propriétés 3 *Soient* $(X, \mathcal{F})$ *un espace mesurable,* $f, g \in \mathcal{M}_X^+$, $A \in \mathcal{F}$ *et* $a \geq 0$.

1. $$\int_A f \, d\mu = \int_X f \mathbb{1}_A \, d\mu \tag{16}$$
2. $$\int_X af d\mu = a \int_X f d\mu \tag{17}$$
3. $$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu \tag{18}$$
4. $$f \leq g \Rightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu \tag{19}$$

Exercice 3 (***Mesure à densité*** f ***par rapport à*** μ).
Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f : X \to [0; +\infty]$ *une fonction numérique mesurable positive. Définissons la fonction d'ensembles* $\varphi : \mathcal{M} \to [0; +\infty]$ *par*

$$\varphi(A) := \int_A f \mathsf{d}\mu, \quad A \in \mathcal{M}$$

1. *Montrer que* φ *est une mesure sur* $(X, \mathcal{M})$. *(On dit que* φ *est de densité* f *par rapport à* μ.)
2. *Soit* g *une fonction numérique mesurable positive. Montrer que* $\int_X g \mathsf{d}\varphi = \int_X fg \mathsf{d}\mu$

Solution de l'exercice : 3 *On a* $\varphi : \mathcal{M} \to [0; +\infty]$ *avec*

$$\varphi(A) := \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{M}$$

1. *D'après la définition de l'application* φ *on a*

$$\forall A \in \mathcal{M}, \ \varphi(A) \in [0; +\infty]$$

donc l'application φ *est positive.*

(a) *On montre* $\mu(\emptyset) = 0$.

$$\begin{aligned}
\mu(\emptyset) &:= \int_\emptyset f(x) \, d\mu \\
&= \int_X f(x) \mathbb{1}_\emptyset(x) \, d\mu && \textit{d'après } (4) \\
&= \int_X f \times 0 \, d\mu && \textit{puisque } x \notin \emptyset \\
&= \int_X 0 \, d\mu = 0
\end{aligned}$$

(b) *On montre* $\forall (A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{M}$ *disjoints 2 à 2*

$$\varphi\left(\cup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \varphi(A_n)$$

Soit $(A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{M}$ *disjoints 2 à 2*

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\cup_{n\geq 1} A_n\right) :=& \int_{\cup_{n\geq 1} A_n} f \; d\mu \\
=& \int_X f \mathbb{1}_{\cup_{n\geq 1} A_n} \; d\mu && \textit{d'après } (16) \\
=& \int_X f \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_n} \; d\mu && \textit{d'après } (10) \\
=& \int_X \sum_{n\geq 1} f \mathbb{1}_{A_n} \; d\mu \\
=& \sum_{n\geq 1} \int_X f \mathbb{1}_{A_n} \; d\mu && \textit{d'après } (18) \\
=& \sum_{n\geq 1} \int_{A_n} f \; d\mu && \textit{d'après } (16) \\
=& \sum_{n\geq 1} \varphi(A_n)
\end{aligned}$$

Donc φ *est une mesure positive sur* $(X, \mathcal{M})$.

2. *On montre*

$$\forall g \in \mathcal{M}_X^+, \; \int_X g d\varphi = \int_X f g \mathsf{d}\mu \tag{20}$$

On utilise la méthode graduelle.

(a) *On montre* (20) *pour* $g = \mathbb{1}_A$, $A \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned}
\int_X g d\varphi =& \int_X \mathbb{1}_A d\varphi \\
=& \varphi(A) && \textit{d'après } (4) \\
=& \int_A f \; d\mu \\
=& \int_X f \mathbb{1}_A \; d\mu && \textit{d'après } (16) \\
=& \int_X f g \mathsf{d}\mu
\end{aligned}$$

alors

$$\forall A \in \mathcal{M}, g = \mathbb{1}_A \Rightarrow \int_X g d\varphi = \int_X f g \mathsf{d}\mu \tag{21}$$

(b) *On montre* (20) *pour* $g \in \mathcal{E}_X^+$, *alors d'après* (1)

$$g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \quad \textbf{\textit{avec}} \quad \left\{ \begin{array}{lll} (\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \geq 0, & \alpha_i \neq \alpha_j, \; i \neq j & \\ (A_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{M}, & X = \cup_{i=1}^n A_i, & A_i \cap A_j = \emptyset, \; i \neq j \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}\int_X g d\varphi &= \int_X \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} d\varphi \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_X \mathbb{1}_{A_i} d\varphi \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_X f \mathbb{1}_{A_i}\, d\mu && \textit{\textbf{d'après}}\ (21) \\ &= \int_X f \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}\, d\mu \\ &= \int_X f g \mathsf{d}\mu\end{aligned}$$

alors

$$\forall g \in \mathcal{E}_X^+ \Rightarrow \int_X g\, d\varphi = \int_X fg\, d\mu \tag{22}$$

(c) *Maintenant, on montre* (20) *pour* $g \in \mathcal{M}_X^+$, *alors d'après* (15)

$$\exists (s_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{E}_X^+,\ (s_n)_{n\geq 1} \textit{ croissante} : \lim_{n\to+\infty} s_n = g$$

donc

$$\begin{aligned}\int_X g d\varphi &= \int_X \lim_{n\to+\infty} s_n d\varphi \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_X s_n d\varphi && \textit{TCM sur la suite } (s_n)_{n\geq 1} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_X f s_n\, d\mu && \textit{\textbf{d'après}}\ (22) \\ &= \int_X \lim_{n\to+\infty} (f s_n)\, d\mu && \textit{TCM sur la suite } (f s_n)_{n\geq 1} \\ &= \int_X f \lim_{n\to+\infty} (s_n)\, d\mu \\ &= \int_X fg\, d\mu\end{aligned}$$

alors

$$\forall g \in \mathcal{M}_X^+ \Rightarrow \int_X g\, d\varphi = \int_X fg\, d\mu \tag{23}$$

Théorème de convergence monotone ou de Beppo-Levi (**Cas d'une suite croissante**)

Théorème 1 *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ un suite de fonctions vérifiant*

1. $(f_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{M}_X^+$
2. $(f_n)_{n\geq 1}$ ***est une suite croissante***
3. $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$

alors

$$\int_X f\, d\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\, d\mu \tag{24}$$

Théorème de convergence monotone ou de Beppo-Levi (**Cas d'une suite décroissante**)

Théorème 2 *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ un suite de fonctions vérifiant*

1. $(f_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{M}_X^+$
2. $(f_n)_{n\geq 1}$ ***est une suite décroissante***
3. $\int_X f_1\, d\mu < +\infty$
4. $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$

alors

$$\int_X f\, d\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\, d\mu \tag{25}$$

Quelques propriétés de l'intégrale de Riemann

Proposition 2
1. *Toute fonction **intégrable au sens de Riemann** (ou **Riemann-intégrable**) sur un intervalle $[a, b]$ est **bornée**.*
2. *Toute fonction **continue** est **intégrable au sens de Riemann** .*
3. *Toute fonction **monotone** est **intégrable au sens de Riemann***
4. *si f est **intégrable au sens de Riemann** et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **continue**, alors $g \circ f$ est **intégrable au sens de Riemann***

fonction Riemann-intégrable

Proposition 3 *f est **intégrable au sens de Riemann** sur $[a, b]$ si et seulement si f est **bornée** et **continue en dehors d'un ensemble de mesure nulle***

Relation Riemann-Lebesgue

Théorème 3 *si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est **intégrable au sens de Riemann** , alors f est aussi **intégrable au sens de Lebesgue** et*

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x)dx \tag{26}$$

Exercice 4 (***Théorème de convergence monotone***).
Calculer

1. $\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,\frac{\pi}{2}]} 1-e^{-n\cos x}\, d\lambda$.
2. $\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,+\infty[} e^{-nx}\, d\mathbb{P}$. *avec* $\mathbb{P}$ *est une probabilité*
3. $\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,1]} (1-x^n)\mathrm{d}\lambda$.
4. $\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,+\infty[} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-bx}\mathrm{d}\lambda,\quad b>1$.

