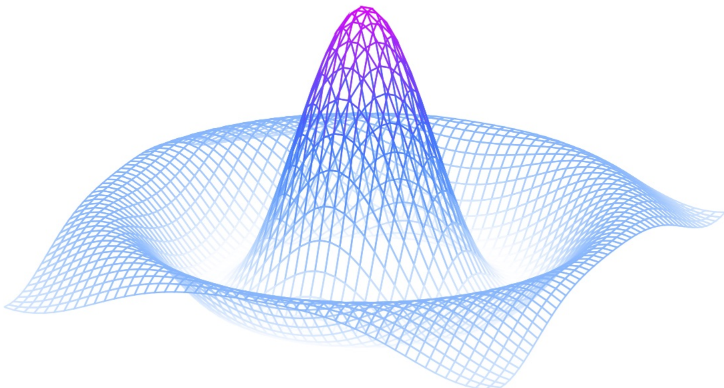
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE MOSTEFA BEN BOULAÏD - BATNA 2 -
FACUlTÉ DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Cours d'Analyse 4



Sidi ali Fatima zohra[1]

2 ème Statistiques et Analyse des Données

Année Universitaire
2023-2024

Table des matières

Chapitre 1

Notion de topologie dans $\mathbb{R}^n$

1.1. L'espase vectoriel $\mathbb{R}^n$

1.2. Notion de norme

La notion de norme sur $\mathbb{R}^n$ généralise la notion de valeur absolue sur $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 1.2.1. (Norme dans $\mathbb{R}^n$)
On appelle norme sur $\mathbb{R}^n$ une application :

$$\begin{array}{rccc} \|.\| : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & \|x\|. \end{array}$$

verifiant les propriétés suivantes :

(1) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. (Séparation)

(2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \| \lambda x \| = |\lambda| \cdot \| x \|$.(Homogénéité)

(3) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$. (Inégalité triangulaire)

On dit que $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|.\|$ est un espace vectoriel normé que l'on notera souvent (**e.v.n.**).

Notation : On note la norme par $\|.\|$ où $N(.)$.

Normes classiques sur $\mathbb{R}^n$:

Soient $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et $p \in \mathbb{R}$ tel que $p \geq 1$. Alors

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|. \qquad \text{(Norme de Manhattan)},$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2}. \qquad \text{(Norme Euclidienne)},$$

$$\|x\|_n = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}. \qquad \text{(Norme p, } p \geq 1\text{)},$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}. \qquad \text{(Norme infinie)},$$

sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.
Attention : $\|.\|_p$ avec $0 < p < 1$ n'est pas une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1.2.1. *Soit* $x = (-3, 1, 2, 10) \in \mathbb{R}^n$.

$$\|x\|_1 = 16.$$
$$\|x\|_2 = \sqrt{114}.$$
$$\|x\|_\infty = 10.$$

Définition 1.2.2. (Normes équivalentes)
On dit que deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes s'il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad C_1\|x\| \leq \|x\|' \leq C_2\|x\|.$$

On note $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$.

Proposition 1.2.1. *Toute les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes entre elles.*

1.3. Boules ouvertes et fermées

Définition 1.3.1. *(Boules)*

On muni $\mathbb{R}^n$ par la norme $\|.\|$, soientt $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

(1) On appelle l'ensemble $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x - a\| < r\}$, la boule ouverte de centre a et de rayon r.

(2) On appelle l'ensemble $\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x - a\| \leq r\}$, la boule fermée de centre a et de rayon r.

(3) On appelle l'ensemble $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x - a\| = r\}$, la sphère de centre a et de rayon r.

1.4. Ouverts et fermés

Définition 1.4.1. *On muni $\mathbb{R}^n$ par la norme $\|.\|$, soit A un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$.*

(1) On dit que A est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ si pour tout $x \in A$ il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$. Autrement dit, tout point de A est le centre d'une boule ouverte de rayon non-nul, incluse dans A.

(2) On dit que A est un fermé de $\mathbb{R}^n$ si son complémentaire $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$ est un ouvert.

(3) On appelle voisinage d'un point x_0 de $\mathbb{R}^n$, tout ensemble $V(x_0)$ qui contient une boule ouvert , c'est à dire :

$$\exists r > 0, \quad B(x_0, r) \subset V(x_0).$$

(4) On dit que A est un borné, s'il existe une boule contient tous les élément de A, c'est à dire :

$$\exists M > 0, \quad \forall x \in A, \|x\| < M.$$

(5) A est un compact de $\mathbb{R}^n$*, si et seulement si A est fermé et borné.*

Chapitre 2

Fonctions de plusieurs variables

2.1. Généralités sur les fonctions de plusieurs variables

Définition 2.1.1. *On appelle fonction réelle à plusieurs variables l'application :*

$$f: \begin{array}{ll} E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} & \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \longmapsto f(x_1, x_2, ..., x_n). \end{array}$$

On note par D_f, l'ensemble de définition de f.

