Université de Batna 2
Faculté des Mathématiques et Informatique
Département de mathématiques

$2^{ème}$ **année Mathématiques**
Année 2020-2021
Sidi ali Fatima Zohra[1]

Corrigé type des exercices supplémentaires
Géométrie des courbes et surfaces

Solution de l'exercice 1

1. On cherche les points multiples de la courbe paramétrée de composantes : $x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y(t) = t\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, pour obtenir les points multiples, on cherche $\grave{a}$ résoudre le systeme suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}, \\ t\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = u\dfrac{1-u^2}{1+u^2}, \\ t \neq u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-t^2)(1+u^2) = (1-u^2)(1+t^2), \\ t(1-t^2)(1+u^2) = u(1+t^2)(1-u^2), \\ t \neq u, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = u^2 \Longrightarrow t = -u, \\ 2t(1-t^2)(1+t^2) = 0, \\ t \neq u, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -u, \\ 1-t^2 = 0, \\ t \neq u, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -u, \\ t = \pm 1, \\ t \neq u, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, u = -1, \\ t = -1, u = 1, \end{cases}$$

on déduit que la courbe admet un seul point multiple (0,0).

2. Cherchons les points multiples de la courbe paramétrée de composantes : $x(t) = t + 1 + \dfrac{1}{t-1}$ et $y(t) = t^2 + 1 + \dfrac{1}{t}$, le domaine de définition de la courbe est $\mathbb{R}^{-\{1,0\}}$
On cherche $t \neq u$ tel que $M(t) = M(u)$, c'est $\grave{a}$ dire :

$$\begin{cases} t + 1 + \dfrac{1}{t-1} = u + 1 + \dfrac{1}{u-1}, \\ t^2 + 1 + \dfrac{1}{t} = u^2 + 1 + \dfrac{1}{u}, \\ t \neq u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t - u + \dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{u-1} = 0, \\ t^2 - u^2 + \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{u} = 0, \\ t \neq u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-u) + \dfrac{u-t}{(t-1)(u-1)} = 0, \\ t^2 - u^2 + \dfrac{u-t}{tu} = 0, \\ t \neq u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (t-u)(1 - \dfrac{1}{(t-1)(u-1)}) = 0, \\ (t-u)((t+u) - \dfrac{1}{tu}) = 0, \\ t \neq u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{(t-1)(u-1)} = 0, \\ (t+u) - \dfrac{1}{tu} = 0, \\ t \neq u, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)(u-1) = 1 \Leftrightarrow ut = u + t, \\ (t+u)tu = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (ut)^2 = 1, \\ (t+u)^2 = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ut = \pm 1, \\ t + u = \pm 1, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ut = P = -1, \\ t + u = S = -1, \end{cases}$$

[1] f.sidiali@univ-batna2.dz

alors t et u sont des solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 =$ et elles sont données par $t = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, u = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
Maintenant on cherche les coordonnées de point multiple, on utilise $t^2 + t - 1 = 0$, on trouve :
$x(t) = t + 1 + \dfrac{1}{t-1} = \dfrac{t^2}{t-1} = \dfrac{1-t}{t-1} = -1$
et $y(t) = t^2 + 1 + t + 1 = (\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2})^2 + \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} + 2 = 3$. On conclut que il y a un seul point multiple de coordonnées $(-1, 3)$.

Solution de l'exercice 2

Soit la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = 2t + t^2, \\ y(t) = 2t - \dfrac{1}{t^2}, \qquad t \in \mathbb{R}^*. \end{cases}$$

1. Recherche de point multiple.
   On cherche $t \neq u$ tel que $M(t) = M(u)$, c'est $\grave{a}$ dire :

$$\begin{cases} 2t + t^2 = 2u + u^2, \\ 2t - \dfrac{1}{t^2} = 2u - \dfrac{1}{u^2}, \\ t \neq u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 2u = -t^2 + u^2, \\ 2t - 2u = \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{u^2}, \\ t \neq u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(t-u) = -(t-u)(t+u), \\ 2(t-u) = \dfrac{-(t-u)(t+u)}{t^2u^2}, \\ t \neq u \end{cases}$$

$$\begin{cases} t + u = -2, \\ t + u = -2t^2u^2 \\ t \neq u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + u = -2, \\ t^2u^2 = 1 \\ t \neq u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + u = S = -2, \\ tu = P = -1 \\ t \neq u \end{cases}$$