Solution de l'exercice : 4 *1.* $\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,\frac{\pi}{2}]} 1-e^{-n\cos x}\, d\lambda$. *On pose*

$$f_n(x)=1-e^{-n\cos x},\ \forall n\geq 0,\ \forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$$

(a) ***On montre que*** $(f_n)_{n\geq 0}\in\mathcal{M}^+_{[0,\frac{\pi}{2}]}$ *c'est à dire on montre que* $(f_n)_{n\geq 0}$ *est une suite de fonctions mesurables et positive sur* $[0,\frac{\pi}{2}]$.

i. *On a* $\forall n\geq 0,\ f_n(x)=1-e^{-n\cos x}$ *est une fonction continue sur* $[0,\frac{\pi}{2}]$, *alors* $(f_n)_{n\geq 0}$ *est suite de fonctions mesurables sur* $[0,\frac{\pi}{2}]$ *(i)*

ii. $\forall n\geq 0,\ \forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned}0\leq x\leq\frac{\pi}{2} &\Rightarrow 0\leq\cos x\leq 1\\ &\Rightarrow -n\leq -n\cos x\leq 0\\ &\Rightarrow 0\leq e^{-n}\leq e^{-n\cos x}\leq e^0=1\\ &\Rightarrow -1\leq -e^{-n\cos x}\leq 0\\ &\Rightarrow 0\leq 1-e^{-n\cos x}\leq 1\\ &\Rightarrow 0\leq f_n(x)\quad (ii)\end{aligned}$$

Donc d'après (i) et (ii), alors $\Rightarrow\ (f_n)_{n\geq 0}\in\mathcal{M}^+_{[0,\frac{\pi}{2}]}$.

(b) ***On montre que*** $(f_n)_{n\geq 0}$ ***est une suite croissante***. *On a* $\forall n\geq 0,\ \forall x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned}(n+1)\cos x\geq n\cos x &\Rightarrow -n\cos x\geq -(n+1)\cos x\\ &\Rightarrow e^{-n\cos x}\geq e^{-(n+1)\cos x}\\ &\Rightarrow 1-e^{-(n+1)\cos x}\geq 1-e^{-n\cos x}\\ &\Rightarrow f_{n+1}(x)\geq f_n(x).\end{aligned}$$

alors $(f_n)_{n\geq 0}$ *est une suite de fonctions croissante sur* $[0,\frac{\pi}{2}]$.

(c) ***On montre que*** $\lim_{n\to+\infty} f_n$ ***existe. c'est à dire on montre que*** $(f_n)_{n\geq 0}$ ***est une suite de fonctions convergente.***

$$\lim_{n\to+\infty} 1-e^{-n\cos x}=\begin{cases}1 & si\ x\in[0,\frac{\pi}{2}[\\ 0 & si\ x=\frac{\pi}{2}\end{cases}\tag{27}$$

donc d'après (27)

$$\forall n\geq 0,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x)=1\quad p.p.\ x\in[0,\frac{\pi}{2}]$$

Alors d'après $(a),(b),(c)$*, toute les hypothèses du théorème de convergence monotone sont vérifiées, ainsi d'après* (24)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,\frac{\pi}{2}]} 1-e^{-n\cos x}\ d\lambda =& \int_{[0,\frac{\pi}{2}]}\lim_{n\to+\infty} 1-e^{-n\cos x}\ d\lambda\\
=& \int_{[0,\frac{\pi}{2}]} 1\ d\lambda\\
=&\lambda([0,\frac{\pi}{2}]) && \textit{d'après } (4)\\
=&\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

2. $\lim_{n\to+\infty}\displaystyle\int_{[0,+\infty[} e^{-nx}\ d\mathbb{P}$. *avec* $\mathbb{P}$ *est une mesure probabilité. On pose*

$$f_n(x)=e^{-nx},\ \forall n\geq 0,\ \forall x\in[0,+\infty[$$

   (a) ***On montre que*** $(f_n)_{n\geq 0}\in\mathcal{M}^+_{[0,+\infty[}$ *c'est à dire on montre que* $(f_n)_{n\geq0}$ *est une suite de fonctions mesurables et positive sur* $[0,+\infty[$.

      i. *On a* $\forall n\geq 0$, $f_n(x)=e^{-nx}$ *est une fonction continue sur* $[0,+\infty[$*, alors* $(f_n)_{n\geq0}$ *est suite de fonctions mesurables sur* $[0,+\infty[$ (i)

      ii. $$\forall n\geq 0,\ \forall x\in[0,+\infty[:\ f_n(x)=e^{-nx}\geq 0\quad (ii)$$

   Donc d'après (i) *et* (ii)*, alors* $\Rightarrow\ (f_n)_{n\geq0}\in\mathcal{M}^+_{[0,+\infty[}$.

   (b) ***On montre que*** $(f_n)_{n\geq1}$ ***est une suite décroissante***. *On a* $\forall n\geq 0,\ \forall x\in[0,+\infty[$

$$\begin{aligned}
(n+1)x\geq nx \Rightarrow& -nx\geq-(n+1)x\\
\Rightarrow&\ e^{-nx}\geq e^{-(n+1)x}\\
\Rightarrow&\ f_n(x)\geq f_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

   alors $(f_n)_{n\geq0}$ *est une suite de fonctions décroissante sur* $[0,\frac{\pi}{2}]$.

   (c) ***On montre que*** $\int_X f_0\ d\mu<+\infty$

$$\begin{aligned}
\int_{[0,+\infty[} f_0\ d\mathbb{P} =& \int_{[0,+\infty[} e^{-0\times x}\ d\mathbb{P}\\
=& \int_{[0,+\infty[} e^{-0}\ d\mathbb{P}\\
=& \int_{[0,+\infty[} 1\ d\mathbb{P}\\
=&\mathbb{P}([0,+\infty[) && \textit{d'après } (4)\\
\leq& 1 && \textit{Puisque } \mathbb{P} \textit{ est une mesure de probabilité}
\end{aligned}$$

   alors

$$\int_{[0,+\infty[} f_0\ d\mathbb{P}<+\infty$$

(d) ***On montre que $\lim_{n\to+\infty} f_n$ existe. c'est à dire on montre que $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions convergente.***

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-nx} = \begin{cases} 0 & si\ x \in]0,+\infty[\\ 1 & si\ x = 0 \end{cases} \tag{28}$$

donc d'après (28)

$$\forall n \geq 0,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \quad p.p.\ x \in [0,+\infty[$$

Alors d'après $(a),(b),(c),(d)$, *toute les hypothèses du théorème de convergence monotone sont vérifiées, ainsi d'après* (24)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,+\infty[} e^{-nx}\ d\mathbb{P} &= \int_{[0,+\infty[} \lim_{n\to+\infty} e^{-nx}\ d\mathbb{P} \\ &= \int_{[0,+\infty[} 0\ d\mathbb{P} \\ &= 0. \end{aligned}$$

3. $\lim_{n\to+\infty} \int_{[0,1]} (1-x^n) \mathsf{d}\lambda$. *On pose*

$$f_n(x) = (1-x^n),\ \forall n \geq 0,\ \forall x \in [0,1]$$

(a) ***On montre que $(f_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{M}^+_{[0,1]}$*** *c'est à dire on montre que $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions mesurables et positive sur* $[0,1]$.

i. *On a* $\forall n \geq 0$, $f_n(x) = (1-x^n)$ *est une fonction continue sur* $[0,1]$, *alors* $(f_n)_{n\geq 0}$ *est suite de fonctions mesurables sur* $[0,1]$ (i)

ii. $\forall n \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 &\Rightarrow 0 \leq x^n \leq 1 \\ &\Rightarrow -1 \leq -x^n \leq 0 \\ &\Rightarrow 0 \leq 1-x^n \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq f_n(x) \quad (ii) \end{aligned}$$

Donc d'après (i) *et* (ii), *alors* $\Rightarrow$ $(f_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{M}^+_{[0,1]}$.

(b) ***On montre que $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante.*** *On a* $\forall n \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} \leq x^n &\Rightarrow -x^n \leq -x^{(n+1)} \\ &\Rightarrow 1-x^n \leq 1-x^{(n+1)} \\ &\Rightarrow f_n(x) \leq f_{n+1}(x). \end{aligned}$$

alors $(f_n)_{n\geq 0}$ *est une suite de fonctions croissante sur* $[0,1]$.

