Université de Batna 2
Faculté des Mathématiques et Informatique
Département de mathématiques

$3^{ème}$ **année mathématiques**
Année 2020-2021
Sidi ali Fatima Zohra[1]

Corrigé type de la série des exercices 2
Optimisation sans contraintes -LMD- S5

Solution de l'exercice 1

1. $f(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$.

   on calcule le gradient de f

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 4y \end{pmatrix}$$

   On cherche les points critiques comme solutions du système

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2(x-1) = 0 \\ 4y = 0 \end{cases}$$

   Ce système admet unique solution est $(x,y) = (1,0)$, alors on a un seul point critique $M = (1,0)$.

   On calcule la matrice Hessienne de f

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y) \\ \partial_{yx} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   On cherche la nature de M,

$$Hess_f(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   On a $\det(Hess_f(1,0)) = 8 > 0$ et $\partial_{xx} f(1,0) = 2 > 0$, donc la matrice $Hess_f(1,0)$ est définie positive. Par conséquent, le point M est un minimum local de f.

2. $f(x,y) = 3x^3 - 6xy + 3y^2$.

   on calcule le gradient de f

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 9x^2 - 6y \\ -6x + 6y \end{pmatrix}$$

   On cherche les points critiques comme solutions du système

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0 \end{cases}$$

   ce système admet deux solutions sont $(x,y) = (0,0)$ et $(x,y) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, alors f admet deux points critiques $M_1 = (0,0)$ et $M_2 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

[1] f.sidiali@univ-batna2.dz

<u>On calcule la matrice Hessienne de f</u>

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} 18x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

On cherche la nature de M_1,

$$Hess_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

On a $\det(Hess_f(0,0)) = -36 < 0$, donc la matrice $Hess_f(0,0)$ est indéfinie.
Par conséquent, le point M_1 est un point selle de f.

On cherche la nature de M_2,

$$Hess_f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

On a $\det(Hess_f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)) = 36 > 0$ et $\partial_{xx}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 2 > 0$, donc la matrice $Hess_f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ est définie positive .
Par conséquent, le point M_2 est un minimum local de f.

3. $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.

<u>on calcule le gradient de f</u>

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 2x) \\ e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 4y) \end{pmatrix}$$

On cherche les points critiques de f,

$$\begin{cases} e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 2x) = 0 \\ e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 4y) = 0 \end{cases}$$

ce dernier admet deux solutions sont $(x,y) = (0,0)$ et $(x,y) = (-4,-2)$, alors f admet deux points critiques $M_1 = (0,0)$ et $M_2 = (-4,-2)$.

<u>On calcule la matrice Hessienne de f</u>

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 4x + 2) & e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 2x - 4y) \\ e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 2x - 4y) & e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 8y - 4) \end{pmatrix}$$

On cherche la nature de M_1,

$$Hess_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

On a $\det(Hess_f(0,0)) = -8 < 0$, donc la matrice $Hess_f(0,0)$ est indéfinie.
Par conséquent, le point M_1 est un point selle de f.

On cherche la nature de M_2,

$$Hess_f(-4,-2) = \begin{pmatrix} -6e^{-2} & 8e^{-2} \\ 8e^{-2} & -12e^{-2} \end{pmatrix}$$

On a $\det(Hess_f(-4,-2)) = 8e^{-4} > 0$ et $\partial_{xx} f(-4,-2) = -6e^{-2} < 0$, donc la matrice $Hess_f(-4,-2)$ est définie négative. Par conséquent, le point M_2 est un maximum local de f.

4. $f(x,y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$.

On calcule le gradient de f

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 - 2xy \\ 2xy - x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}$$

On cherche les points critiques de f,

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 2xy = 0 \\ 2xy - x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x^2 + (x-y)^2 = 0 \\ -2y^2 - (x-y)^2 = 0 \end{cases}$$

La seul point critique de f est $M = (0,0)$.

On calcule la matrice Hessienne de f

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x - 2y & 2y - 2x \\ 2y - 2x & 2x - 6y \end{pmatrix}$$

On cherche la nature de M,

$$Hess_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\det(Hess_f\,(0,0)) = 0$, alors on peut rien déduire sur la nature de M.
D'autre part, on a au voisinage de $(0,0)$,
$f(2x,x) = 5x^3$, alors $f(2x,x) \geq 0 = f(0,0)$ pour $x > 0$, et $f(2x,x) \leq 0 = f(0,0)$ pour $x < 0$.
Par conséquent, le point M_1 est un point selle de f.