Exemples 2.1.1.

- $$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & \\ (x,y) & \longmapsto f(x,y) = \dfrac{2}{x^2+y^2}. \end{array}$$

  Donc $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (x,y) \neq (0,0)\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

- $$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & \\ (x,y) & \longmapsto f(x,y) = \dfrac{x}{y}. \end{array}$$

  Donc $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus y \neq 0\}$.

- $$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & \\ (x,y) & \longmapsto f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}. \end{array}$$

  Donc $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus x^2+y^2 \leq 1\}$.

- $$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & \\ (x,y) & \longmapsto f(x,y) = \dfrac{1}{x+y+1}. \end{array}$$

  $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y \neq -1\}$ *c'est le plan privé de la droite d'équation* $y = -1-x$.

- $$f: \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} & \\ (x,y) & \longmapsto f(x,y) = \dfrac{\sqrt{-y+x^2}}{\sqrt{y}}. \end{array}$$

  $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0 \quad et \quad y < x^2\}$.

Définition 2.1.2. *(1) L'ensemble* $Imf = \{z \in \mathbb{R} / \exists (x_1, x_2, ..., x_n) \in E : f(x) = z\} \subset \mathbb{R}$.

(2) L'ensemble $S(f) = \{(x, f(x)) / x \in E\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *s'appelle surface représentative de f (Graphe de f).*
Dans le cas réel c'est la courbe de f.

2.2. Fonctions de deux variables

On s'intéresse maintenant aux fonctions $f: \ E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Définition 2.2.1. Soit $f : E \to \mathbb{R}, \ E \subset \mathbb{R}^2$.

(1) L'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in E, \ z = f(x, y)\}.$$

est appelé la surface représentative de f. S est aussi appelé le graphe de la fonction f.

(2) Soit $A = (a, b)$ un point intérieur de E. Les fonctions $f_b : x \mapsto f(x, b)$ et $f_a : y \mapsto f(a, y)$ définies sur des intervalles ouverts, contenant respectivement b et a sont appelées les fonctions partielles associées à f au point (a, b).

(3) Soit $k \in \mathbb{R}$. L'ensemble $C_k = \{(x, y) \in E$ tel que $f(x, y) = k\}$ est la courbe de niveau k de la fonction f, qui donne une représentation géométriques de f sur le plan.

La courbe de niveau k de la fonction f est la projection sur le plan d'équation $z = 0$ de l'intersection de la surface de f avec le plan horizontal $z = k$.

Exemple 2.2.2. **A.** Soit $f(x, y) = x^2 + y^2$, les courbes de niveau de f sont :

$$C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 = k\}$$

- Si $k < 0$, n'existe pas de courbe de niveau.
- Si $k = 0$, les courbes de niveau sont $\{(0, 0)\}$.
- Si $k > 0$, les courbes de niveau sont des cercles de rayon k et de centre $O(0, 0)$.

B. Soit $f(x, y) = e^{y-x^2}$ les courbes de niveau de f sont :

$$C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } e^{y-x^2} = k\},$$

Alors,
- Si $k \leq 0$, n'existe pas de courbe de niveau.
- Si $k > 0$, les courbes de niveau sont des paraboles de l'équation $y = x^2 + \ln k$.

2.3. Notion de limite

2.3.1. Limites des fonctions à plusieurs variables.

Définition 2.3.1. Soit $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $a = (a_1, ..., a_n) \in E$, supposons que f est définie au voisinage de "a" sauf peut-être en a et soit $l \in \mathbb{R}$ on dit que :

(1) f tend vers l lorsque x tend vers a si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \qquad \forall x \in E : \quad \|x - a\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

et on écrit : $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = l$.

(2) f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si

$$\forall M > 0, \quad \exists \delta > 0, \qquad \forall x \in E : \quad \|x - a\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

et on écrit : $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty$.

(3) f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a si

$$\forall M > 0, \quad \exists \delta > 0, \qquad \forall x \in E : \quad \|x - a\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \Rightarrow f(x) < -M.$$

et on écrit : $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty$.

Remarques 2.3.1.

(1) La limite, si elle existe, est unique

(2) La notion de limite ne dépend pas des normes utilisées (car les normes de $\mathbb{R}^n$ sont équivalente).

(3) Si une fonction f admet une limite en un point à x_0, alors la restriction de f à toute courbe continue passant par x_0, admet la même limite l.