(c) ***On montre que $\lim_{n\to+\infty} f_n$ existe. c'est à dire on montre que $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions convergente.***

$$\lim_{n\to+\infty} 1-x^n = \begin{cases} 1 & si\ x \in [0,1[\\ 0 & si\ x = 1 \end{cases} \tag{29}$$

donc d'après (29)

$$\forall n \geq 0,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1 \quad p.p.\ x \in [0,1]$$

Alors d'après $(a), (b), (c)$, *toute les hypothèses du théorème de convergence monotone sont vérifiées, ainsi d'après* (24)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,1]}(1-x^n)\ d\lambda &= \int_{[0,1]}\lim_{n\to+\infty}(1-x^n)\ d\lambda \\ &= \int_{[0,1]} 1\ d\lambda \\ &= \lambda([0,1]) \\ &= 1\end{aligned}$$

4. $\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,+\infty[}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-bx}\mathrm{d}\lambda,\quad b>1$. *On pose*

$$f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-bx},\ \forall n\geq 1,\ \forall x\in[0,+\infty[$$

(a) ***On montre que*** $(f_n)_{n\geq1}\in\mathcal{M}^+_{[0,+\infty[}$ *c'est à dire on montre que* $(f_n)_{n\geq1}$ *est une suite de fonctions mesurables et positive sur* $[0,+\infty[$.

i. *On a* $\forall n\geq 1,\ f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-bx}$ *est une fonction continue sur* $[0,+\infty[$, *alors* $(f_n)_{n\geq1}$ *est suite de fonctions mesurables sur* $[0,+\infty[$ (i)

ii.
$$\forall n\geq 1,\ \forall x\in[0,+\infty[:\ \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-bx}\geq 0\quad (ii)$$

Donc d'après (i) *et* (ii), *alors* $\Rightarrow$ $(f_n)_{n\geq1}\in\mathcal{M}^+_{[0,+\infty[}$.

(b) ***On montre que*** $(f_n)_{n\geq1}$ ***est une suite croissante***. *On a* $\forall n\geq 0,\ \forall x\in[0,+\infty[$ *On a*

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_k^n\left(\frac{x}{n}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k}\frac{x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\frac{x^k}{k!}$$

avec $a_{n,k}=\dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k}$ *On a*

$$\forall n\geq 1:\quad a_{n+1,k}\geq a_{n,k}\tag{30}$$

puisque $\dfrac{n+1-l}{n+1}\geq\dfrac{n-l}{n}$, $\forall l\in\mathbb{N}$ *de plus*

$$\forall n\geq 1:\quad a_{n,k}>0\tag{31}$$

alors d'après (30) *et* (31) *on a* $\forall n\geq 1$

$$\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}a_{n+1,k}\frac{x^k}{k!}>\sum_{k=0}^{n}a_{n+1,k}\frac{x^k}{k!}\geq\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\frac{x^k}{k!}=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

alors $(f_n)_{n\geq1}$ *est une suite de fonctions croissante sur* $[0,+\infty[$.

(c) ***On montre que*** $\lim_{n\to+\infty}f_n$ ***existe. c'est à dire on montre que*** $(f_n)_{n\geq1}$ ***est une suite de fonctions convergente.***

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-bx}=e^xe^{-bx}=e^{(1-b)x}\tag{32}$$

donc d'après (32)

$$\forall n\geq 0,\ \lim_{n\to+\infty}f_n(x)=e^{(1-b)x}\quad\forall x\in[0,+\infty[$$

Alors d'après $(a),(b),(c)$, toute les hypothèses du théorème de convergence monotone sont vérifiées, ainsi d'après (24)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,+\infty[}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-bx}\,d\lambda &= \int_{[0,+\infty[}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-bx}\,d\lambda \\ &= \int_{[0,+\infty[} e^{(1-b)x}\,d\lambda\end{aligned}$$

On $e^{(1-b)x}$ est une fonction continue sur $[0,+\infty[$, alors d'après 2. de la proposition 2. $e^{(1-b)x}$ est intégrable au sens de Riemann, de plus d'après le théorème 3. $e^{(1-b)x}$ est intégrable au sens de Lebesgue, alors d'après (26) on a

$$\int_{[0,+\infty[} e^{(1-b)x}\,d\lambda = \int_0^{+\infty} e^{(1-b)x}\,dx$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,+\infty[}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-bx}\,d\lambda &= \int_0^{+\infty} e^{(1-b)x}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{1-b}e^{(1-b)x}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{b-1}\end{aligned}$$

Ensemble négligeable

Définition 5 *Soit $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré et $A\subset X$, L'ensemble* ***A*** *est dit* ***négligeable*** *dans $(X,\mathcal{F},\mu)$ si*

$$\exists B\in\mathcal{F} \text{ tel que } A\subset B \text{ et } \mu(B)=0$$

Remarque

— ***Si $A\in\mathcal{F}$, c-à-d A est mesurable, alors***

$$\boldsymbol{A \text{ est négligeable si } \mu(A)=0}$$

Propriétés vraies presque partout ou **p.p**

Définition 6 *Soient $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré et $\mathcal{P}(x)$ Une propriétés concernant $x\in X$*

$$\boldsymbol{\mathcal{P}(x) \text{ vraie p.p} \Leftrightarrow \{x\in X:\mathcal{P}(x) \text{ n'est pas vraie}\} \text{ est négligeable}}$$

Remarque

— ***Si $\{x\in X:\mathcal{P}(x)$ n'est pas vraie$\}\in\mathcal{F}$, c-à-d est mesurable, alors***

$$\boldsymbol{\mathcal{P}(x) \text{ vraie p.p} \Leftrightarrow \mu\left(\{x\in X:\mathcal{P}(x) \text{ n'est pas vraie}\}\right)=0} \tag{33}$$

Théorème de la continuité croissante et décroissante

Théorème 4 *Soit $(X, \mathcal{F})$ un espace mesuré, alors*

1. ***La continuité croissante.*** *Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de parties mesurables, on a*
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) \tag{34}$$

2. ***La continuité décroissante.*** *Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante de parties mesurables, avec $\mu(A_1) < +\infty$. Alors, on a*
$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) \tag{35}$$

Exercice 5 *Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive.*

1. *(Inégalité de Tchebychev). Pour tout nombre réel $a > 0$ on a*
$$\mu(\{x \in X : f(x) \geq a\}) \leq \frac{1}{a}\int_X f\ d\mu.$$
2. $\int_X f\ d\mu = 0$ *si et seulement si $f = 0$ presque partout.*
3. *Si* $\int f\ d\mu < +\infty$ *alors $f < +\infty$ presque partout.*
4. *Si $f, g \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}_+)$ telles que $f = g$ presque partout. Alors* $\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X g \mathrm{d}\mu$

Solution de l'exercice : 5

1. *On montre $\forall a > 0$ on a*
$$\mu(\{x \in X : f(x) \geq a\}) \leq \frac{1}{a}\int_X f\ d\mu.$$
Considérons l'ensemble
$$A = (\{x \in X : \boldsymbol{f(x) \geq a}\}) = f^{-1}([a, +\infty]) \in \mathcal{F}$$
puisque f est une application mesurable ***positive*** *sur $(X, \mathcal{F})$ dans $[0, +\infty]$ On pose $\varphi = a\mathbb{1}_A$, on remarque que la fonction φ vérifie l'inégalité*
$$\varphi = a\mathbb{1}_A \leq f, \tag{36}$$
en effet,
   — *si $x \in A$ on a $\varphi(x) = \boldsymbol{a \leq f(x)}$*
   — *si $x \notin A$ on a $\varphi(x) = \boldsymbol{0 \leq f(x)}$*

d'après (36) *on a*

$$\begin{aligned}
a\mathbb{1}_A \leq f \Rightarrow \int_X a\mathbb{1}_A d\mu \leq \int_X f d\mu & \qquad \textbf{\textit{d'après}}\ (4)\\
\Rightarrow a\mu(A) \leq \int_X f d\mu & \qquad \textbf{\textit{d'après}}\ (4)\\
\Rightarrow \mu(A) \leq \frac{1}{a}\int_X f d\mu &
\end{aligned}$$

finalement

$$\mu\left(\{x \in X : f(x) \geq a\}\right) \leq \frac{1}{a}\int f\ d\mu. \tag{37}$$

