Université Mostefa Ben Boulaïd - Batna 2
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques
Mathématiques Appliquées Master 2

Solution de TD 03

Exercice 1 *Soit* $A_t = \frac{1}{t}\int_0^t \ln S_s ds$ *et* $dS_t = S_t(rdt + \sigma dB_t)$ *où* r *et* σ *sont des constantes.*

1. *Montrer que* $lnS_s = lnS_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})(s-t) + \sigma(B_s - B_t)$ *pour* $s \geq t$.
2. *Montrer que* A_t *est une variable gaussienne.*
3. *Soit* $G(t,T) = \frac{1}{T}\int_t^T (B_s - B_t)ds$. *Montrer que*
$$A_T = \frac{t}{T}A_t + (1 - \frac{t}{T})\left(\ln S_t + \frac{1}{2}(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\right) + \sigma G(t,T)$$
4. *Montrer que* $G(t,T)$ *est une variable gaussienne indépendante de* $\mathcal{F}_t$, *dont on calculera l'espérance conditionnelle et la variance conditionnelle (par rapport à* $\mathcal{F}_t$*).*
5. *En déduire que* $A_T = Z_t + U$ *où* Z_t *est* $\mathcal{F}_t$ *mesurable et* U *une variable gaussienne indépendante de* $\mathcal{F}_t$. *Montrer que* $\alpha(t)e^{Z_t} = \mathbb{E}(e^{A_T} \mid \mathcal{F}_t)$,*où l'on précisera la valeur de* α.

Solution de l'exercice : 1 *Soit*

$$A_t = \frac{1}{t}\int_0^t \ln S_s ds \tag{1}$$

et

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dB_t) \tag{2}$$

où r *et* σ *sont des constantes.*

1. *La solution explicite de l'EDS* (2) *est donnée par*
$$S_t = S_0 \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t\right) \tag{3}$$
alors, d'après (3) *on a :*
$$\ln S_t = \ln S_0 + (r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t$$
et par suite :
$$lnS_s = lnS_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})(s-t) + \sigma(B_s - B_t), \quad s \geq t \tag{4}$$
2. *Le processus* $\ln S_t$ *est un processus gaussien, d'où* A_t *est une variable gaussienne.*

3. *D'après l'équation* (1) *on a*

$$
\begin{aligned}
A_T =& \frac{1}{T}\int_0^T \ln S_s ds \\
=& \frac{1}{T}\left(\int_0^t \ln S_s ds + \int_t^T \ln S_s ds\right) \\
=& \frac{1}{T}\left(tA_t + \int_t^T lnS_t + (r-\frac{\sigma^2}{2})(s-t) + \sigma(B_s - B_t)ds\right) \\
=& \frac{1}{T}\left(tA_t + lnS_t(T-t) + \frac{1}{2}(r-\frac{\sigma^2}{2})(T^2-t^2) - (r-\frac{\sigma^2}{2})t(T-t) + \sigma\int_t^T (B_s-B_t)ds\right) \\
=& \frac{t}{T}A_t + (1-\frac{t}{T})\left(lnS_t + \frac{1}{2}(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)\right) + \sigma G(t,T)
\end{aligned}
$$

puisque $G(t,T) = \frac{1}{T}\int_t^T (B_s - B_t)ds$

4. *Soit* $G(t,T) = \frac{1}{T}\int_t^T (B_s - B_t)ds$. *Le processus* $s \to B_s - B_t$ *est gaussien, d'où* $G(t,T)$ *est une variable gaussienne. Le processus* $(B_s - B_t, s \geq t)$ *est indépendant de* $\mathcal{F}_t$ *donc* $G(t,T)$ *aussi.*

   —

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(G(t,T) \mid \mathcal{F}_t) =& \mathbb{E}(\frac{1}{T}\int_t^T (B_s - B_t)ds \mid \mathcal{F}_t) \\
=& \frac{1}{T}\int_t^T \mathbb{E}(B_s - B_t \mid \mathcal{F}_t)ds \\
=& \frac{1}{T}\int_t^T \mathbb{E}(B_s - B_t)ds \\
=& 0
\end{aligned}
$$