Solution de l'exercice 2

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24.$$

1. f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car f est une fonction polynômiale définie sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) **On calcule le gradient de f**

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x + 2y + 12 \\ 2x + 2y + 4 \end{pmatrix}$$

On cherche l'unique point critique (a,b) de f,

$$\begin{cases} 4x + 2y + 12 = 0 \\ 2x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une seule solution $(x,y) = (-4,2)$, alors f admet un seul point critique $(a,b) = (-4,2)$.

(b) **On calcule la matrice Hessienne de f**

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

alors,

$$Hess_f(a,b) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) On a $\det(Hess_f(-4,2)) = 4 > 0$ et $\partial_{xx} f(-4,2) = 4 > 0$, donc la matrice $Hess_f(a,b)$ est définie positive.
En déduire que f admet un minimum local m au point $(a,b) = (-4,2)$, avec $m = f(-4,2) = 4$.

3. (a) On a

$$2(x+\frac{y}{2}+3)^2 = 2\left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + 12\left(x+\frac{y}{2}\right) + 18$$
$$= 2x^2 + 2xy + \frac{y^2}{2} + 12x + 6y + 18,$$

on trouve que

$$2x^2 + 2xy + 12x = 2(x+\frac{y}{2}+3)^2 - (\frac{y^2}{2} + 6y + 18). \tag{1}$$

(b) On a aussi

$$\frac{1}{2}(y-2)^2 = \frac{y^2}{2} - 2y + 2,$$

on trouve que

$$\frac{y^2}{2} - 2y + 6 = \frac{1}{2}(y-2)^2 + 4. \tag{2}$$

(c) On insert l'égalité (1) dans l'expression de f, on obtient

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24 \\ &= 2(x+\frac{y}{2}+3)^2 - (\frac{y^2}{2} + 6y + 18) + y^2 + 4y + 24 \\ &= 2(x+\frac{y}{2}+3)^2 + \frac{y^2}{2} - 2y + 6 \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité (2) dans l'égalité ci-dessus de f, on trouve

$$f(x,y) = 2(x+\frac{y}{2}+3)^2 + \frac{1}{2}(y-2)^2 + 4,$$

ceci implique que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \geq 4.$$

alors,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \geq f(-4,2),$$

On conclut que, le minimum déjà trouver $m = 4$, dans la question (2)(c) est un minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Solution de l'exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = xe^{x(y^2+1)}.$$

(1) La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car elle est la composition de fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

(2) (a) **On calcule le gradient de f**

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} (1+x(y^2+1))e^{x(y^2+1)} \\ 2x^2ye^{x(y^2+1)} \end{pmatrix}$$

(b) On va montrer que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1,0)$.
on a

$$\begin{cases} (1+x(y^2+1))e^{x(y^2+1)} = 0 \\ 2x^2ye^{x(y^2+1)} = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une seule solution $(x,y) = (-1,0)$, alors f admet un seul point critique $A = (-1,0)$.

(3) (a) **On calcule la matrice Hessienne de f**

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} (2+x(y^2+1))(y^2+1)e^{x(y^2+1)} & (2+x(y^2+1))2xye^{x(y^2+1)} \\ (2+x(y^2+1))2xye^{x(y^2+1)} & (1+2xy^2)2x^2e^{x(y^2+1)} \end{pmatrix}$$

(b) On a

$$Hess_f(-1,0) = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}$$

$\det(Hess_f(-1,0)) = 2e^{-2} > 0$ et $\partial_{xx}f(-1,0) = e^{-1} > 0$, donc la matrice $Hess_f(-1,0)$ est définie positive. En déduire que f admet un minimum local m au point A, avec $m = f(-1,0) = -e^{-1}$.

(4) (a) Pour $x \geq 0$, on a $y^2+1 \geq 1$ alors $x(y^2+1) \geq x$, donc $e^{x(y^2+1)} \geq e^x$, on trouve $xe^{x(y^2+1)} \geq xe^x$.

Pour $x \leq 0$, on a $y^2+1 \geq 1$ alors $x(y^2+1) \leq x$, donc $e^{x(y^2+1)} \leq e^x$, on obtient $xe^{x(y^2+1)} \geq xe^x$.

Par conséquent, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \geq xe^x$.