Exemples 2.3.1. *(1) La fonction $f(x,y) = 2x+3y-4$ admet au point $(-2,2)$ une limite -2 car on a :*

$$\begin{aligned}|f(x,y)-(-2)| &= |2x+3y-2| \\ &= |2(x+2)+3(y-2)| \\ &\leq 2|x+2|+3|y-2| \\ &\leq 3\{|x+2|+|y-2|\} \\ &= 3\|(x,y)-(-2,2)\|_1\end{aligned}$$

Donc pour trouver $|f(x,y)-(-2)| < \varepsilon$, il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta = \frac{\varepsilon}{3} > 0: \quad \|(x,y)-(-2,2)\|_1 < \delta \Rightarrow |f(x,y)-(-2)| < \varepsilon.$$

(2) La fonction $f(x,y) = x^2+y^2$ admet au point $(0,0)$ une limite 0 car on a :

$$\begin{aligned}|f(x,y)-(0)| &= x^2+y^2 \\ &= \|(x,y)-(0,0)\|_2\end{aligned}$$

Donc pour trouver $|f(x,y)| < \varepsilon$, il suffit de prendre $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

Nous avons les propriétés suivantes des limites de fonctions :

Proposition 2.3.1. *(Opérations algébrique sur les limites)*
Soient f et g deux fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}$ admettant au point $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ les limites réelles l et l' respictivement, alors on a :

(1) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = l \pm l'$.

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = l.l'$

(3) Si g n'est pas nulle au voisinage de a et $l' \neq 0$ alors on a $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l'}$.

Théorème 2.3.2. *(Théorème d'encadrement)*
Soient f,g et $h : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions définies dans un voisinage V de $a \in \mathbb{R}^n$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

(1) Pour tout $x \in V$, on a $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$.

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = l$.

Alors $\lim\limits_{x\to a} h(x) = l$.

Lorsque $n = 2$, il est souvent utile de passer aux coordonnées polaires pour ramener le calcul à une limite d'une fonction d'une seule variable.

2.3.2. Passage aux coordonnées polaires. Tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(a, b)\}$ peut être représenter par ses coordonnées polaires centrée autour d'un point (a, b) grâce au relation

$$\begin{cases} x = a + r\cos\theta, \\ y = b + r\sin\theta, \\ r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi[. \end{cases}$$

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.3.2.

(1) S'il existe $l \in \mathbb{R}$ et une fonction $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que au voisinage de (a, b) on a :

$$|f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) - l| \leq h(r), \quad \text{avec } \lim_{r\longrightarrow 0} h(r) = 0,$$

alors $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(a,b)} f(x, y) = l$.

(2) S'il existe une fonction $M : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que au voisinage de (a, b) on a :

$$|f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)| \geq M(r), \quad \text{avec } \lim_{r\longrightarrow 0} M(r) = +\infty,$$

alors $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(a,b)} f(x, y)$ n'existe pas.

Exemple 2.3.3.

(1) On va calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. En utilisant le changement de variables en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = a + r\cos\theta, \\ y = b + r\sin\theta, \\ r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi[. \end{cases}$$

et $(a, b) = (0, 0)$. On obtient :

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0\right| = \left|\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r}\right| = r\,|\cos\theta\sin\theta| \leq r = h(r)$$

et $\lim\limits_{r\to 0} h(r) = 0$. Ceci implique que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

(2) On va calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$. En utilisant le changement de variables en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi[. \end{cases}$$

On trouve :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\cos^3\theta = 0, \quad \text{car } |\cos\theta| \leq 1.$$

Remarque 2.3.1. *Si la limite en coordonnées polaires dépend de langle θ, alors elle n'existe pas.*

Exemple 2.3.4. On va calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

On a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^2} = \cos 2\theta.$$

Le résultat dépend de θ i.e. il n'y a pas de limite unique, donc la limite de f au point $(0, 0)$ n'existe pas.

Remarque 2.3.2. *Pour prouver qu'une fonction de plusieur variable n'admet pas de limite, il suffit d'expliciter une restriction à une courbe continue passant par* $a = (a_1, \ldots\ldots, a_n)$ *qui n'admet pas de limite ou deux restrictions qui conduisent à des limites différentes.*

Exemple 2.3.1. *On a déjà montrer que* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ *n'existe pas dans l'exemple (2.3.4), maintenant on va montrer que cette limite n'existe pas par d'autre méthode :*

- *D'une part, on considère l'axe horizontal* D_1 *d'équation* $y = 0$ *on trouve :*
$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$
- *D'autre part, on prend le chemin* D_2 *de l'axe vertical d'équation* $x = 0$*, on obtient*
$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

Comme les restrictions de f *à deux courbes continues passant par* $(0,0)$ *donnent deux limites différentes. On en conclut que* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *n'existe pas.*

Pour les fonctions vectorielles on a la définition suivante :

Définition 2.3.5. Soient $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $a = (a_1, \ldots\ldots\ldots, a_n) \in E$, supposons que f est définie au voisinage de "a" sauf peut-être en a et soit $l = (l_1, l_2, \ldots\ldots, l_p) \in \mathbb{R}^p$ on dit que : f tend vers l lorsque x tend vers a si
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \qquad \forall x \in E : \quad \|x - a\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \Rightarrow \|f(x) - l\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon.$$
et on écrit : $\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) = l$.