2. *On montre* $\int_X f\mathsf{d}\mu = 0$ *si et seulement si* $f = 0$ *presque partout.*

   (a) *On montre*

   $$f = 0 \textit{ presque partout } \Rightarrow \int_X f\ d\mu = 0$$

   On suppose que $f = 0$ *presque partout. Remarquons que*

   $$(f = 0) = \{x \in X : f(x) = 0\} = \{x \in X : f(x) \in \{0\}\} = f^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{F}$$

   donc

   $$(f \neq 0) \in \mathcal{F}$$

   alors d'après (33)

   $$f = 0\ p.p \Rightarrow \mu\{x \in X : f(x) \neq 0\} = 0$$

   on pose $A = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$, *alors* $A^c = \{x \in X : f(x) = 0\}$.
   Par suite

   $$\begin{aligned}
   \int_X f\ d\mu &= \int_X f\mathbb{1}_X\ d\mu\\
   &= \int_X f\mathbb{1}_{A\cup A^c}\ d\mu\\
   &= \int_X f(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A^c})\ d\mu & \qquad \textbf{\textit{d'après}}\ (10)\\
   &= \int_X f\mathbb{1}_A\ d\mu + \int_X f\mathbb{1}_{A^c}\ d\mu & \qquad \textbf{\textit{d'après}}\ (18)\\
   &= \int_A f\ d\mu + \int_{A^c} f\ d\mu & \qquad \textbf{\textit{d'après}}\ (16)\\
   &= \int_A f\ d\mu + \int_{A^c} f\ d\mu & \qquad \textbf{\textit{d'après}}\ (16)
   \end{aligned}$$

   — *D'après l'exercice 06,*

   $$\int_A f\ d\mu = 0$$

   car $\mu(A) = 0$.

— *si* $x \in A^c$*, alors* $f(x) = 0$*, par suite*

$$\int_{A^c} f\ d\mu = \int_{A^c} 0\ d\mu = 0$$

Finalement

$$\int_X f\ d\mu = 0$$

(b) *Maintenant, on montre l'implication inverse*

$$\int_X f\ d\mu = 0\ \Rightarrow f = 0\ p.p$$

On suppose que $\int_X f d\mu = 0$. $\forall n \geq 1$ *on pose*

$$A_n = \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$$

Alors $A_n \in \mathcal{F}$ *pour tout* $n \geq 1$ *car* $A_n = f^{-1}\left([\frac{1}{n}, +\infty]\right)$ *et* f *est une fonction mesurable. La suite* $(A_n)_{n\geq 1}$ *est croissante et on a*

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \{x \in X : f(x) > 0\} = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$$

d'après (37)

$$\mu(A_n) = \mu(\{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\}) \leq n \int_X f\ d\mu = 0 \Rightarrow \mu(A_n) = 0$$

Ainsi, d'après (34) *du théorème de la continuité croissante, on en déduit que*

$$\mu\{x \in X : f(x) \neq 0\} = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$$

d'où

$$f = 0\ p.p$$

3. *On montre Si* $\displaystyle\int f\ d\mu < +\infty$ *alors* $f < +\infty$ *presque partout.*
Pour tout $n \geq 1$,

$$\{x \in X : f(x) = +\infty\} \subset \{x \in X : f(x) \geq n\}$$

On suppose que $\displaystyle\int f\ d\mu < +\infty$*, alors on applique l'inégalité de Tchebychev* (37) *avec* $a = n > 0$ *pour obtenir*

$$\mu\left(\{x \in X : f(x) = +\infty\}\right) \leq \mu\left(\{x \in X : f(x) \geq n\}\right) \leq \frac{1}{n}\int f\ d\mu \to 0$$

donc

$$\mu\left(\{x \in X : f(x) = +\infty\}\right) = 0$$

finalement, d'après (33)

$$f < +\infty\ p.p.$$

4. On montre. Si $f, g \in \mathcal{M}(X, \overline{\mathbb{R}}_+)$ telles que $f = g$ presque partout. Alors $\int_X f \mathsf{d}\mu = \int_X g \mathsf{d}\mu$
On suppose que $f = g$ presque partout. Soit

$$A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$$

d'après (33)

$$\mu(A) = 0$$

alors d'après l'exercice 06 on a

$$\int_A f d\mu = 0 \quad et \quad \int_A g d\mu = 0$$

alors d'après (16)

$$\int_X f \mathbb{1}_A d\mu = 0 \quad et \quad \int_X g \mathbb{1}_A d\mu = 0$$

par suite, d'après 2. de l'exercice 05 on a

$$f \mathbb{1}_A = 0 \ p.p \quad g \mathbb{1}_A = 0 \ p.p \tag{38}$$

comme $f = g$ p.p, alors

$$f \mathbb{1}_{A^c} = g \mathbb{1}_{A^c} \tag{39}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\int_X f \, d\mu &= \int_X f \mathbb{1}_X \, d\mu \\
&= \int_X f \mathbb{1}_{A \cup A^c} \, d\mu \\
&= \int_X f \left(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A^c}\right) \, d\mu && \textit{d'après } (10) \\
&= \int_X f \mathbb{1}_A \, d\mu + \int_X f \mathbb{1}_{A^c} \, d\mu && \textit{d'après } (18) \\
&= \int_X 0 \, d\mu + \int_X f \mathbb{1}_{A^c} \, d\mu && \textit{d'après } (38) \\
&= \int_X f \mathbb{1}_{A^c} \, d\mu \\
&= \int_X g \mathbb{1}_{A^c} \, d\mu && \textit{d'après } (39) \\
&= \int_X g \mathbb{1}_A d\mu + \int_X g \mathbb{1}_{A^c} \, d\mu && \textit{d'après } (38) \\
&= \int_X g \left(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A^c}\right) \, d\mu \\
&= \int_X g \, d\mu
\end{aligned}$$

Exercice 6 (***Méthode graduelle, Application d'inégalité de Tchebychev***)
Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, $f \in \mathcal{M}_X^+$ et $A \in \mathcal{F}$.

1. *Montrer que* $\mu(A) = 0 \Rightarrow \int_A f \mathsf{d}\mu = 0$.
2. *Montrer par un exemple que l'implication inverse n'est pas vérifiée.*
3. *Montrer que*
$$\int_A f \mathsf{d}\mu = 0. \Rightarrow \mu(A \cap \{x \in X : f(x) > 0\}) = 0$$
et en particulier
$$\int_X f \mathsf{d}\mu = 0. \Rightarrow \mu(\{x \in X : f(x) > 0\}) = 0$$

Solution de l'exercice : 6 1. *Soit* $f \in \mathcal{M}_X^+$, $A \in \mathcal{F}$ *On montre*
$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \int_A f \; d\mu = 0.$$
On suppose $\mu(A) = 0,\ A \in \mathcal{F}$, *on utilise la méthode graduelle pour montrer que*
$$\int_A f \; d\mu = 0. \tag{40}$$

(a) *On montre* (40) *pour* $f = \mathbb{1}_B$, $B \in \mathcal{F}$
$$\begin{aligned}\int_A f d\mu &= \int_A \mathbb{1}_B d\mu \\ &= \int_X \mathbb{1}_B \mathbb{1}_A d\mu && \textit{d'après } (16) \\ &= \int_X \mathbb{1}_{(A\cap B)} d\mu && \textit{d'après } (9) \\ &= \mu(A \cap B) && \textit{d'après } (4)\end{aligned}$$
comme $(A \cap B) \subset A$ *alors,*
$$\mu(A \cap B) \leq \mu(A) \quad \text{et} \quad \mu(A) = 0$$
donc $\mu(A \cap B) = 0$, *par suite*
$$\int_A f d\mu = 0$$
alors
$$\forall B \in \mathcal{F}, f = \mathbb{1}_B \Rightarrow \int_A f d\mu = 0 \tag{41}$$

