Université de Batna 2 $2^{ème}$ **année Mathématiques**
Faculté des Mathématiques et Informatique **Année 2020-2021**
Département de mathématiques **Sidi ali Fatima Zohra**[1]

Corrigé type TD 2
Géométrie des courbes et surfaces

Solution de l'exercice 1

1. On cherche le point multiple de la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = 2t + t^2, \\ y(t) = 2t - \dfrac{1}{t^2}, \qquad t \in \mathbb{R}^*. \end{cases}$$

On cherche $t \neq u$ tel que $M(t) = M(u)$, c'est à dire :

$$\begin{cases} 2t + t^2 = 2u + u^2, \\ 2t - \dfrac{1}{t^2} = 2u - \dfrac{1}{u^2}, \\ t \neq u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 2u = -t^2 + u^2, \\ 2t - 2u = \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{u^2}, \\ t \neq u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(t-u) = -(t-u)(t+u), \\ 2(t-u) = \dfrac{-(t-u)(t+u)}{t^2u^2}, \\ t \neq u \end{cases}$$

$$\begin{cases} t + u = -2, \\ t + u = -2t^2u^2 \\ t \neq u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + u = -2, \\ t^2u^2 = 1 \\ t \neq u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + u = S = -2, \\ tu = P = -1 \\ t \neq u \end{cases}$$

alors t et u sont les racines de l'équation $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$ donc $t = -1 - \sqrt{2}$ et $u = -1 + \sqrt{2}$.
Maintenant on cherche les coordonnées du point multiple, on utilise $t^2 + 2t - 1 = 0$, on obtient $x(t) = 2t + t^2 = 1$, et
$y(t) = 2t - \dfrac{1}{t^2} = 2t - \dfrac{1}{-2t+1} = \dfrac{-4t^2 + 2t - 1}{-2t+1} = \dfrac{10t - 5}{-2t+1} = -5$. Alors, il y a un seul point multiple de coordonnées $(1, -5)$.

2. — On cherche les points régulière de la courbe paramétrée

$$\gamma(t) = (\tan(\frac{t}{3}), \sin t)$$

On a γ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{-(\frac{3\pi}{2}+3k\pi)}$,$k \in \mathbb{Z}$, et

$$x'(t) = \frac{1}{3}\frac{1}{\cos^2(\frac{t}{3})} = \frac{1}{3}(1 + \tan^2(\frac{t}{3})) > 0,$$
$$y'(t) = \cos(t),$$

on trouve que x' ne s'annule jamais, alors la courbe paramétrée γ est régulière pour tout $t \in \mathbb{R}^{-(\frac{3\pi}{2}+3k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$.

[1]f.sidiali@univ-batna2.dz

— On cherche les points régulière de la courbe paramétrée

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$$

On a γ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$x'(t) = -3\cos^2 t \sin t,$$
$$y'(t) = 3\sin^2 t \cos(t),$$

alors

$$x'(t) = 0 \Rightarrow \cos t \sin t = 0 \Rightarrow \cos t = 0 \vee \sin t = 0 \Rightarrow t = \frac{k\pi}{2}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$
$$y'(t) = 0 \Rightarrow \cos t \sin t = 0 \Rightarrow t = \frac{k\pi}{2}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Les point singuliers sont $M(\frac{k\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$, on conclut que la courbe paramétrée γ est régulière pour tout $t \in \mathbb{R}^{-(\frac{k\pi}{2})}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. — On cherche les points singuliere de la courbe paramétrée

$$\gamma(t) = (3t^2, 2t^3)$$

On a γ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$x'(t) = 6t,$$
$$y'(t) = 6t^3,$$

alors

$$x'(t) = 0 \Rightarrow 6t = 0 \Rightarrow t = 0,$$
$$y'(t) = 0 \Rightarrow 6t^2 = 0 \Rightarrow t = 0,$$

Le seul point singulier est $M(0) = (0, 0)$.

— On cherche les points singuliere de la courbe paramétrée

$$\gamma(t) = (\frac{t^3}{t^2-1}, \frac{t(3t-2)}{3(t-1)})$$

On a γ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{-\{-1,1\}}$, et

$$x'(t) = \frac{t^4 - 3t^2}{(t^2-1)^2},$$
$$y'(t) = \frac{3t^2 - 6t + 2}{3(t-1)^2},$$

alors

$$x'(t) = 0 \Rightarrow t = 0 \vee t = \sqrt{3} \vee t = -\sqrt{3},$$
$$y'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 6t + 2 = 0,$$

on trouve que x' et y' ne s'annulent jamais simultanément, alors la courbe paramétrée γ est régulière sur $\mathbb{R}^{-\{-1,1\}}$.