En pratique, il est utile d'utiliser la proposition suivant :

Proposition 2.3.3. *Soient* $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *et* $a = (a_1, \ldots\ldots\ldots, a_n) \in E$*, supposons que* f *est définie au voisinage de "*a*" sauf peut-être en* a *et soit* $l = (l_1, l_2, \ldots\ldots, l_p) \in \mathbb{R}^p$ *on dit que :* f *tend vers l lorsque* x *tend vers* a *si et seulement si* f_j *tend vers* l_j *quand* x *tend vers* a*, pour* $j = 1, \ldots., p$*. En d'autre terme :*
$$\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall j = 1, \ldots., p \ \lim_{x\longrightarrow a} f_j(x) = l_j.$$

2.4. Continuité et prolongement par continiuité

2.4.1. Continuité d'une fonction réelle à plusieurs variables.

Définition 2.4.1. Soit $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $a = (a_1, \ldots\ldots\ldots, a_n) \in E$, on dit que f est continue en un point $a \in E$ si la limite de f en ce point existe et est égale à la valeur de la fonction en a, c'est à dire : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

La fonction f est dite continue sur E si elle est continue en tout point de E.

Exemples 2.4.2. (1) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2 + xy + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On va montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$: prenons une restriction de f sur la droite D_1 définie par l'équation $y = x$.

$$f(x,x) = \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

Si on utilise le chemin de l'axe horizontale D_2 d'équation $y = 0$ on trouve :

$$f(x,0) = 1.$$

Donc la fonction f restreinte à un sous-ensemble D_1 de $\mathbb{R}^2$ n'a pas la même limite que la même fonction restreinte à la droite horizontale D_2 de $\mathbb{R}^2$. Par contre la limite, si elle existe, doit être unique (remarque 2.3.1), donc la limite n'existe pas.

(2) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{3x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ en tant qu'une fraction des fonctions continues. Au point $(0,0)$, on utilise les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi[. \end{cases}$$

On obtient :

$$f(r,\theta) = \frac{3r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2} = 3r^2\cos^2\theta\sin^2\theta.$$

Par conséquent

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} 3r^2\cos^2\theta\sin^2 = 0.$$

On en conclut que f est une fonction continue en $(0,0)$ et donc elle est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 2.4.1. *(Opérations sur les fonctions continues)*

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ continues en un point $a = (a_1, \ldots\ldots, a_n) \in E \subseteq \mathbb{R}^n$. Alors, la somme $(f+g)$, le produit $(f.g)$ et le quotient $(\frac{f}{g})$ (là où le dénominateur ne s'annule pas au voisinage de a) sont continus en a. La composée de fonctions continues est ainsi continue.

Remarque 2.4.3. Toute fonction obtenue à l'aide de fonctions continues élémentaires (les polynômes , les fonction exponentielles, trigonométriques, logarithmique ,........) sont continues sur leurs domaines de définition . En utilisant les opérations algébriques et la composition.

2.4.2. Continuité des fonctions vectorielles.

Définition 2.4.4. Soit $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et soit $a = (a_1, \ldots\ldots\ldots, a_n) \in E$. On dit que f est continue en un point $a \in E$ si et seulement si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Proposition 2.4.2. *Soit $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et soit $a = (a_1, \ldots\ldots\ldots, a_n) \in E$, on dit que f est continue en un point $a \in E$ si et seulement si $\forall j = 1, 2, 3, \ldots., p;$ $\quad f_j$ est continue en a.*

2.5. Prolongement par continuité

Définition 2.5.1. (Prolongement par continuité)

Soit $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie E de $\mathbb{R}^n$. Soit $a = (a_1, ..., a_n)$ n'appartenant pas à E. Si f a une limite l lorsque x tend vers a on peut étendre le domaine de définition de f à $E \bigcup \{a\}$ en posant $f(a) = l$. On dit que l'on a prolongé f par continuité au point a. En d'autre terme : la fonction $\tilde{f}$ définie par

$$\tilde{f}(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} f(x_1, ..., x_n) & \text{si } (x_1, ..., x_n) \in E, \\ \\ l & \text{si } (x_1, ..., x_n) = (a_1, ..., a_n). \end{cases}$$

S'appelle le prolongement par continuité de fonction f sur $E \cup \{a\}$.

Remarque 2.5.1. *Le prolongement par continuité d'une fonction, s'il existe est unique.*

Exemples 2.5.1. *(1) Soit la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ *par* $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

En passant aux coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi[. \end{cases}$$

On obtient :

$$f(r,\theta) = \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r} = r\cos\theta\sin\theta.$$

Par conséquent

$$|f(r,\theta)| = |r\cos\theta\sin\theta| \leq r \xrightarrow[\forall\theta]{r\longrightarrow 0} 0.$$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

Il en résulte que la fonction f *admet une prolongement par continuité* $\tilde{f}$ *donné par :*

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x,y) &= \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \neq (0,0) \\ l, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{aligned}$$

(2) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ *par* $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.
En considérant les chemins $x = 0$, $y = x$, *on aura :*

$$f(0,y) = 0 \xrightarrow[y\longrightarrow 0]{} 0.$$

et

$$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[x\longrightarrow 0]{} \frac{1}{2}.$$

Comme les deux limites sont différentes la fonction f *n'admet pas de limite en* $(0,0)$, *par suit elle n'admet pas de prolongement par continuité sur* $\mathbb{R}^2$.

