Université de Batna 2
Faculté des Mathématiques et Informatique
Département de mathématiques

$2^{ème}$ **année Mathématiques**
Année 2020-2021
Sidi ali Fatima Zohra[1]

Corrigé type TD 1
Géométrie des courbes et surfaces

Solution de l'exercice 1

(1) $x : t \longmapsto x(t) = 3 - 2\cos(t)\cos(2t),\ y : t \longmapsto y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t).$

Domaine de définition x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ alors la courbe est définie sur $\mathbb{R}$.

Réduction du domaine de définition

1. On a
   $*x(t+2\pi) = 3 - 2\cos(t+2\pi)\cos(2t+4\pi) = 3 - 2\cos(t)\cos(2t) = x(t),$
   $*y(t+\pi) = 2\sin(t+2\pi) - \sin(2t+4\pi) = 2\sin(t) - \sin(2t) = y(t)$
   , alors les fonctions x et y sont $2\pi-$périodiques, donc on peut restreindre notre étude *à* l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
2. Pour $t \in [-\pi, \pi]$
   $*x(-t) = 3 - 2\cos(-t)\cos(-2t) = 3 - 2\cos(t)\cos(2t) = x(t),$
   $*y(-t) = 2\sin(-t) - \sin(-2t) = -2\sin(t) + \sin(2t) = -y(t),$
   alors x est paire et y est impaire, donc on peut restreindre notre étude *à* l'intervalle $[0, \pi]$ et grâce *à* une symétrie d'axe (OX) on obtiendra la courbe sur $[-\pi, 0]$.

(2) $x : t \longmapsto x(t) = \sin(t),\ y : t \longmapsto y(t) = \dfrac{\sin(t)}{2+\cos(t)}.$

Domaine de définition

x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ alors la courbe est définie sur $\mathbb{R}$.

Réduction du domaine de définition

1. On a
   $*x(t+2\pi) = \sin(t+2\pi) = \sin(t) = x(t),$
   $*y(t+2\pi) = \dfrac{\sin(t+2\pi)}{2+\cos(t+2\pi)} = \dfrac{\sin(t)}{2+\cos(t)} = y(t)$
   alor les fonctions x et y sont $2\pi-$périodiques, donc on peut restreindre notre étude *à* l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
2. Pour $t \in [-\pi, \pi]$
   $*x(-t) = \sin(-t) = -\sin t = -x(t),$
   $*y(-t) = \dfrac{\sin(-t)}{2+\cos(-t)} = \dfrac{-\sin(t)}{2+\cos(t)} = -y(t),$
   alors x et y sont des fonctions impaires, donc on peut faire l'étude sur l'intervalle $[0; \pi]$ et grâce *à* une symétrie par rapport a l'origine (O) on obtiendra la courbe sur $[-\pi; 0]$.

(3) $x : t \longmapsto x(t) = t^3 - 4t,\ y : t \longmapsto y(t) = t^2 - 4.$

Domaine de définition
x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ alors la courbe est définie sur $\mathbb{R}$.

[1]f.sidiali@univ-batna2.dz

Réduction du domaine de définition

Pour $t \in \mathbb{R}$
$*x(-t) = -t^3 + 4t = -x(t)$,
$*y(-t) = t^2 - 4 = y(t)$,
alors x est impaire et y est paire, donc on peut restreindre notre étude $\grave{a}$ l'intervalle $[0, +\infty[$ et grâce $\grave{a}$ une symétrie d'axe (OX) on obtiendra la courbe sur $]-\infty, 0]$.

(4) $x : t \longmapsto x(t) = t + \dfrac{1}{t},\ y : t \longmapsto y(t) = t - \dfrac{1}{t}$.

Domaine de définition

x et y sont définies sur $\mathbb{R}^*$ alors la courbe est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Réduction du domaine de définition

1. On a
   $*x(-t) = -t - \dfrac{1}{t} = -x(t)$,
   $*y(-t) = -t + \dfrac{1}{t} = -y(t)$,
   alors x et y sont impaires, donc on peut restreindre notre étude a l'intervalle $]0, +\infty[$, et puis on effet une symétrie par rapport a l'origine (O) on obtiendra la courbe sur $]-\infty, 0[$.
2. Pour $t \in]0, +\infty[$
   $*x(\dfrac{1}{t}) = \dfrac{1}{t} + 1 = x(t)$,
   $*y(\dfrac{1}{t}) = \dfrac{1}{t} - t = -y(t)$,
   donc on restrient l'étude $\grave{a}$ l'intervalle $]0, +\infty[\bigcap]0, 1] =]0, 1]$, puis grâce $\grave{a}$ une symétrie par rapport a l'axe (OX) on obtiendra la courbe sur $[1, +\infty[$.

(5) $x : t \longmapsto x(t) = \cos(t),\ y : t \longmapsto y(t) = \dfrac{t}{2} + \sin(t)$.

Domaine de définition

La courbe est définie sur $\mathbb{R}$.