(b) *On montre* (40) *pour* $f \in \mathcal{E}_X^+$, *alors d'après* (1)
$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{B_i} \quad \textbf{\textit{avec}} \quad \begin{cases} (\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \geq 0, & \alpha_i \neq \alpha_j,\ i \neq j \\ (B_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{F}, & X = \cup_{i=1}^n B_i, \quad B_i \cap B_j = \emptyset,\ i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_A f d\mu &= \int_A \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{B_i} d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_A \mathbb{1}_{B_i} d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 0 && \textit{d'après } (41) \\ &= 0\end{aligned}$$

alors

$$\forall f \in \mathcal{E}_X^+ \Rightarrow \int_A f \ d\mu = 0 \tag{42}$$

(c) *Maintenant, on montre* (40) *pour* $f \in \mathcal{M}_X^+$, *alors d'après* (15)

$$\exists (s_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{E}_X^+,\ (s_n)_{n\geq 1} \textit{ est croissante}: \lim_{n\to+\infty} s_n = f$$

donc

$$\begin{aligned}\int_A f d\mu &= \int_A \lim_{n\to+\infty} s_n d\mu \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_A s_n d\mu && \textit{TCM sur la suite } (s_n)_{n\geq 1} \\ &= \lim_{n\to+\infty} 0 && \textit{d'après } (42) \\ &= 0\end{aligned}$$

alors

$$\forall f \in \mathcal{M}_X^+ \Rightarrow \int_A f \ d\mu = 0 \tag{43}$$

2. *On montre qu'il existe* $A \in \mathcal{F}$ *tel que* $\mu(A) \neq 0$ *et* $\int_A f \ d\mu = 0$. *On pose* $\mathcal{M}_X^+ = \mathcal{M}_{\mathbb{R}}^+$, $A = [0,1]$, $f = \mathbb{1}_{]2,4[}$ *et* $\mu = \lambda$. *On a* $\lambda(A) = \lambda([0,1]) = 1 - 0 = 1$ *et*

$$\begin{aligned}\int_A f \ d\mu &= \int_{[0,1]} \mathbb{1}_{]2,4[} \ d\Lambda \\ &= \int_X \mathbb{1}_{[0,1]\cap]2,4[} \ d\lambda \\ &= \int_X \mathbb{1}_{\emptyset} \ d\lambda \\ &= \int_X 0 \ d\lambda \\ &= 0\end{aligned}$$

3. *On montrer*

$$\int_A f\mathsf{d}\mu = 0 \Rightarrow \mu(A \cap \{x \in X : f(x) > 0\}) = 0$$

On suppose que $\int_A f\mathsf{d}\mu = 0$, *on a*

$$\{x \in X : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{x \in X : f(x) > \frac{1}{n}\}$$

alors :

$$\begin{aligned}
A \cap \{x \in X : f(x) > 0\} =& A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{x \in X : f(x) > \frac{1}{n}\} \right) \\
=& \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(A \cap \{x \in X : f(x) > \frac{1}{n}\} \right) \\
=& \bigcup_{n=1}^{+\infty} (A \cap A_n)
\end{aligned}$$

avec $A_n = \{x \in X : f(x) > \frac{1}{n}\},\ \forall n \geq 1.$

On remarque que la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ *est une suite croissante alors la suite* $(A \cap A_n)_{n\geq 1}$ *est aussi une suite croissante, donc*

$$\begin{aligned}
\mu(A \cap \{x \in X : f(x) > 0\}) =& \mu \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (A \cap A_n) \right) \\
=& \lim_{n\to+\infty} \mu (A \cap A_n) \qquad \textit{d'après } (34)
\end{aligned}$$

On remarque aussi que $\forall n \geq 1$

$$(A \cap A_n) = \{x \in X : (f\mathbb{1}_A)(x) > \frac{1}{n}\}$$

On a

— $f\mathbb{1}_A \in \mathcal{M}_X^+$ *comme produit de 2 fonctions mesurables.*

— $\frac{1}{n} > 0$

Alors on appliquant l'inégalité de Tchebychev (37)*, on obtient*

$$\begin{aligned}
\mu (A \cap A_n) =& \mu\{x \in X : (f\mathbb{1}_A)(x) > \frac{1}{n}\} \\
\leq& n \int_X f\mathbb{1}_A \, d\mu \\
\leq& n \int_A f \, d\mu \\
\leq& n \times 0 \\
\leq& 0.
\end{aligned}$$

alors $\mu (A \cap A_n) = 0$*, finalement*

$$\mu(A \cap \{x \in X : f(x) > 0\}) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$$

Théorème convergence dominée

Théorème 5 *Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de* ***fonctions numériques mesurables****. On suppose que*

1. $\boldsymbol{f_n \to f}$ ***presque partout.***
2. $\boldsymbol{\exists g : X \to [0, +\infty[}$ ***intégrable telle que***

$$|\, f_n \,| \leq g \quad \textit{presque partout.}$$

Alors, $\boldsymbol{f}$ ***est intégrable*** *et*

$$\|\, f_n - f \,\|_1 = \int_X |f_n - f| d\mu \to 0 \text{ quand } n \to +\infty \tag{44}$$

En particulier, on a

$$\int_X f \, d\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu \tag{45}$$

Exercice 7 (***Théorème de Convergence dominée***)
Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{n\to+\infty} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2x^2}\, dx$
2. $\lim_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\frac{1}{nx})\, dx$
3. $\lim_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\, dx.$
4. $\lim_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \frac{n}{x\,(1+x^2)}\, dx.$
5. $\lim_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{1+\cos^{2n}(x)} e^{-|x|}\, dx.$
6. $\lim_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{x}{n}\right) e^{-x}\, dx.$

Solution de l'exercice : 7 *1.* $\lim_{n\to+\infty} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2x^2}\, dx$. *On pose*

$$f_n(x) = \frac{n^2+1}{n^2x^2},\ \forall n \geq 1,\ \forall x \in [1, +\infty[$$

(a) ***On montre que $(f_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{M}_{[1,+\infty[}$*** *c'est à dire on montre que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions mesurables sur $[1, +\infty[$.*
On a $\forall n \geq 1,\ f_n(x) = \dfrac{n^2+1}{n^2x^2}$ est une fonction continue sur $[1, +\infty[$, alors $(f_n)_{n\geq 1}$ est suite de fonctions mesurables sur $[1, +\infty[$

(b) ***On montre que $\exists g : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ intégrable telle que***

$$|\, f_n \,| \leq g \quad \textit{presque partout.}$$

i. ***On montre la domination.***
$\forall n \geq 1,\ \forall x \in [1, +\infty[$

$$|\, f_n(x) \,| = f_n(x) = \frac{n^2+1}{n^2x^2} \leq \frac{n^2+n^2}{n^2x^2} = \frac{2n^2}{n^2x^2} = \frac{2}{x^2}$$

alors

$$\forall n \geq 1,\ \mid f_n(x) \mid \leq g(x) = \frac{2}{x^2},\quad \forall x \in [1,+\infty[\ (p.p.\ x \in [1,+\infty[)$$

ii. ***On montre que $\forall x \in [1,+\infty[,\ g(x) \geq 0,$.***
on a $\forall x \in [1,+\infty[$: $\dfrac{2}{x^2} \geq 0$, *alors*

$$\forall x \in [1,+\infty[,\ g(x) \geq 0$$

iii. ***On montre que g est intégrable, c-à-d $\int_1^{+\infty} \mid g(x) \mid dx < +\infty$.***

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \mid g(x) \mid dx &= \int_1^{+\infty} g(x)dx \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}dx \\ &= \left[-\frac{2}{x}\right]_1^{+\infty} \\ &= 2 < +\infty\end{aligned}$$

Alors d'après $(i), (ii)$, *et* (iii), *on obtient*
$\exists g(x) = \dfrac{2}{x^2} : [1,+\infty[\to [0,+\infty[$ *intégrable telle que*

$$\mid f_n(x) \mid \leq g(x),\ \forall x \in [1,+\infty[\ (\boldsymbol{p.p.}x \in [1,+\infty[)$$

(c) ***On montre que $\lim_{n\to+\infty} f_n$ existe. c'est à dire on montre que $(f_n)_{n\geq1}$ est une suite de fonctions convergente.***

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^2x^2} = \frac{1}{x^2},\ \forall x \in [1,+\infty[\ (\boldsymbol{p.p.}x \in [1,+\infty[)$$

Alors d'après $(a), (b), (c)$, *toute les hypothèses du théorème de convergence dominée sont vérifiées, ainsi d'après* (45)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2x^2}\ dx &= \int_1^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^2x^2}\ dx \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ dx \\ &= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} \\ &= 1\end{aligned}$$

2. $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}} \sin(\dfrac{1}{nx})\ dx$. *On pose*

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\frac{1}{nx}),\ \forall n \geq 1,\ \forall x \in]0,1]$$

(a) ***On montre que*** $(f_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{M}_{]0,1]}$ *c'est à dire on montre que* $(f_n)_{n\geq 1}$ *est une suite de fonctions mesurables sur* $]0,1]$.