2.6. Propriétés des fonctions continues sur un compact

Définition 2.6.1. Une partie compacte (un compact) de $\mathbb{R}^n$ est une partie fermée et bornée.

Exemple 2.6.2. Dans $\mathbb{R}$ un intervalle fermé, et dans $\mathbb{R}^n$ les boules fermées sont des exemples de compacts.

Théorème 2.6.3. *Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction* continue *sur une partie $E \subset \mathbb{R}^n$ et K une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ contenue dans E. Alors, $f(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$.*

Corollaire 2.6.1. *Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.*

Définition 2.6.4. (Continuité uniforme)

Une fonction continue d'une partie E de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est dite uniformément continue sur E si

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x, y \in E; \qquad \|x - y\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Remarque 2.6.1. *La différence entre continuité et contuinité uniforme est dans la position de "δ", dans la définition de la continuité "δ" dépend de "a" et "ε". En revanche, dans la définition de la continuité uniforme, le "δ" est indépendant du point "a" il depend que de "ε".*

Théorème 2.6.5. *(Théorème de Heine)*
Soient K une partie compacte de $\mathbb{R}^n$, si $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue *sur K. Alors, f est uniformément continue sur K.*

Chapitre 3

Calcul Différentiel

Dans tout ce qui suit l'ensemble E désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$.

3.1. Dérivées partielles du premier ordre d'une fonction à plusieurs variables

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I. La dérivée de f au point $a \in I$ est donnée par :

$$f'(a) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{3.1}$$

Comme nous considérons des fonctions $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $a \in E$. Une expression du type (3.1) n'a pas de sens parce que l'on peut pas diviser par $x - a$, qui est un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Cependant, si on fixe toutes les composantes de vecteur x sauf une, on peut alors définir des dérivées partielles de la façon suivantes :

Définition 3.1.1. (Dérivée partielle)

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $a \in E$. Notons :

$$\begin{array}{rl} g_i : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & t \longmapsto g_i(t) = f(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_n). \end{array}$$

(toutes les variables dans f sont fixées sauf la i-ième)

Pour $i = 1, \ldots, n$, on appelle dérivée partielle première par rapport à x_i de f au point $a = (a_1, \cdots a_n)$, et on note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $f'_{x_i}(a)$ la dérivée de la fonction partielle g_i prise en a_i défini par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = g'_i(a_i) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \cdots, a_n) - f(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n)}{h}.$$

Remarque 3.1.1. *Dans le cas d'une fonction f **de deux variables** $f : E \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, les dérivées partielles premières de f au point (x_0, y_0) sont :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

On les note aussi $f'_x(x_0, y_0)$ et $f'_y(x_0, y_0)$ où bien $\partial_x f(x_0, y_0)$ et $\partial_y f(x_0, y_0)$.

Remarque 3.1.2. *Si f admet toutes les dérivées partielles premières sur $E \subset \mathbb{R}^n$, on dit que f est dérivable sur E.*

Astuce On pratique pour calculer la dérivée partielle première par rapport a la ième variable tout en fixant les autres, et en dérivant la fonction à une seule variable ainsi obtenue.

Remarques 3.1.1. *(Propriétés des dérivées partielles)*

- *Les fonctions usuelles comme les polynômes, les fonctions exponentielles, logarithmiques et trigonométriques sont dérivables dans leur domaine de définition.*
Attention Certaines fonctions usuelles ne sont pas dérivable sur leur domaine de définition comme ($|.|$, $\sqrt{.}$, arccos, arcsin,.........).

- *Les dérivées partielles d'une fonction qui est obtenue par des* ***opérations algébriques*** *(somme, produit, fraction) sur d'autre fonctions suivent les même règles.*

- *Les dérivées partielles d'une composition de fonctions sont plus compliquées.*

Exemples 3.1.1. *(1) Soit* $f(x,y) = 6x^3 - 3x^2y - 4y^2$. f *est définie et continue sur* $\mathbb{R}^2$, *les dérivées partielles premières sont :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 18x^2 - 6xy, \ (\text{car } y \text{ considérée constante}).$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3x^2 - 8y, \ (\text{car } x \text{ considérée constante}).$$

Donc f *est dérivable sur* $\mathbb{R}^2$.

(2) Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Les dérivées partielles premières de la fonction f *au point* $(0,0)$ *sont :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = 0.$$

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, f *est dérivable et ses dérivées partielles du premier ordre sont :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{4y^3x^2 + 2y^5}{(x^2+y^2)^2}.$$

Donc f *est dérivable sur* $\mathbb{R}^2$.