Réduction du domaine de définition

Pour $t \in \mathbb{R}$
$*x(-t) = \cos -t = x(t)$,
$*y(-t) = \dfrac{-t}{2} + \sin(-t) = -\dfrac{t}{2} - \sin(t) = -y(t)$,
alors x est paire et y est impaire, donc on peut restreindre notre étude $\grave{a}$ l'intervalle $[0, +\infty[$ et grâce $\grave{a}$ une symétrie d'axe (OY) on obtiendra la courbe sur $]-\infty, 0]$.

(6) $x : t \longmapsto x(t) = \cos^3 t,\ y : t \longmapsto y(t) = \sin^3 t$.

Domaine de définition

x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ alors la courbe est définie sur $\mathbb{R}$.

Réduction du domaine de définition

1. On a
$*x(t+2\pi) = \cos^3(t+2\pi) = \cos^3 t = x(t)$,
$*y(t+2\pi) = \sin^3(t+2\pi) = \sin^3 t = y(t)$
alors les fonctions x et y sont $2\pi-$périodique, donc on peut restreindre notre étude a l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

2. Pour $t \in [-\pi, \pi]$
$*x(-t) = \cos^3(-t) = \cos^3 t = x(t)$,
$*y(-t) = \sin^3(-t) = -\sin^3 t = -y(t)$,
alors x est paire et y est impaire donc on peut faire l' étude sur l'intervalle $[0; \pi]$ et grâce *à* une symétrie par rapport a l'axe (OX) on obtiendra la courbe sur $[-\pi; 0]$.

3. Pour $t \in [0; \pi]$
$*x(\pi - t) = \cos^3(\pi - t) = (\cos\pi\cos t + \sin\pi\sin t)^3 = -\cos^3 t = -x(t)$,
$*y(\pi - t) = \sin^3(\pi - t) = (\sin\pi\cos t - \cos\pi\sin t)^3 = \sin^3 t = y(t)$,
alors on peut limiter l'étude *à* l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, puis on complète la courbe par symétrie par rapport *à* l'axe (OY).

4. Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$
$*x(\frac{\pi}{2} - t) = (\cos\frac{\pi}{2}\cos t + \sin\frac{\pi}{2}\sin t)^3 = \sin^3 t = y(t)$,
$*y(\frac{\pi}{2} - t) = (\sin\frac{\pi}{2}\cos t - \cos\frac{\pi}{2}\sin t)^3 = \cos^3 t = x(t)$,
donc on restrient l'étude *à* $[0, \frac{\pi}{4}]$, puis on complète la courbe par symétrie par rapport *à* la première bissectrice d'équation $(y = x)$.

Solution de l'exercice 2

1. On considère la courbe d'équation cartésienne $y\ln(\dfrac{y}{x}) = x^2$, En introduisant le paramètre $t = \dfrac{y}{x}$, on trouve : $y\ln(t) = \left(\dfrac{y}{t}\right)^2$, d'où $y = t^2\ln t$, donc $x = \dfrac{y}{t} = \dfrac{t^2\ln t}{t} = t\ln t$,
Par conséquent, la représentation paramétrique de cette courbe est :
$$x : t \longmapsto x(t) = t\ln t,\ \ y : t \longmapsto y(t) = t^2\ln t,\ t > 0.$$

2. On va vérifier que la courbe paramétrique $\gamma :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longrightarrow \gamma(t) = \left(\dfrac{3t}{1+t^3}, \dfrac{3t^2}{1+t^3}\right)$, admet comme équation cartésienne $3xy = x^3 + y^3$,
En effet,
$$x^3 + y^3 = \frac{(3t)^3}{(1+t^3)^3} + \frac{(3t^2)^3}{(1+t^3)^3} = \frac{3^3t^3(1+t^3)}{(1+t^3)^3} = \frac{3^3t^3}{(1+t^3)^2} = 3xy.$$

3. Soit la courbe paramétrique $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longrightarrow \gamma(t) = (t^2, t^3)$,
On a $\dfrac{y(t)}{x(t)} = t$, alors $x(t) = \left(\dfrac{y(t)}{x(t)}\right)^2$ d'ou $x^3(t) - y^2(t) = 0$, on conclut que : $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$.

4. Soit γ la courbe de l'équation cartésienne $x(x^2+y^2)=x^2-y^2$.
(4.1) Soit D_t la droite d'équation $y=tx$. On cherche pour $t\neq 0$ le point d'intersection $M(t)=(x(t),y(t))$ de γ et D_t

$$M(x,y)\in D_t\cap\gamma \Leftrightarrow \begin{cases} y=tx, \qquad t\in\mathbb{R}^* \\ x(x^2+y^2)=x^2-y^2, \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=tx, \qquad t\in\mathbb{R}^* \\ x(x^2+t^2x^2)=x^2-t^2x^2, \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0, \\ x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad t\in\mathbb{R}^* \\ y=\dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2}, \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad t\in\mathbb{R}^{-\{0,-1,1\}} \\ y=\dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2}, \end{cases}$$

D'autre part les droites D_{-1} et D_1 ont $(0,0)$ comme point commun avec γ. donc une paramétrisation de γ est $t\longmapsto \begin{cases} x(t)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y(t)=\dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2}, \end{cases}$

(4.2) En passant en coordonnées polaires $\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \end{cases}$, on a :

$$M(x,y)\in\gamma \Leftrightarrow (\rho=0 \text{ où } \rho\cos\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta=0).$$