[1]f.sidiali@univ-batna2.dz

Solution de l'exercice 2

Soient $I =]-2\pi, 2\pi[$ et $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée :

$$x : t \longmapsto x(t) = 1 + \cos t + 2\cos\frac{t}{2},\ \ y : t \longmapsto y(t) = \sin t,$$

1. La courbe paramétrée γ est-elle régulière ?
   On a les deux fonctions $x : t \longmapsto x(t) = 1 + \cos t + 2\cos\frac{t}{2}$, et $y : t \longmapsto y(t) = \sin t$ sont dérivable sur tout I comme étant des fonctions élémentaire et
   $$t \longmapsto x'(t) = -\sin t - \sin\frac{t}{2},\ \ t \longmapsto y'(t) = cost,$$
   alors
   $$x'(t) = 0 \Rightarrow -\sin t - \sin\frac{t}{2} = 0 \Rightarrow \sin t = \sin\frac{-t}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{t}{2} + 2k\pi, \\ t = \pi + \frac{t}{2} + 2k\pi,\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{4}{3}k\pi, \\ t = 2\pi + 4k\pi,\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$
   $$y'(t) = 0 \Rightarrow cost = 0 \Rightarrow t = (1 + 2k)\frac{\pi}{2},\ (k \in \mathbb{Z})$$
   en fin
   $$x'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{-4\pi}{3} \vee t = 0 \vee t = \frac{4\pi}{3},$$
   $$y'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{-\pi}{2} \vee t = \frac{-3\pi}{2} \vee t = \frac{\pi}{2} \vee t = \frac{3\pi}{2},$$
   on trouve que x' et y' ne s'annulent jamais simultanément, alors la courbe paramétrée γ est régulière .
2. On va montrer que l'origine $(0, 0)$ est un point double pour γ,
   Pour montrer que $(0, 0)$ est un point double, on résout pour $t \neq 0$ l'équation $\gamma(t) = (0, 0)$. Ceci équivalent à dire
   $$\begin{cases} x(t) = 0, \\ y(t) = 0, \end{cases}$$
   C'est à dire
   $$\begin{cases} 1 + \cos t + 2\cos\frac{t}{2} = 0, \\ \sin t = 0, \end{cases}$$
   Ce qui donne $t = k\pi$ avec $k \in \{-1, 1\}$, on obtient $\gamma(-\pi) = \gamma(\pi) = (0, 0)$. Ce qui signifie que $(0, 0)$ est atteint au deux paramètre t.
3. On va montrer que la fonction $x'y'' - x''y'$ est strictement positive.
   On pose $f(t) = x'y'' - x''y'$, On a
   $$x''(t) = -\cos t - \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2},$$
   $$y''(t) = -\sin t$$
   Ceci implique que
   $$f(t) = (-\sin t - \sin\frac{t}{2})(-\sin t) - (-\cos t - \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2})\cos t$$
   $$= 1 + \sin t \sin\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\cos t\cos\frac{t}{2}$$
   On remarque que f est dérivable sur I, et
   $$f'(t) = \frac{3}{4}\cos t \sin\frac{t}{2}$$

Le tableau de variation de f sur $]-2\pi, 0]$, le suivant

t	-2π		$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$		0
$f'(t)$		$-$		$+$		$-$	
$f(t)$	0.5	$\searrow$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$

Comme f est une fonction paire, on peut conclure le tableau de variation de f sur $[0, 2\pi[$,

t	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(t)$		$+$		$-$		$+$	
$f(t)$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	0.5

On conclut que f est strictement positive, et on déduit que la courbure algébrique définie par : $k_{alg}(t) = \dfrac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ de γ en $\gamma(t)$ garde un signe constante quel que soit $t \in I$.

4. Le point double et $M = (0, 0)$.
   On cherche les tangentes vertivales : $x'(t) = 0 \Rightarrow t = \dfrac{-4\pi}{3} \vee t = 0 \vee t = \dfrac{4\pi}{3}$,
   Les points où les tangentes sont vertivales : $M(0) = (4, 0)$, $M'(\dfrac{-4\pi}{3}) = (\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2})$ et$M'(\dfrac{4\pi}{3}) = (\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.
   On cherche les tangentes horizontales :$y'(t) = 0 \Rightarrow t = \dfrac{-\pi}{2} \vee t = \dfrac{-3\pi}{2} \vee t = \dfrac{\pi}{2} \vee t = \dfrac{3\pi}{2}$
   Les points où les tangentes sont horizontales : $M(\dfrac{-\pi}{2}) = (1+\sqrt{2}, -1)$, $M'(\dfrac{-3\pi}{2}) = (1-\sqrt{2}, 1)$,$M''(\dfrac{\pi}{2}) = (1+\sqrt{2}, 1)$, $M'''(\dfrac{3\pi}{2}) = (1-\sqrt{2}, -1)$.