Remarque 3.1.3. *Attention ! Une fonction peut posséder des dérivées partielles en un point sans peut être continue en ce point. En d'autre terme : l'existence des dérivées partielles n'implique pas la continuité.*

Exemple 3.1.2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Etude de continuité de f au point $(0,0)$:
En passant aux coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi[. \end{cases}$$

On trouve :

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta\sin\theta.$$

Alors, la limite de f n'existe pas car elle dépend de θ.
Maintenat, on calcule les dérivées partielles premières de la fonction f au point $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = 0.$$

Nous observons que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent, alors f est dérivable au point $(0,0)$, pourtant f n'est même pas continue en $(0,0)$.

Définition 3.1.3. (Dérivabilité d'une fonction vectorielle)

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p, \quad p > 1$ une fonction vectorielle et soit $a = (a_1, ..., a_n)$. On dit que f est dérivable au point a si toutes les composantes $f_j, j = 1, ..., p$, sont dérivables au point a.

3.2. Fonctions de classe C^1, gradient et matrice jacobienne

Définition 3.2.1. *(Fonctions de classe C^1)*

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^1 sur E, si les dérivées partielles d'ordre 1 *de f $(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}, 1 \leq i \leq n)$ existent et sont continues sur E, et on écrit $f \in C^1(E)$.*

Proposition 3.2.1. — *Toutes les fonctions usuelles telles que polynômes, exponentielles, logarithmes et trigonométriques sont des fonctions de classe C^1 sur leur domaines de définition.*
— *Toutes les fonctions fabriquées avec des opérations algébriques $(somme, produit, fraction)$ et des fonctions usuelles de calsse C^1 sont des fonctions de classe C^1.*

Exemple 3.2.1. *En revenant à l'exemple* 2 *dans les exemples (3.1.1), les dérivées partielles premières de la fonction f au point existent est sont données par :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4y^3x^2+2y^5}{(x^2+y^2)^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Il reste d'étudier la continuité des dérivées partielles, on a $\partial_x f$ est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$, pour $(x,y) = (0,0)$, on a

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \partial_x f(x,y) = \lim_{r\longrightarrow 0} \frac{-2r^5\cos\theta\sin^4\theta}{r^4} = \lim_{r\longrightarrow 0} -2r\cos\theta\sin^4\theta = 0 = \partial_x f(0,0).$$

Par conséquent $\partial_x f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. On a aussi, $\partial_y f$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$, pour $(x,y) = (0,0)$, on a

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \partial_y f(x,y) = \lim_{r\longrightarrow 0} \frac{4r^5 \sin^3\theta \cos^2\theta + 2\sin^5\theta r^5}{r^4} = \lim_{r\longrightarrow 0} r(4\sin^3\theta\cos^2\theta + 2\sin^5\theta) = 0 = \partial_y f(0,0)$$

donc $\partial_y f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Il en résulte que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

Définition 3.2.1. (Gradient)
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles, on appelle gradient de f le vecteur de $\mathbb{R}^n$ noté $grad(f)$ ou ∇f définie par :

$$\begin{aligned} \nabla f : E \subset \quad & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & x \quad \longmapsto \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \ldots\ldots\ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)^T. \end{aligned}$$

Généralisons ces définitions pour les fonctions vectorielles :

Définition 3.2.2. *(Fonctions vectorielles de classe C^1)*
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $p \geq 2$. On dit que la fonction f est de classe C^1 sur E, si chaque composante $f_j, j = 1, \ldots., p$ est de classe C^1 sur E.

Définition 3.2.2. (Matrice jacobienne)
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ admettant des dérivées partielles en un point $a \in E$, on appelle la matrice jacobienne ou la jacobienne de f en un point $a \in E$, la matrice à n colonnes et p lignes notée $J(f)_a$ définie par :

$$J(f)_a = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.2.2. *Soit la fonction f définie par :*

$$f(x,y) = (x^3 + x\sin y, y^2x^3, e^{x-y})$$

On pose :$f_1(x,y) = x^3 + x\sin y$, $\quad f_2(x,y) = y^2x^3$ et $f_3(x,y) = e^{x-y}$.
La matrice Jacobienne de f est :

$$J(f)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 + \sin y & x\cos y \\ 3y^2x^2 & 2yx^3 \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix}.$$

3.3. Dérivée directionnelle

Définition 3.3.1. (Dérivée directionnelle)
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in E$ et v un vecteur non-nul de $\mathbb{R}^n$. On dit que f a une dérivée au

point a en suivant le vecteur v si la limite :

$$\begin{aligned} D_v f(a) &= \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} \\ &= \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{f(a_1+tv_1,.....,a_n+tv_n)-f(a_1,.........,a_n)}{t}. \end{aligned}$$

existe.
$D_v f(a)$ s'appelle la dérivée de f au point a suivant la direction v (ou dérivée directionnelle).