   —

$$
\begin{aligned}
Var(G(t,T) \mid \mathcal{F}_t) =& \mathbb{E}(G^2(t,T) \mid \mathcal{F}_t) \\
=& \mathbb{E}(G^2(t,T)) \\
=& \frac{1}{T^2}\int_t^T\int_t^T \mathbb{E}\left((B_s-B_t)(B_u-B_t)\right) dsdu.
\end{aligned}
$$

   On a :

$$\mathbb{E}\left((B_s-B_t)(B_u-B_t)\right) = s \wedge u - t$$

   alors,

$$Var(G(t,T)) = \frac{3}{2T^2}\left(\frac{1}{3}T^3 - \frac{1}{3}t^3 + tT(t-T)\right)$$

Exercice 2 *Soit* $V_T = \frac{1}{h}\int_{T-h}^T S_u du$ *où* h *est un nombre réel donné tel que* $0 < h < T$ *et*

$dS_t = S_t(bdt + \sigma dB_t)$ où b et σ sont des constantes. Soit X le processus défini par

$$e^{-rt}X_t = \mathbb{E}\left[e^{-rT}V_T \mid \mathcal{F}_t\right].$$

1. *Quelle est la valeur de X_T ?*
2. *Exprimer X_t en fonction de S_t pour $t \le T-h$.*
3. *Exprimer X_t en fonction de S_t pour $T-h \le t \le T$ et de $(S_u, T-h \le u \le t)$*
4. *Montrer que $dX_t = X_t r dt + \sigma S_t \gamma_t dB_t$ avec $\gamma_t = \mathbf{1}_{t<T-h}\dfrac{1-e^{-rh}}{rh} + \mathbf{1}_{T-h<t<T}\dfrac{1-e^{-r(T-t)}}{rh}$*

Solution de l'exercice : 2

1. *On a*

$$V_T = \frac{1}{h}\int_{T-h}^{T} S_u du, \quad 0 < h < T$$

et

$$e^{-rt}X_t = \mathbb{E}\left[e^{-rT}V_T \mid \mathcal{F}_t\right].$$

alors

$$e^{-rT}X_T = \mathbb{E}\left[e^{-rT}V_T \mid \mathcal{F}_T\right] \Rightarrow e^{-rT}X_T = e^{-rT}V_T$$

puisque V_T est $\mathcal{F}_T$ mesurable, donc $X_T = V_T$

2. *Pour $t \le T-h$, on a*

$$\begin{aligned}
e^{-rt}X_t =& \mathbb{E}\left[e^{-rT}V_T \mid \mathcal{F}_t\right] \\
=& \mathbb{E}\left[e^{-rT}\frac{1}{h}\int_{T-h}^{T} S_u du \mid \mathcal{F}_t\right] \\
=& e^{-rT}\frac{1}{h}\int_{T-h}^{T} \mathbb{E}\left[S_u \mid \mathcal{F}_t\right] du \\
=& e^{-rT}\frac{1}{h}\int_{T-h}^{T} e^{ru}\mathbb{E}\left[e^{-ru}S_u \mid \mathcal{F}_t\right] du \\
=& e^{-rT}\frac{1}{h}\int_{T-h}^{T} e^{ru}\mathbb{E}\left[\tilde{S}_u \mid \mathcal{F}_t\right] du \\
=& e^{-rT}\frac{1}{h}\int_{T-h}^{T} e^{ru}\tilde{S}_t du \\
=& e^{-rT}\frac{1}{h}\tilde{S}_t\left[\frac{1}{r}e^{ru}\right]_{T-h}^{T} \\
=& e^{-rT}\frac{1}{rh}\tilde{S}_t(e^{rT} - e^{r(T-h)})
\end{aligned}$$