(b) On va étudier les variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$g'(x) = (x+1)e^x.$$

Le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$,

x		-1	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	$-e^{-1}$	↗

On conclut que,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \geq -e^{-1}$$

Par conséquent

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \geq -e^{-1} = f(-1,0),$$

alors le minimum déjà trouver dans la question (2)(b) est un minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

[1]f.sidiali@univ-batna2.dz

Solution de l'exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=x^3+y^3+3xy.$$

(a) **On calcule le gradient de f**

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}3x^2+3y\\3y^2+3x\end{pmatrix}$$

On calcule la matrice Hessienne de f

$$Hess_f(x,y)=\begin{pmatrix}6x & 3\\ 3 & 6y\end{pmatrix}.$$

(b) On note $u(x)=x$ et $v(x)=e^x$ alors

$$\begin{aligned}f^{'}(u(x),v(x)) &= u'(x)\partial_x f(u(x),v(x))+v^{'}(x)\partial_y f(u(x),v(x))\\ &= \partial_x f(x,e^x)+e^x\partial_y f(x,e^x)\\ &= 3x^2+3e^x+e^x(3e^{2x}+3x)\end{aligned}$$

(c) L'équation du plan tangent à la surface d'équation $z=f(x,y)$ au point $(1,1.5)$, est

$$z=f(1,1.5)+(x-1,y-1.5)\nabla f(1,1.5).$$

(d) On cherche les points critiques comme solutions du système

$$\begin{cases}\partial_x f(x,y)=0\\ \partial_y f(x,y)=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}3x^2+3y=0\\ 3y^2+3x=0\end{cases}$$

Ce système admet deux solutions sont $(0,0)$ et $(-1,-1)$, f admet deux points critiques $M_1=(0,0)$ et $M_2=(-1,-1)$.

(e) **On cherche la nature de M_1,**

$$Hess_f(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}$$

On a $\det(Hess_f(0,0))=-9<0$, donc la matrice $Hess_f(0,0)$ est indéfinie. Par conséquent, le point M_1 est un point selle de f.

On cherche la nature de M_2,

$$Hess_f(-1,-1)=\begin{pmatrix}-6 & 3\\ 3 & -6\end{pmatrix}$$

On a $\det(Hess_f(-1,-1))=27>0$ et et $\partial_{xx}f(-1,-1)=-6<0$, donc la matrice $Hess_f(-1,-1)$ est définie négative.
Par conséquent, le point M_2 est un maximum local de f.

(f) On a $f(x,x)=2x^3+3x^2$, on voit que

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}f(x,x)=+\infty,$$

donc f n'a pas de maximum global, et

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x,x) = -\infty,$$

alors f n'a pas de minimum global.

Solution de l'exercice 5

On va étudier la convexité de l'ensemble suivant :

1. A=$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash\ x^2+y^2 \leq 1\}$.

   Soit $X_1 \in A$, alors $X_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_1^2 + y_1^2 \leq 1$
   Soit $X_2 \in A$, alors $X_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_2^2 + y_2^2 \leq 1$.
   D'autre part, $\forall \lambda \in [0,1]$, on a $\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$,
   alors $\forall X_1, X_2 \in A$, $\forall \lambda \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2 + (\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)^2 &= \lambda^2(x_1^2+y_1^2) + (1-\lambda)^2(x_2^2+y_2^2) + 2\lambda(1-\lambda)(x_1x_2+y_1y_2)\\ &\leq \lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda)(\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2) + \frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2))\\ &\leq \lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda)(\frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2+y_2^2))\\ &\leq \lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda)(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}) = (\lambda + (1-\lambda))^2 = 1\end{aligned}$$

   On conclut que

$$\forall X_1, X_2 \in A,\ \forall \lambda \in [0,1], \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \in A$$

   Par conséquent, A est un ensemble convexe.

2. B=$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash\ \frac{1}{2}(y-x^2) \geq 0\}$.
   Soit $X_1 \in B$, alors $X_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{1}{2}(y_1 - x_1^2) \geq 0$
   Soit $X_2 \in B$, alors $X_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{1}{2}(y_2 - x_2^2) \geq 0$.
   D'autre part, $\forall \lambda \in [0,1]$, on a $\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)$,
   alors $\forall X_1, X_2 \in B$, $\forall \lambda \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}((\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) - (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2) &= \frac{1}{2}(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) - \frac{1}{2}(\lambda x_1)^2 - \frac{1}{2}((1-\lambda)x_2)^2 - \lambda(1-\lambda)x_1x_2\\ &\geq \frac{1}{2}(\lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2) - \frac{1}{2}(\lambda x_1)^2 - \frac{1}{2}((1-\lambda)x_2)^2 - \lambda(1-\lambda)x_1x_2\\ &= \frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)x_1^2 + \frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)x_2^2 - \lambda(1-\lambda)x_1x_2\\ &= \frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)(x_1-x_2)^2 \geq 0\end{aligned}$$

   On conclut que

$$\forall X_1, X_2 \in B,\ \forall \lambda \in [0,1], \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \in B$$

   Par conséquent, B est un ensemble convexe.