Exemple 3.3.1. *Soit la fonction de deux variables*

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{4y^2x^3-y^5-2x^7}{3x^4+2y^4} & si \quad (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Soit (v_1,v_2) un vecteur unitaire du plan, nous allons déterminer (en fonction de v_1, v_2) la dérivée directionnelle $D_v f(0,0)$ (si elle existe) dans la direction $v=(v_1,v_2)$ au point $(0,0)$.
Comme (v_1,v_2) un vecteur unitaire du plan alors $(v_1,v_2)\neq(0,0)$, la dérivée de f en (x_0,y_0) selon la direction $v=(v_1,v_2)$ est

$$D_v f(x_0,y_0) = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{f(x_0+v_1t,y_0+v_2t)-f(x_0,y_0)}{t},$$

alors

$$\begin{aligned} D_v f(0,0) = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{f(v_1t,v_2t)-f(0,0)}{t} &= \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{4(v_2t)^2(v_1t)^3-(v_2t)^5-2(v_1t)^7}{(3(v_1t)^4+2(v_2t)^4)t} \\ &= \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{4v_2^2v_1^3-v_2^5-2v_1^7t^2}{3v_1^4+2v_2^4} = \frac{4v_2^2v_1^3-v_2^5}{3v_1^4+2v_2^4}. \end{aligned}$$

Il en résulte que la dérivée directionnelle $D_v f(0,0)$ existe et égale $D_v f(0,0)=\dfrac{4v_2^2v_1^3-v_2^5}{3v_1^4+2v_2^4}$.

Remarque 3.3.2. En particulier, les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ sont des dérivées directionnelles de f en a suivant les vecteurs de la base canonique $e_i=(0,\cdots,\underbrace{1}_{i},\cdots,0)$, c'est à dire, la dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)=D_{e_i}f(a)$.

Proposition 3.3.1. *Soit $f: E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, de classe C^1, en $a\in D$ et v un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Alors, la dérivée directionnelle de f en a en direction de vecteur v est égale au produit scalaire du gradient de f en a et du vecteur v :*

$$D_v f(a) = \nabla f(a)\cdot v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i \tag{3.2}$$

Exemple 3.3.2. *Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :*

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=e^{2x+y}, \text{ soit } a=(1,2),\ v=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}).$$

Comme f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, d'ou la dérivé de f en (x_0,y_0) selon la direction $v=(v_1,v_2)$ est

$$D_v f(x_0,y_0) = \nabla f(a)\cdot v = \partial_x f(x_0,y_0)v_1 + \partial_y f(x_0,y_0)v_2.$$

Calcule de ∇f,

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2x+y} \\ e^{2x+y} \end{pmatrix}$$

alors,

$$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 2e^4 \\ e^4 \end{pmatrix}$$

Ceci implique que

$$D_v f(1,2) = \nabla f(1,2)^\top v = 2e^4 v_1 + e^4 v_2 = 2e^4 \frac{1}{\sqrt{2}} + e^4 \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3e^4}{\sqrt{2}}.$$

3.4. Différentielle

Définition 3.4.1. (Fonction différentiable)
Soient $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in E$. On dit que f est différentiable au point $a = (a_1, ..., a_n)$ s'il existe une forme linéaire L_a sur $\mathbb{R}^n$ (i.e. une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$) et une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ avec $a + h \in E$, on ait :

$$f(a+h) - f(a) = L_a(h) + \|h\|\varepsilon(h) \quad \text{avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0. \tag{3.3}$$

En d'autre terme :

$$\lim_{h\to 0,\, h\neq 0,\, a+h\in E} \frac{f(a+h) - f(a) - L_a(h)}{\|h\|} = 0. \tag{3.4}$$

où $\|.\|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$.
Si f est différentiable en tout point x de E, on dit que f est différentiable sur E.

Pour fixé les idées et bien comprendre ce à quoi correspond l'opérateur linéaire L_a nous allons redonner cette définition

Définition 3.4.2. On dit que f est différentiable au point $a = (a_1, ..., a_n)$ s'il existe n constantes réelles $\lambda_1, \lambda_2, ..\lambda_n$ et une fonction ε tel que,

$$f(a+h) - f(a) = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + ... + \lambda_n h_n + \|h\|\varepsilon(h) \quad \text{avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

La fonction $(h_1, h_2, ..., h_n) \longmapsto \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + ... + \lambda_n h_n$ est bien une application linéaire.

Remarques 3.4.1. - *L'application L_a lorsqu'elle existe est unique .*
- La forme linéaire L_a s'appelle le différentiel de f au point "a" et on la note df_a.