donc, pour $t \le T-h$, on a

$$X_t = S_t\frac{1-e^{-rh}}{rh} \tag{5}$$

3. *Pour $T-h \leq t \leq T$ On a*

$$\begin{aligned}
e^{-rt}X_t =& e^{-rT}\frac{1}{h}\int_{T-h}^{T}\mathbb{E}\left[S_u \mid \mathcal{F}_t\right]du \\
=& e^{-rT}\frac{1}{h}\int_{T-h}^{t}\mathbb{E}\left[S_u \mid \mathcal{F}_t\right]du + e^{-rT}\frac{1}{h}\int_{t}^{T}\mathbb{E}\left[S_u \mid \mathcal{F}_t\right]du \\
=& e^{-rT}\frac{1}{h}\int_{T-h}^{t}S_u du + e^{-rT}\frac{1}{rh}\tilde{S}_t(e^{rT}-e^{rt}) \\
=& \frac{e^{-rT}}{h}\int_{T-h}^{t}S_u du + e^{-rt}S_t\frac{1-e^{-r(T-t)}}{rh}
\end{aligned}$$

donc, pour $T-h \leq t \leq T$

$$X_t = \frac{e^{-r(T-t)}}{h}\int_{T-h}^{t}S_u du + S_t\frac{1-e^{-r(T-t)}}{rh} \tag{6}$$

4. — *On sait que $d\tilde{S}_t = \sigma\tilde{S}_t dB_t$, alors d'après (5) pour $t \leq T-h$, on a*

$$\begin{aligned}
& e^{-rt}X_t &=& \tilde{S}_t\frac{1-e^{-rh}}{rh} \\
\Rightarrow\ & d\left(e^{-rt}X_t\right) &=& d\left(\tilde{S}_t\frac{1-e^{-rh}}{rh}\right) \\
\Rightarrow\ & e^{-rt}dX_t &=& re^{-rt}X_t dt + \sigma\tilde{S}_t\frac{1-e^{-rh}}{rh}dB_t \\
\Rightarrow\ & dX_t &=& rX_t dt + \sigma S_t\frac{1-e^{-rh}}{rh}dB_t
\end{aligned}$$

et donc

$$dX_t = rX_t dt + \sigma S_t\frac{1-e^{-rh}}{rh}dB_t, \quad t \leq T-h \tag{7}$$

— *On sait que $d\tilde{S}_t = \sigma\tilde{S}_t dB_t$, alors d'après (6) pour $T-h \leq t \leq T$, on a*

$$\begin{aligned}
& e^{-rt}X_t &=& \frac{e^{-rT}}{h}\int_{T-h}^{t}S_u du + \tilde{S}_t\frac{1-e^{-r(T-t)}}{rh} \\
\Rightarrow\ & d\left(e^{-rt}X_t\right) &=& d\left(\frac{e^{-rT}}{h}\int_{T-h}^{t}S_u du + \tilde{S}_t\frac{1-e^{-r(T-t)}}{rh}\right) \\
\Rightarrow\ & e^{-rt}dX_t &=& re^{-rt}X_t dt + d\left(\frac{e^{-rT}}{h}\int_{T-h}^{t}S_u du\right) + d\left(\tilde{S}_t\frac{1-e^{-r(T-t)}}{rh}\right) \\
\Rightarrow\ & e^{-rt}dX_t &=& re^{-rt}X_t dt + \frac{e^{-rT}}{h}S_t dt + d\tilde{S}_t\frac{1-e^{-r(T-t)}}{rh} + \tilde{S}_t d\left(\frac{1-e^{-r(T-t)}}{rh}\right) \\
\Rightarrow\ & e^{-rt}dX_t &=& re^{-rt}X_t dt + \frac{e^{-rT}}{h}S_t dt + \sigma\tilde{S}_t\frac{1-e^{-r(T-t)}}{rh}dB_t + \tilde{S}_t\frac{-re^{-r(T-t)}}{rh}dt \\
\Rightarrow\ & e^{-rt}dX_t &=& re^{-rt}X_t dt + \frac{e^{-rT}}{h}S_t dt + \sigma\tilde{S}_t\frac{1-e^{-r(T-t)}}{rh}dB_t - \frac{e^{-rT}}{h}S_t dt \\
\Rightarrow\ & dX_t &=& rX_t dt + \sigma S_t\frac{1-e^{-r(T-t)}}{rh}dB_t
\end{aligned}$$