On a $\forall n \geq 1,\ f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin(\dfrac{1}{nx})$ *est une fonction continue sur* $]0,1]$ *(comme produit de 2 fonctions continues), alors* $(f_n)_{n\geq 1}$ *est suite de fonctions mesurables sur* $]0,1]$

(b) ***On montre que*** $\exists g :]0,1] \to [0,+\infty[$ ***intégrable telle que***

$$| f_n | \leq g \ \ \textit{presque partout.}$$

i. ***On montre la domination.***

$\forall n \geq 1,\ \forall x \in]0,1]$

$$|f_n(x)| = \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\sin(\frac{1}{nx})\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

alors

$$\forall n \geq 1,\ |f_n(x)| \leq g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \forall x \in]0,1]\ (p.p.\ x \in]0,1])$$

ii. ***On montre que*** $\forall x \in]0,1],\ g(x) \geq 0,$.

on a $\forall x \in]0,1] : \dfrac{1}{\sqrt{x}} \geq 0,$ *alors*

$$\forall x \in]0,1],\ g(x) \geq 0$$

iii. ***On montre que g est intégrable, c-à-d*** $\displaystyle\int_0^1 | g(x) | dx < +\infty$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 |g(x)|dx &= \int_0^1 g(x)dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx \\ &= \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 \\ &= 2 < +\infty\end{aligned}$$

Alors d'après $(i), (ii)$, *et* (iii), *on obtient*

$\exists g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} :]0,1] \to [0,+\infty[$ *intégrable telle que*

$$|f_n(x)| \leq g(x),\ \forall x \in]0,1]\ (\boldsymbol{p.p.}x \in]0,1])$$

(c) ***On montre que*** $\lim_{n\to+\infty} f_n$ ***existe. c'est à dire on montre que*** $(f_n)_{n\geq 1}$ ***est une suite de fonctions convergente.***

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(\frac{1}{nx}) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(0) = 0,\ \forall x \in]0,1]\ (\boldsymbol{p.p.}x \in]0,1])$$

Alors d'après $(a),(b),(c)$, *toute les hypothèses du théorème de convergence dominée sont vérifiées, ainsi d'après* (45)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(\frac{1}{nx})\ dx &= \int_0^1 \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\sin(\frac{1}{nx})\ dx \\ &= \int_0^1 0\ dx \\ &= 0\end{aligned}$$

3. $\lim_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 \left(1-\frac{x}{n}\right)^n\ dx$. *On pose*

$$f_n(x)=\left(1-\frac{x}{n}\right)^n,\ \forall n\geq 1,\ \forall x\in[0,1]$$

(a) ***On montre que*** $(f_n)_{n\geq1}\in\mathcal{M}_{[0,1]}$ *c'est à dire on montre que* $(f_n)_{n\geq1}$ *est une suite de fonctions mesurables sur* $[0,1]$.
On a $\forall n\geq 1,\ f_n(x)=\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ *est une fonction continue sur* $[0,1]$ *(comme puissance d'une fonction continue), alors* $(f_n)_{n\geq1}$ *est suite de fonction mesurable sur* $[0,1]$

(b) ***On montre que*** $\exists g:[0,1]\to[0,+\infty[$ ***intégrable telle que***

$$\mid f_n\mid\leq g\ \ \textit{presque partout.}$$

i. ***On montre la domination.***
$\forall n\geq 1,\ \forall x\in[0,1]$

$$|f_n(x)|=\left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right|=\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\leq 1$$

alors

$$\forall n\geq1,\ |f_n(x)|\leq g(x)=1,\quad \forall x\in[0,1]\ (p.p.\ x\in[0,1])$$

ii. ***On montre que*** $\forall x\in[0,1],\ g(x)\geq 0,$.
on a

$$\forall x\in[0,1],\ g(x)=1>0$$

iii. ***On montre que*** g ***est intégrable, c-à-d*** $\displaystyle\int_0^1\mid g(x)\mid dx<+\infty$.

$$\begin{aligned}\int_0^1|g(x)|dx &= \int_0^1 g(x)dx \\ &= \int_0^1 1dx \\ &= [x]_0^1 \\ &= 1<+\infty\end{aligned}$$

Alors d'après $(i),(ii)$, *et* (iii), *on obtient*
$\exists g(x)=1:[0,1]\to[0,+\infty[$ *intégrable telle que*

$$|f_n(x)|\leq g(x),\ \forall x\in[0,1]\ (\boldsymbol{p.p.}x\in[0,1])$$

(c) ***On montre que $\lim_{n\to+\infty} f_n$ existe. c'est à dire on montre que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions convergente.***

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x},\ \forall x\in]0,1]\ (\boldsymbol{p.p.}x\in]0,1])$$

Alors d'après $(a),(b),(c)$, toute les hypothèses du théorème de convergence dominée sont vérifiées, ainsi d'après (45)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\ dx &= \int_0^1\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\ dx\\ &= \int_0^1 e^{-x}\ dx\\ &= \left[-e^{-x}\right]_0^1\\ &= \frac{e-1}{e}\end{aligned}$$

4. $\lim_{n\to+\infty}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x^2)}\ dx$.. *On pose*

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x^2)},\ \forall n\geq 1,\ \forall x\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$$

(a) ***On montre que $(f_n)_{n\geq 1}\in\mathcal{M}_{]-\infty,+\infty[}$*** *c'est à dire on montre que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions mesurables sur $]-\infty,+\infty[$.*
On a $\forall n\geq 1,\ f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x^2)}$ est une produit de 2 fonctions mesurables (car $x\to\sin\left(\frac{x}{n}\right)$ est continue, et $x\to\frac{n}{x(1+x^2)}$ est aussi continue), alors $(f_n)_{n\geq 1}$ est suite de fonction mesurable sur $]-\infty,+\infty[$

(b) ***On montre que $\exists g:]-\infty,+\infty[\to[0,+\infty[$ intégrable telle que***

$$\boldsymbol{|\ f_n\ |\leq g\ \ \textit{presque partout.}}$$

i. ***On montre la domination.***
$\forall n\geq 1$, *presque partout* $x\in]-\infty,+\infty[$

$$\begin{aligned}|f_n(x)| &= \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x^2)}\right|\\ &= \left|\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|\left|\frac{n}{x(1+x^2)}\right|\\ &\leq\left|\frac{x}{n}\right|\left|\frac{n}{x(1+x^2)}\right| = \frac{1}{(1+x^2)}\end{aligned}$$

alors

$$\forall n\geq 1,\ |f_n(x)|\leq g(x) = \frac{1}{(1+x^2)},\quad p.p.\ x\in]-\infty,+\infty[$$

ii. ***On montre que $\forall x\in[0,1],\ g(x)\geq 0,$.***
on a $\forall x\in]-\infty,+\infty[$: $\frac{1}{(1+x^2)}\geq 0$, alors

$$\forall x\in]-\infty,+\infty[,\ g(x)\geq 0$$

*iii. **On montre que g est intégrable, c-à-d** $\int_{-\infty}^{+\infty} \mid g(x) \mid dx < +\infty$.*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)}dx \\ &= [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \pi < +\infty\end{aligned}$$

Alors d'après $(i), (ii)$, *et* (iii), *on obtient*
$\exists g(x) = 1 :]-\infty, +\infty[\to [0, +\infty[$ *intégrable telle que*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \ \boldsymbol{p.p.} x \in]-\infty, +\infty[$$