   alors t et u sont les racines de l'équation $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$ donc $t = -1 - \sqrt{2}$ et $u = -1 + \sqrt{2}$.
   Maintenant on cherche les coordonnées du point multiple, on utilise $t^2 + 2t - 1 = 0$, on obtient $x(t) = 2t + t^2 = 1$, et
   $y(t) = 2t - \dfrac{1}{t^2} = 2t - \dfrac{1}{-2t+1} = \dfrac{-4t^2 + 2t - 1}{-2t+1} = \dfrac{10t - 5}{-2t+1} = -5$. Alors, il y a un seul point multiple de coordonnées $(1, -5)$.
2. L'èquation cartésienne de la tangente au point M(-1) :
   On a :

$$x'(t) = 2 + 2t,$$
$$y'(t) = 2 + \frac{2}{t^3}.$$

   donc, $x^{'}(-1) = 0$, et $y^{'}(-1) = 0$.
   D'ou x et y s'annulent simultanement pour $t = -1$, alors $M(-1)$ est un point stationnaire . Pour obtenir le vecteur tangent, en dérivant x et y jusqu'a ce qu'un vecteur dérivé soit différent de (0,0) pour t=-1.
   Les dérivées deuxième sont :

$$x''(t) = 2,$$
$$y''(t) = \frac{-6}{t^4},$$

alors,
$(x''(-1), y''(-1)) = (2, -6) \neq (0, 0)$, donc l'équation de la tangente est $(x - x(-1))y''(-1) - (y - y(-1))x''(-1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y = 12$.

Solution de l'exercice 3

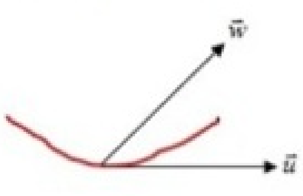
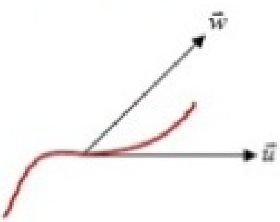
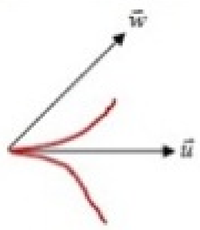
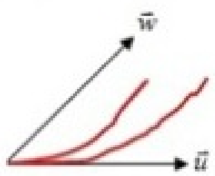
1. On va chercher les points stationnaires de la courbe paramétrée de composantes : $x(t) = t^2(t-1)^2$, et $y(t) = t^2(t^2-1)$, on a :
$$\begin{aligned} x'(t) &= 4t^3 - 6t^2 + 2t, \\ y'(t) &= 4t^3 - 2t. \end{aligned}$$
alors,
$x^{'}(t) = 0 \Rightarrow t = 0, t = \frac{1}{2}$ et $t = 1$,
$y^{'}(t) = 0 \Rightarrow t = 0, t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.
D'ou x et y s'annulent simultanement pour $t = 0$, le seul point stationnaire est l'origine.
2. L'èquation cartésienne de la tangente au point (x,y)=(0,0).
En dérivant x et y jusqu'a ce qu'un vecteur dérivé soit différent de (0,0) pour t=0.
Les dérivées deuxième sont :
$$\begin{aligned} x''(t) &= 12t^2 - 12t + 2, \\ y''(t) &= 12t^2 - 2. \end{aligned}$$
alors,
$(x''(0), y''(0)) = (2, -2)$ pour $t = 0$, donc l'équation de la tangente à l'origine est $(x - x(0))y''(0) - (y - y(0))x''(0) = 0 \Leftrightarrow -2x - 2y = 0$.
La position de la courbe par rapport *à* la tangente au point M(0) :
On a
$$\begin{cases} x'''(t) = 24t - 12, \\ y'''(t) = 24t, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'''(0) = -12, \\ y'''(0) = 0, \end{cases}$$
donc $(x'''(0), y'''(0)) = (-12, 0)$ est non colinéaire *à* $(x''(0), y''(0)) = (2, -2)$, dans ce cas on a $p = 2$ et $q = 3$, on déduit que le point $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ est un point de rebroussement de première espèce.