et donc

$$dX_t = rX_t dt + \sigma S_t\frac{1-e^{-r(T-t)}}{rh}dB_t, \quad T-h \leq t \leq T \tag{8}$$

alors, d'après (7) et (8) on a

$$dX_t = rX_tdt + \sigma S_t\left(\mathbf{1}_{t<T-h}\frac{1-e^{-rh}}{rh} + \mathbf{1}_{T-h<t<T}\frac{1-e^{-r(T-t)}}{rh}\right)dB_t$$

Exercice 3 *Soit δ une fonction borélienne bornée et*

$$dS_t = S_t((r-\delta(t))dt + \sigma dW_t), S_0 = x.$$

1. *Montrer que $e^{-rt}S_t + \int_0^t \delta(s)e^{-rs}S_sds$ est une martingale locale.*
2. *Écrire explicitement la solution S en fonction de S_0, r, δ, σ et W.*
3. *Calculer espérance et variance de S.*
4. *Calculer avec le minimum de calculs (on peut utiliser des résultats connus), $\mathbb{E}((S_T-K)_+ \mid \mathcal{F}_t)$ dans le cas δ constant.*

Solution de l'exercice : 3

1. *On pose $Z_t = e^{-rt}S_t + \int_0^t \delta(s)e^{-rs}S_sds$, On a alors*

$$\begin{aligned}
dZ_t =& d\left(e^{-rt}S_t + \int_0^t \delta(s)e^{-rs}S_sds\right)\\
=& d\left(e^{-rt}S_t\right) + d\left(\int_0^t \delta(s)e^{-rs}S_sds\right)\\
=& -re^{-rt}S_tdt + e^{-rt}dS_t + \delta(t)e^{-rt}S_tdt\\
=& -re^{-rt}S_tdt + e^{-rt}\left[S_t((r-\delta(t))dt + \sigma dW_t)\right] + \delta(t)e^{-rt}S_tdt\\
=& -re^{-rt}S_tdt + re^{-rt}S_tdt - \delta(t)e^{-rt}S_tdt + \sigma e^{-rt}S_tdW_t + \delta(t)e^{-rt}S_tdt\\
=& \sigma e^{-rt}S_tdW_t
\end{aligned}$$

Donc le processus Z est une martingale locale.

2. *On a*

$$dS_t = S_t((r-\delta(t))dt + \sigma dW_t), S_0 = x.$$

pose $Y_t = \ln S_t$, on applique la formule d'Itô sur $f(x) = \ln x$ On a :

$$\begin{aligned}
Y_t = \ln S_t =& \ln S_0 + \int_0^t \frac{dS_s}{S_s} - \frac{1}{2}\int_0^t -\frac{1}{S_s^2}\sigma^2 S_s^2 ds\\
=& \ln S_0 + \int_0^t ((r-\delta(s))ds + \sigma dW_s) + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 ds\\
=& \ln S_0 - \int_0^t \delta(s)ds + \int_0^t (r - \frac{\sigma^2}{2})ds + \int_0^t \sigma dW_s\\
=& \ln S_0 - \int_0^t \delta(s)ds + (r - -\frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t
\end{aligned}$$

alors

$$S_t = x\exp\left(rt - \int_0^t \delta(s)ds\right)\exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right) \tag{9}$$

3. — *On sait que* $X_t = \exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right)$ *est une martingale, alors*