(c) ***On montre que*** $\lim_{n\to+\infty} f_n$ ***existe. c'est à dire on montre que*** $(f_n)_{n\geq 1}$ ***est une suite de fonctions convergente.***
On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = 1$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \frac{n}{x(1+x^2)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \frac{1}{(1+x^2)} \\ &= \frac{1}{(1+x^2)}\end{aligned}$$

par suite

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)}, \ \forall x \in]-\infty, +\infty[\ (\boldsymbol{p.p.} x \in]-\infty, +\infty[)$$

Alors d'après $(a), (b), (c)$, *toute les hypothèses du théorème de convergence dominée sont vérifiées, ainsi d'après* (45)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \frac{n}{x(1+x^2)} \ dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \frac{n}{x(1+x^2)} \ dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)} \ dx \\ &= [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \pi\end{aligned}$$

5. $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{1+\cos^{2n}(x)} e^{-|x|} \ dx$.. *On pose*

$$f_n(x) = e^{1+\cos^{2n}(x)} e^{-|x|}, \ \forall n \geq 0, \ \forall x \in]-\infty, +\infty[$$

(a) ***On montre que $(f_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{M}_{]-\infty,+\infty[}$*** *c'est à dire on montre que $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions mesurables sur $]-\infty,+\infty[$.*

— *On a $\forall n \geq 0,\ f_n(x) = e^{1+\cos^{2n}(x)}e^{-|x|}$ est une produit de 2 fonctions mesurables (car $x \to e^{1+\cos^{2n}(x)}$ est continue, et $e^{-|x|}$ est aussi continue), alors $(f_n)_{n\geq 0}$ est suite de fonction mesurable sur $]-\infty,+\infty[$*

(b) ***On montre que $\exists g :]-\infty,+\infty[\to [0,+\infty[$ intégrable telle que***

$$|f_n| \leq g \ \ \textit{presque partout.}$$

i. ***On montre la domination.***
$\forall n \geq 0$, presque partout $x \in]-\infty,+\infty[$ puisque

$$\forall n \geq 0,\ \forall x \in]-\infty,+\infty[:\ \cos^{2n}(x) \leq 1$$

$$\begin{aligned}|f_n(x)| &= \left|e^{1+\cos^{2n}(x)}e^{-|x|}\right| \\ &= e^{1+\cos^{2n}(x)}e^{-|x|} \\ &\leq e^{1+1}e^{-|x|} \\ &\leq e^{2-|x|}\end{aligned}$$

alors

$$\forall n \geq 0,\ |f_n(x)| \leq g(x) = e^{2-|x|}, \quad \forall x \in]-\infty,+\infty[\ (p.p.\ x \in]-\infty,+\infty[)$$

ii. ***On montre que $\forall x \in [0,1],\ g(x) \geq 0,$.***
on a $\forall x \in]-\infty,+\infty[: e^{2-|x|} \geq 0$, alors

$$\forall x \in]-\infty,+\infty[,\ g(x) \geq 0$$

iii. ***On montre que g est intégrable, c-à-d $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|dx < +\infty$.***

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2-|x|}dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{2+x}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{2-x}dx \\ &= \left[e^{2+x}\right]_{-\infty}^{0} + \left[e^{2-x}\right]_{0}^{+\infty} \\ &= 2e^2 < +\infty\end{aligned}$$

Alors d'après $(i), (ii)$, et (iii), on obtient
$\exists g(x) = 1 :]-\infty,+\infty[\to [0,+\infty[$ intégrable telle que

$$|f_n(x)| \leq g(x),\ \forall x \in]-\infty,+\infty[\ (p.p.\ x \in]-\infty,+\infty[)$$

(c) ***On montre que $\lim_{n\to+\infty} f_n$ existe. c'est à dire on montre que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions convergente.***
On a
$$\lim_{n\to+\infty} \cos^{2n}(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A = \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\} \\ 0 & si\ x \in \mathbb{R}/A \end{cases} \tag{46}$$
avec $\lambda(A) = 0$ puisque A est dénombrable. Alors d'après (33) et (46) on obtient
$$\lim_{n\to+\infty} \cos^{2n}(x) = 0 \quad \boldsymbol{p.p.}\ x \in]-\infty, +\infty[$$
par suite
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{1-|x|} \quad \boldsymbol{p.p.} x \in]-\infty, +\infty[$$

Alors d'après $(a), (b), (c)$, toute les hypothèses du théorème de convergence dominée sont vérifiées, ainsi d'après (45)
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{1+\cos^{2n}(x)} e^{-|x|}\ dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} e^{1+\cos^{2n}(x)} e^{-|x|}\ dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{1-|x|}\ dx \\ &= 2e\end{aligned}$$

6. $\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{x}{n}\right) e^{-x}\ dx$. *On pose*
$$f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n}\right) e^{-x},\ \forall n \geq 1,\ \forall x \in [0, +\infty[$$

(a) ***On montre que $(f_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{M}_{[0,+\infty[}$*** *c'est à dire on montre que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions mesurables sur $[0, +\infty[$.*
— *On a $\forall n \geq 1$, $f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n}\right) e^{-x}$ est une produit de 2 fonctions mesurables (car $x \to \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$ est continue, et e^{-x} est aussi continue), alors $(f_n)_{n\geq 1}$ est suite de fonction mesurable sur $[0, +\infty[$*

(b) ***On montre que $\exists g : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ intégrable telle que***
$$|f_n| \leq g \quad \textit{presque partout.}$$

i. ***On montre la domination.***
$\forall n \geq 1$, $\forall x \in [0, +\infty[$
$$\begin{aligned}|f_n(x)| &= \left|\arctan\left(\frac{x}{n}\right) e^{-x}\right| \\ &\leq \frac{\pi}{2} e^{-x}\end{aligned}$$
alors
$$\forall n \geq 0,\ |f_n(x)| \leq g(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in [0, +\infty[\ (p.p.\ x \in [0, +\infty[)$$

ii. ***On montre que $\forall x \in [0,+\infty[,\ g(x) \geq 0$,.***
on a $\forall x \in [0,+\infty[$: $\frac{\pi}{2}e^{-x} \geq 0$, alors

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ g(x) \geq 0$$

iii. ***On montre que g est intégrable, c-à-d $\int_0^{+\infty} |g(x)|dx < +\infty$.***

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |g(x)|dx &= \int_0^{+\infty} g(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2}e^{-x}dx \\ &= \left[-\frac{\pi}{2}e^{-x}\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2} < +\infty\end{aligned}$$

Alors d'après $(i), (ii)$, et (iii), on obtient
$\exists g(x) = 1 : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ *intégrable telle que*

$$|f_n(x)| \leq g(x),\ \forall x \in [0,+\infty[\ (p.p.\ x \in][0,+\infty[)$$

(c) ***On montre que $\lim_{n\to+\infty} f_n$ existe. c'est à dire on montre que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions convergente.***
on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \arctan(0)\, e^{-x} = 0 \quad \forall x \in [0,+\infty[)$$

Alors d'après $(a), (b), (c)$, toute les hypothèses du théorème de convergence dominée sont vérifiées, ainsi d'après (45)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \arctan\left(\frac{x}{n}\right) e^{-x}\ dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \arctan\left(\frac{x}{n}\right) e^{-x}\ dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 0\ dx \\ &= 0\end{aligned}$$

Exercice 8 (***Théorème de Convergence dominée***)
Pour $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$, on pose

$$f_n(x) = nx(1-x)^n.$$

1. *Démontrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \geq 1$, on a $|f_n(x)| \leq 1$.*
2. *En déduire*
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nx(1-x)^n\ dx.$$

Solution de l'exercice : 8 *$\forall n \geq 1$ et $\forall x \in [0,1]$, on pose*

$$f_n(x) = nx(1-x)^n.$$

1. *Remarquons d'abord que pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0,1]$, on a $f_n(x) \geq 0$. Pour déterminer le maximum de f_n sur $[0,1]$, on dérive cette fonction :*

$$f_n'(x) = n(1-x)^n - n^2x(1-x)^{n-1} = n(1-x)^{n-1}\big(1-(n+1)x\big).$$

La dérivée s'annule en $x_n = 1/(n+1)$ et donc, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n(x_n) = \frac{n}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \leq 1. \tag{47}$$

