Solution TD 02 Probabilités L2

2021/2022

Suite Ex 10 — Ex 13

Exercice 10: (Loi binomiale vers loi normale)

1) $X \sim \mathcal{B}(1000, 0{,}03)$; on peut approximer la loi de Probabilité de X par une loi normale de paramètre

$\mu = np = 30$ et $\sigma^2 = npq = 29{,}1 \approx 5{,}4^2$.

Puisque $n = 100 > 30$; $np = 30 > 15$ et

$npq = 970 > 5$.

2) On a d'après Q_1 $X \sim \mathcal{N}(30, 5{,}4^2)$ alors:

$$Z = \frac{X - 30}{5{,}4} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Ici on utilise la correction de Continuité

$$P(X > 50) \underset{C.C}{\approx} \mathbb{P}(X \geq 50 + 0{,}5) = \mathbb{P}(X \geq 50{,}5)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{X-30}{5.4} \geq \frac{50{,}5 - 30}{5.4}\right)$$

$$= \mathbb{P}(Z \geq 3{,}79) = 1 - \mathbb{P}(Z < 3{,}79)$$

"Puisque la loi est Continue $\mathbb{P}(Z < 3{,}79) = \mathbb{P}(Z \leq 3{,}79)$"

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X > 50) = 1 - \underbrace{\mathbb{P}(Z \leq 3{,}79)}_{\text{table 1}} = 1 - 0{,}99992 = 0{,}00008.$$

3. $$\mathbb{P}(20 \leq X \leq 40) \underset{C.C}{\approx} \mathbb{P}(20 - 0{,}5 \leq X \leq 40 + 0{,}5)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{19{,}5 - 30}{5{,}4} \leq Z \leq \frac{40{,}5 - 30}{5{,}4}\right)$$

$$= \mathbb{P}(-1{,}94 \leq Z \leq 1{,}94)$$

$$= 2\underbrace{\mathbb{P}(Z \leq 1{,}94)}_{\text{table 1}} - 1 = 2(0{,}9738) - 1$$
$$= 0{,}9476$$

4. $\mathbb{P}(|X-30| \leq 15) = \mathbb{P}(-15 \leq X-30 \leq 15)$

$$= \mathbb{P}(-15 \leq X \leq 15)$$
$$\underset{C.C}{\approx} \mathbb{P}(-15-0{,}5 \leq X \leq 15+0{,}5)$$
$$= \mathbb{P}(-2{,}78 \leq Z < 2{,}78)$$
$$= 2\underbrace{\mathbb{P}(Z \leq 2{,}78)}_{\text{table 1}} - 1 = 2.(0{,}9937) - 1$$
$$= \underline{\underline{0{,}9874}}$$

<u>Exercice 11</u> (Loi <u>binomiale vers loi de Poisson</u>)

1. $X \sim \mathcal{B}(200, 0{,}01)$
2. Puisque $n = 200 \geq 30$ et $p = 0{,}01 < 0{,}1$, alors on peut approximer la loi de probabilité de X par une loi de poisson de paramètre $\lambda = np = 2$.

$$X \sim \mathcal{P}(2)$$

3. $\mathbb{P}(X>4) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 4)$

$$= 1 - [\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \cdots + \mathbb{P}(X=4)]$$

avec $X \sim \mathcal{P}(2)$: $\mathbb{P}(X=k) = e^{-2} \cdot \frac{2^k}{k!}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X>4) = 1 - e^{-2}\left[1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!}\right]$$
$$= 0{,}0526.$$

Exercice 12 : (Loi de Poisson vers une loi normale)

1) On a par minute $\mathbb{E}(X) = \lambda = 1,4$ alors

$X \sim \mathcal{P}(1,4)$

alors, entre 9^h et $9^h : 15$ ou 15 minutes donc

$\mathbb{E}(X) = 1,4 \times 15 = 21 \Rightarrow X \sim \mathcal{P}(21)$.

2) Comme $\lambda = 21 > 15$, alors on peut approximer la loi de X par une loi normale de paramètre

$\mu = \sigma^2 = \lambda$ $\quad (\mu = 21$ et $\sigma^2 = 21 = 4,58^2)$

c-à-d $X \sim \mathcal{N}(21, 4,58^2)$

Par suite $Z = \dfrac{X - 21}{4,58} \sim \mathcal{N}(0,1)$ donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > 25) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 25) &\underset{c.c}{\approx} 1 - \mathbb{P}(X \leq 25 + 0,5) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X \leq 25,5) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{25,5 - 21}{4,58}\right) \\
&= 1 - \underbrace{\mathbb{P}(Z \leq 0,98)}_{\text{table 1}} \\
&= 1 - 0,8365 \\
&= 0,1635.
\end{aligned}$$

Exercice 13 (Loi hypergeometrique vers Loi binomiale)

1. $X \sim \mathcal{H}(N=200, n=10, P=0{,}075)$

2. * $P(X=2) = \dfrac{C_{15}^{2}\, C_{185}^{8}}{C_{200}^{10}} = 0{,}1365 = 13{,}65\ \%$

* $P(3 < X \leq 5) = P(X=4) + P(X=5) = 0{,}003347$
$= 0{,}3347\ \%$

3. Puisque $N = 200 > 10 \cdot n = 100$, alors On peut approximer la loi de X vers la loi binomiale de paramètre $n=10$ et $p=0{,}075$

c.à.d $X \sim \mathcal{B}(10, 0{,}075)$

Par suite $P(X=k) = C_{10}^{k} \cdot (0{,}075)^{k} (0{,}925)^{10-k}$
$k \in \{0, 1, —, 10\}$

– les valeurs approchées des probabilités précedente sont:

* $P(X=2) = C_{10}^{2} \cdot (0{,}075)^{2} (0{,}925)^{8} = 0{,}1366 = 13{,}66\ \%$

* $P(\cancel{3} < X \leq 5) = P(X=4) + P(X=5)$
$= C_{10}^{4} (0{,}075)^{4} (0{,}925)^{6} + C_{10}^{5} (0{,}075)^{5} (0{,}925)^{5}$

$= 0{,}004567 \approx 45{,}67.$