Solution de l'exercice 4

1. On va chercher la nature au point $t = 0$ de la courbe paramétrée de composontes : $x(t) = t + 2t^2 - t^3$, et $y(t) = t + 2t^2 - t^7$. On a
$$\begin{cases} x'(t) = 1 + 4t - 3t^2, \\ y'(t) = 1 + 4t - 7t^6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(0) = 1, \\ y'(0) = 1, \end{cases}$$
alors $(x'(0), y'(0)) \neq (0, 0)$, d'ou la courbe admet une tangente au point régulier $M(0)$ de vecteur directeur $(1, 1)$.
Nature du point On a
$$\begin{cases} x''(t) = 4 - 6t, \\ y''(t) = 4 - 42t^5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x''(0) = 4, \\ y''(0) = 4, \end{cases}$$
alors $(x''(0), y''(0)) = (4, 4)$ est colinéaire *à* $(x'(0), y'(0)) = (1, 1)$, on passe a les dérivées troisièmes
$$\begin{cases} x'''(t) = -6, \\ y'''(t) = -210t^4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'''(0) = -6, \\ y'''(0) = 0, \end{cases}$$
donc $(x'''(0), y'''(0)) = (-6, 0)$ est non colinéaire *à* $(x'(0), y'(0)) = (1, 1)$, dans ce cas $p = 1$ et $q = 3$, on déduit que le point $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ est un point d'inflexion.

2. $x : t \longmapsto x(t) = -t^2 - 2t^3,\ y : t \longmapsto y(t) = -t^3 - t^5.$
On a
$$\begin{cases} x'(t) = -2t - 6t^2, \\ y'(t) = -3t^2 - 5t^4, \end{cases}$$
d'ou $(x'(0), y'(0)) = (0,0)$, alors le point $M(0)$ est singulier.
Nature du point On a
$$\begin{cases} x''(t) = -2 - 12t, \\ y''(t) = -6t - 20t^3, \end{cases}$$
alors $(x''(0), y''(0)) = (-2, 0)$, alors $p = 2$, et on a $(x'''(0), y'''(0)) = (-12, -6)$ est n'est pas colinéaire *à* $(x''(0), y''(0))$, d'ou $q = 3$, on conclut que le point $(x(0), y(0)) = (0,0)$ est un point de rebroussement de première espèce.
3. $x : t \longmapsto x(t) = -t + t^2,\ y : t \longmapsto y(t) = t^2 + t^3$. On a
$$\begin{cases} x'(t) = -1 + 2t, \\ y'(t) = 2t + 3t^2, \end{cases}$$
d'ou $(x'(0), y'(0)) = (-1, 0)$, alors le point $M(0)$ est régulier, d'ou $p = 1$
Nature du point On a $(x''(0), y''(0)) = (2, 2)$ est n'est pas colinéaire *à* $(x'(0), y'(0)) = (-1, 0)$, d'ou $q = 2$, on déduit que le point $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ est un point d'allure ordinaire.
4. $x : t \longmapsto x(t) = t^2 + 3t^3 + t^4,\ y : t \longmapsto y(t) = -2t^2 - 6t^3 + t^4.$

On a
$$\begin{cases} x'(t) = 2t + 9t^2 + 4t^3, \\ y'(t) = -4t - 18t^2 + 4t^3, \end{cases}$$
d'ou $(x'(0), y'(0)) = (0, 0)$, alors le point $M(0)$ est singulier.
Nature du point On a
$$\begin{cases} x''(t) = 2 + 18t + 12t^2, \\ y''(t) = -4 - 36t + 12t^2, \end{cases}$$
alors $(x''(0), y''(0)) = (2, -4)$, alors $p = 2$, et on a $(x'''(0), y'''(0)) = (18, -36)$ est colinéaire *à* $(x''(0), y''(0))$, on passe *à* la dérivée quatrième $(x^{(4)}(0), y^{(4)}(0)) = (24, 24)$ est n'est pas colinéaire *à* $(x''(0), y''(0))$, d'ou $q = 4$, on déduit que le point $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ est un point de rebroussement de deuxième espèce.

p impair et q pair	p et q impairs	p pair et q impair	p et q pairs
			
Point ordinaire	Point d'inflexion	Point de rebroussement de première espèce	Point de rebroussement de seconde espèce