Université de Batna 2
Faculté des Mathématiques et Informatique
Département de mathématiques

$3^{ème}$ année mathématiques
Année 2020-2021
Sidi ali Fatima Zohra[1]

Série des exercices 1
Optimisation sans contraintes -LMD- S5

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Calculer $\nabla f(x,y)$.
3. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$?
4. Que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Calculer $\nabla f(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$; calculer ensuite $\nabla f(0,0)$.
3. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?
4. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$?

Exercice 3

Soit la fonction de deux variables

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4y^2x^3 - y^5 - 2x^7}{3x^4+2y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Soit (v_1, v_2) un vecteur unitaire du plan. En utilisant la définition théorique de la dérivée directionnelle, déterminer (en fonction de v_1, v_2) la dérivée directionnelle $\partial_v f(0,0)$ (si elle existe) dans la direction $v = (v_1, v_2)$ au point $(0,0)$.

[1]f.sidiali@univ-batna2.dz

Exercice 4

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :
$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = e^{2x+y}$, soit $a = (1,2)$, $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

— Vérifie que v est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$.

— Déterminer la dérivée de f dans la direction v au point a.

Exercice 5

Calculer les polynômes de Taylor d'ordre 2 au voisinage du point $(0,0)$ des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes

1. $f(x,y) = \sin x . \sin y$,
2. $f(x,y) = 1 + x + y + x^2 - xy + y^2$.

Exercice 6

Soient

1. $$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \langle c, x\rangle + b \end{aligned} \qquad c, x \in \mathbb{R}^n \text{ et } b \in \mathbb{R}. \quad \text{Calculer } \bigtriangledown f(x), \bigtriangledown^2 f(x).$$

2. $$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto g(x) = Lx + b \end{aligned} \qquad L \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \text{ et } b \in \mathbb{R}^m. \quad \text{Calculer } Jg(x).$$

3. $$\begin{aligned} k : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto k(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c \end{aligned} \qquad A \in M_n(\mathbb{R}),\ b, x \in \mathbb{R}^n \text{ et } c \in \mathbb{R}.$$
   Calculer $\bigtriangledown k(x), \bigtriangledown^2 k(x)$.