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0) = 1$$

, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_t) =& \mathbb{E}\left(x \exp\left(rt - \int_0^t \delta(s)ds\right) \exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right)\right)\\ =& x \exp\left(rt - \int_0^t \delta(s)ds\right) \mathbb{E}\left(\exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right)\right)\\ =& x \exp\left(rt - \int_0^t \delta(s)ds\right).\end{aligned}$$

— *on a :* $Var(S_t) = \mathbb{E}(S_t^2) - \mathbb{E}(S_t^2)$, *d'après* (9) *on a*

$$\begin{aligned}S_t^2 =& x^2 \exp\left(2rt - 2\int_0^t \delta(s)ds\right) \exp\left(2\sigma W_t - \sigma^2 t\right)\\ =& x^2 \exp\left(2rt - 2\int_0^t \delta(s)ds + \sigma^2 t\right) \exp\left(2\sigma W_t - \frac{(2\sigma)^2}{2} t\right)\end{aligned}$$

comme $X_t = \exp\left(2\sigma W_t - \frac{(2\sigma)^2}{2} t\right)$ *est une martingale, alors*

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0) = 1$$

, donc

$$\mathbb{E}(S_t^2) = x^2 \exp\left(2rt - 2\int_0^t \delta(s)ds + \sigma^2 t\right)$$

et par suite

$$\begin{aligned}Var(S_t) =& \mathbb{E}(S_t^2) - \mathbb{E}(S_t^2)\\ =& x^2 \exp\left(2rt - 2\int_0^t \delta(s)ds + \sigma^2 t\right) - \left(x \exp\left(rt - \int_0^t \delta(s)ds\right)\right)^2\\ =& x^2 \exp\left(2rt - 2\int_0^t \delta(s)ds + \sigma^2 t\right) - x^2 \exp\left(2rt - 2\int_0^t \delta(s)ds\right)\\ =& x^2 \exp\left(2rt - 2\int_0^t \delta(s)ds\right)\left(\exp(\sigma^2 t) - 1\right)\end{aligned}$$

4. *d'après le modèle de Black et Scholes, on sait que, si*

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$$

alors

$$\begin{aligned}V_t =& \mathbb{E}^*\left(e^{-r(T-t)}(S_T - K)_+ \mid \mathcal{F}_t\right)\\ =& S_t \mathcal{N}(d_1) - K e^{-r\theta} \mathcal{N}(d_2),\end{aligned}$$

avec

$$d_1 = \frac{log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta}{\sigma\sqrt{\theta}} \quad et \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\theta} \quad et \quad \theta = T - t$$

donc on pose $\mu = r - \delta$

$$\mathbb{E}\left((S_T - K)_+ \mid \mathcal{F}_t\right) = e^{r\theta} S_t \mathcal{N}(d_1) - K\mathcal{N}(d_2)$$

avec

$$d_1 = \frac{log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta}{\sigma\sqrt{\theta}} \quad et \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\theta} \quad et \quad \theta = T - t$$

Exercice 4

1. *Calculer* $\mathbb{E}(e^{-at}(S_t - K)_+)$ *quand*

$$S_t = xe^{bt}exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t)$$

2. *Écrire la formule obtenue quand* $a = b = r$ *et quand* $a = r$, $b = r - \delta$.
3. *Calculer*

$$\mathbb{E}(e^{-rt}(S_t - K)_+ \mid F_s) \quad pour \quad s < t$$

Solution de l'exercice : 4 *On a :*

$$S_t = xe^{bt}exp(\sigma W_t - \sigma^2 t)$$

1. *On calcul* $\mathbb{E}(e^{-at}(S_t - K)_+)$. *On a :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{-at}(S_t - K)_+) =& \mathbb{E}(e^{-at}(xe^{bt}exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t) - K)_+) \\ =& \mathbb{E}((xe^{(b-a)t}exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}) - e^{-at}K)_+)\end{aligned}$$