2. — *On remarque que $\forall n \geq 1$, $f_n(x) = nx(1-x)^n$ est une produit de 2 fonctions mesurables (car $x \to nx$ est continue, et $x \to (1-x)^n$ est aussi continue), alors $(f_n)_{n\geq 1}$ est suite de fonction mesurable sur $[0,1]$*

   — *D'après l'équation (47), il existe une fonction g telle que*

$$\forall n \geq 1,\ |f_n(x)| \leq g(x) = 1, \quad \forall x \in [0,1]\ (p.p.\ x \in [0,1])$$

de plus la fonction g est positive et intégrale sur $[0,1]$, en effet :

   — $\forall x \in [0,1] : g(x) = 1 > 0$

   —

$$\int_0^1 |g(x)|dx = \int_0^1 1dx = 1 < +\infty$$

alors $\exists g(x) = 1 : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ intégrable telle que

$$|f_n(x)| \leq g(x),\ \forall x \in [0,1]\ (p.p.\ x \in ([0,1]) \tag{48}$$

   — *il reste a montrer que $\lim_{n\to+\infty} f_n$ existe. On a :*

$$\lim_{n\to+\infty} nx(1-x)^n = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Alors, toute les hypothèses du théorème de convergence dominée sont vérifiées, ainsi d'après (45)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} nx(1-x)^n\ dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} nx(1-x)^n\ dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} 0\ dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

Théorème d'interversion de $\int$ et $\sum$. (**Application du TCM**)

Théorème 6 *Soit* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré. Soit* $(f_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{M}_X^+$*, alors d'après le théorème de convergence monotone on a :*

$$\int_X \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\ d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n(x)\ d\mu \tag{49}$$

Théorème d'interversion de $\int$ et $\sum$. (**Application du TCD**)

Théorème 7 *Soit* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré. Soit* $(f_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{M}_X$*, si*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_X |f_n(x)|\ d\mu < +\infty$$

alors les fonctions,

$$f_n,\ \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n| \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \text{ sont intégrables}$$

et

$$\int_X \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\ dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n(x)\ dx \tag{50}$$

Théorème d'interversion de $\int$ et $\sum$. (**Application du TCD**)

Théorème 8 *Soit* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré. Soit* $(f_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{M}_X$*, intégrable. Si*

1. *la série de fonctions*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \text{ converge presque partout}$$

2. $\exists g : X \to [0, +\infty[$ *intégrable telle que*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k \right| \leq g \quad \text{presque partout.}$$

Alors,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k \text{ est intégrable}$$

et

$$\int_X \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\ dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n(x)\ dx \tag{51}$$

Exercice 9 (***Intégrale d'une série de fonctions***)

1. *Démontrer que*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^{2n}(1-x)dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x}.$$
2. *En déduire que*
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\ln 2.$$

Solution de l'exercice : 9

1. *On montre*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^{2n}(1-x)dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x}.$$

(a) ***1^{re} méthode : Théorème 6.***

On pose
$$\forall n\geq 0:\ f_n(x)=x^{2n}(1-x)$$
On montre que $(f_n)_{n\geq 1}\in\mathcal{M}^+_{]0,1[}$.

— *On a* $\forall n\geq 0:\ f_n(x)=x^{2n}(1-x)$ *est le produit de deux fonctions mesurables, car* $x\to x^{2n}$ *est une fonction continue sur* $]0,1[$ *et* $x\to(1-x)$ *est aussi continue sur* $]0,1[$, *donc* $(f_n)_{n\geq 1}$ *est une suite de fonctions mesurables sur* $]0,1[$.

— *On a* $\forall n\geq 0,\ \forall x\in]0,1[$
$$f_n(x)=x^{2n}(1-x)\geq 0$$

donc $(f_n)_{n\geq 1}\in\mathcal{M}_{]0,1[^+}$.
Alors d'après le théorème 6 et (49) on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^{2n}(1-x)dx&=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}(1-x)dx\\&=\int_0^1(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}dx\\&=\int_0^1(1-x)\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}x^{2k}dx\\&=\int_0^1(1-x)\lim_{n\to+\infty}\frac{1-x^{2(k+1}}{1-x^2}dx\\&=\int_0^1\frac{(1-x)}{1-x^2}dx\\&=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\end{aligned}$$

(b) ***2^{me} méthode : Théorème 7.***

— *D'après la* 1^{re} *méthode,* $(f_n)_{n\geq 1}\in\mathcal{M}_{]0,1[}$

— *Il reste à montrer que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_X |f_n(x)| \, d\mu < +\infty$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \left|x^{2n}(1-x)\right| \, dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x) \, dx \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \left(x^{2n} - x^{2n+1}\right) \, dx \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n+1} \left[x^{2n+1}\right]_0^1 - \frac{1}{2n+2} \left[x^{2n+2}\right]_0^1 \right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \right)
\end{aligned}$$

On remarque que

$$\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{4n^2+6n+2} \leq \frac{1}{4n^2}$$

On a la série de terme général $\dfrac{1}{4n^2}$ *est convergent, alors d'après le critère de comparaison, la série de terme général* $\dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2}$ *est aussi convergent, donc par suite*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \left|x^{2n}(1-x)\right| \, dx < +\infty$$

Finalement d'après le théorème 7 et (50) on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x) dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x) \, dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx
\end{aligned}$$

(c) 3^{me} ***méthode : Théorème 8.***

— *On d'après la* 1^{re} *méthode,* $(f_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{M}_{]0,1[}$.

— *On montre que* $(f_n)_{n\geq 1}$ *est* ***intégrables****. On a* $\forall n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f_n(x)| \, dx &= \int_0^1 \left|x^{2n}(1-x)\right| \, dx \\
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

donc $(f_n)_{n\geq 1}$ *est intégrable.*

— *On montre que*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k \text{ converge presque partout}$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^{2k}(1-x)\\ &= \frac{1}{1+x}\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in]0,1[\ (p.p.\ x \in]0,1[)$$

— *il reste à montrer que :* $\exists g :]0,1[\to [0,+\infty[$ *intégrable telle que*

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f_k\right| \leq g \quad \text{presque partout.}$$

On a

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} x^{2k}(1-x)\right|\\ &= \left|\frac{1-x^{2(k+1)}}{1+x}\right|\\ &= \frac{1-x^{2(k+1)}}{1+x}\\ &\leq \frac{1}{1+x}\end{aligned}$$

On pose $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $\forall x \in]0,1[$, *on remarque que* $x \in]0,1[$: $g(x) \geq 0$ *de plus* g *est intégrable sur* $]0,1[$ *car*

$$\begin{aligned}\int_0^1 |g(x)|\ dx &= \int_0^1 g(x)\ dx =\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\ dx =\\ &= \ln 2\end{aligned}$$

Par suite $\exists g :]0,1[\to [0,+\infty[$ *intégrable telle que*

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| \leq g(x) = \frac{1}{1+x}, \forall x \in]0,1[\ (\boldsymbol{p.p.}\ x \in]0,1[)$$

Finalement d'après le théorème 8 et (51) on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^{2n}(1-x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^{2n}(1-x)\ dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$$

2. *on a*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\ldots\ldots$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^{2n}(1-x)dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$$
$$= \ln 2$$

Lemme de Fatou

Lemme 1 *Soit* $(X,\mathcal{F},\mu)$ *un espace mesuré. Soit* $(f_n)_{n\geq 1}\in\mathcal{M}_X^+$*,alors*

$$\liminf_{n\to+\infty} f_n \text{ est mesurable positive}$$

et

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty}\int_X f_n d\mu \tag{52}$$

Exercice 10 *Montrer que*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\ dx = +\infty.$$

Solution de l'exercice : 10 *On pose* $\forall n\geq 1, \forall x\in[0,+\infty[,\ f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}$ *La suite de fonction* $(f_n)_{n\geq 1}$ *est une fonction mesurable et positive sur* $[0,+\infty[$ *(car continue sur* $[0,+\infty[$*), de plus*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x} = e^x e^{-x} = 1$$

donc

$$\liminf_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$$

alors d'après le lemme de Fatou (lemme 1) et (52) on a :

$$+\infty = \int_0^{+\infty} 1\ dx = \int_0^{+\infty} \liminf_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\ dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\ dx$$

d'où

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\ dx = +\infty$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x}\ dx = +\infty$$