On a $W_t \sim \mathbb{N}(0,t)$, *alors* $g = \frac{W_t}{\sqrt{t}} \sim \mathbb{N}(0,1)$, *par suite* $W_t = \sqrt{t}g$ *et donc*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{-at}(S_t - K)_+\right) =& \mathbb{E}\left((xe^{(b-a)t}exp(\sigma\sqrt{t}g - \frac{\sigma^2}{2}t) - e^{-at}K)_+\right) \\ =& \int_{-\infty}^{+\infty}\left(xe^{(b-a)t}exp(\sigma\sqrt{t}y - \frac{\sigma^2}{2}t) - e^{-at}K\right)_+ \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
& xe^{(b-a)t}exp(\sigma\sqrt{t}y - \frac{\sigma^2}{2}t) - e^{-at}K \geq 0 \\
\Rightarrow & xe^{bt}exp(\sigma\sqrt{t}g - \frac{\sigma^2}{2}t) \geq K \\
\Rightarrow & exp(\sigma\sqrt{t}y - \frac{\sigma^2}{2}t) \geq e^{-bt}\frac{K}{x} \\
\Rightarrow & \sigma\sqrt{t}y - \frac{\sigma^2}{2}t \geq \ln\left(\frac{K}{x}\right) - bt \\
\Rightarrow & y \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{x}\right) + (\frac{\sigma^2}{2} - b)t}{\sigma\sqrt{t}} \\
\Rightarrow & y \geq -\frac{\ln\left(\frac{x}{k}\right) + (b - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}} = -d_2
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{-at}(S_t - K)_+\right) &= \int_{-d_2}^{+\infty}\left(xe^{(b-a)t}exp(\sigma\sqrt{t}y - \frac{\sigma^2}{2}t) - e^{-at}K\right)\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy \\
&= \int_{-\infty}^{d_2}\left(xe^{(b-a)t}exp(-\sigma\sqrt{t}y - \frac{\sigma^2}{2}t) - e^{-at}K\right)\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy \\
&= \int_{-\infty}^{d_2} xe^{(b-a)t}exp(\sigma\sqrt{t}y - \frac{\sigma^2}{2}t)\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy - \int_{-\infty}^{d_2} e^{-at}K\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy \\
&= xe^{(b-a)t}\int_{-\infty}^{d_2}\frac{e^{-\frac{(y+\sigma\sqrt{t})^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy - e^{-at}K\int_{-\infty}^{d_2}\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy \\
&= xe^{(b-a)t}\int_{-\infty}^{(d_2+\sigma\sqrt{t})}\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy - e^{-at}K\int_{-\infty}^{d_2}\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy
\end{aligned}$$

alors

$$\mathbb{E}\left(e^{-at}(S_t - K)_+\right) = xe^{(b-a)t}\mathcal{N}(d_1) - e^{-at}K\mathcal{N}(d_2) \tag{10}$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{x}{k}\right) + (b + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}} \quad et \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} \tag{11}$$

2. *D'après (10) et (11) on a :*
   — *Pour* $a = b = r$

$$\mathbb{E}\left(e^{-rt}(S_t - K)_+\right) = x\mathcal{N}(d_1) - e^{-rt}K\mathcal{N}(d_2)$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{x}{k}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}} \quad et \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

— *Pour* $a = r$, $b = r - \delta$ *Pour* $a = b = r$

$$\mathbb{E}\left(e^{-rt}(S_t - K)_+\right) = xe^{-\delta t}\mathcal{N}(d_1) - e^{-rt}K\mathcal{N}(d_2)$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln\left(\dfrac{x}{k}\right) + (r - \delta + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}} \quad et \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

3. *on remplace* S_t *par*

$$S_s \times \frac{S_t}{S_s} = S_s \exp(\sigma(W_t - W_s) - \sigma^2(t - s))$$

on a S_s *est* $\mathcal{F}_s$ *mesurable, et* $W_t - W_s$ *est indépendante de* $\mathcal{F}_s$.