Exemple 3.4.1. *Soit $f(x,y) = x^4 + 3x^2 y$.*
Etude de la différentiabilité de f au point $(1, -1)$

$$\begin{aligned} f(1+h_1, -1+h_2) - f(1,-1) &= (1+h_1)^4 + 3(1+h_1)^2(-1+h_2) + 2 \\ &= -2h_1 + 3h_2 + \left[6h_1h_2 + 3h_1^2h_2^2 + h_1^4 + 4h_1^3 + 3h_1^2\right] \\ &= -2h_1 + 3h_2 + \sqrt{h_1^2+h_2^2}\,\frac{[6h_1h_2 + 3h_1^2h_2^2 + h_1^4 + 4h_1^3 + 3h_1^2]}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \end{aligned}$$

On pose $L_{(1,-1)}(h_1,h_2) = -2h_1 + 3h_2$ et $\varepsilon(h_1,h_2) = \dfrac{[6h_1h_2 + 3h_1^2h_2^2 + h_1^4 + 4h_1^3 + 3h_1^2]}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$, il est facile de prouver $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$, donc f est différentiable est l'application linéaire

$$df_{(1,-1)} : (h_1,h_2) \longrightarrow -2h_1 + 3h_2.$$

On observe que $\partial_x f(x,y) = 4x^3 + 6xy$ et $\partial_y f(x,y) = 3x^2$ et donc $\partial_x f(1,-1) = -2 = \lambda_1$ et $\partial_y f(1,-1) = 3 = \lambda_2$.

Proposition 3.4.1. *(Opérations algébriques)*
Soient $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables en un point $a \in E$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a :

(1) La somme $(f+g)$ *est différentiable et on a :* $d(f+g)_a = df_a + dg_a$ *.*

(2) Le produit (λf) *est différentiable et ona :* $d(\lambda f)_a = \lambda.df_a$*.*

(3) Le produit $(f.g)$ *est différentiable et on a* $d(f.g)_a = g(a).df_a + f(a).dg_a$*.*

(4) Le quotient $\frac{f}{g}$*,si* g *ne s'annule pas au voisinage de* a*, est différentiable et on a* $d(\frac{f}{g})_a = \frac{g(a).df_a - f(a).dg_a}{(dg_a)^2}$*.*

Contrairement aux dérivées partielles ou aux dérivées directionnelles, la notion de différentiabilité implique la continuité.

Proposition 3.4.2. *Soit* $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, si* f *est une fonction différentiable en* $a \in E$*, alors elle est continue en* a*.*

Démonstration. Si f est différentiable en a, on a alors :

$$f(a+h) - f(a) = df_a(h) + \|h\|\varepsilon(h) \quad \text{avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0.$$

Comme $\lim_{h\longrightarrow 0} df_a(h) = df_a(0) = 0$, on trouve que $\lim_{h\longrightarrow 0} f(a+h) = \lim_{h\longrightarrow 0} f(a)$. On en conclut que f est continue en a. □

Exemple 3.4.2. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction définie par :*

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On a déjà montrer que f *n'est pas continue en* $(0,0)$*, alors* f *n'est pas différentiable en* $(0,0)$ *.*

Remarque 3.4.1. *La réciproque de la proposition précédente est fausse.*

La différentiabilité implique aussi l'existence des dérivées dans toutes les directions et en particulier l'existence de toutes les dérivées partielles.

Proposition 3.4.3. *Soit* $f : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction différentiable au point* $a \in E$ *, alors* f *dérivable au point* $a = (a_1, ..., a_n)$*. De plus la différentiable de* f *en* a *s'écrit en fonction des dérivées partielles de* f *en* a *de la façons suivante*

$$df_a(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n.$$

En utilisant le gradient on peut simplifier sous la forme :

$$df_a(h) =< \nabla f(a), h >= \nabla f(a).h$$

Théorème 3.4.3. *Soit* $f : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction dérivable au point* $a = (a_1, ..., a_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$*. La fonction* f *est différentiable en* a *si et seulement si*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i}{\|h\|} = 0.$$

Remarque 3.4.2. *En particulier pour les fonctions de deux variables dérivable. La fonction* f *est différentiable en* (x_0, y_0) *si et seulement si*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0,y_0) - h_1\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - h_2\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0.$$

PROPOSITION 3.4.4. *(Differentiabilité et Dérivée directionnelle)*
Soit $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *si* f *est différentiable au point* a, *alors sa dérivée directionnel suivant* $v \in \mathbb{R}^n$ *est*

$$D_v f(a) = df_a(v) = \nabla f(a).v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i.$$

PROPOSITION 3.4.5. *(Condition suffisante pour la différentiabilité)*
Soit $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *si* f *est de classe* $C^1(E)$ *alors* f *est différentiable sur* E.

REMARQUE 3.4.3. *La réciproque de la proposition précédente est fausse.*

EXEMPLE 3.4.3. *Soit* f *une fonction* $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f: (x,y) \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Etude de la dérivabilité de f *sur* $\mathbb{R}^2$:

$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}^3} \cos \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}^3} \cos \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

et

$$\partial_y f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}^3} \cos \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}^3} \cos \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

il en résulte que f *est dérivable sur* $\mathbb{R}^2$.
Comme les dérivées partielles de f *existent et sont continues* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, *on en conclut que* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Etude de la continuité des dérivées partielles $\partial_x f$ *et* $\partial_y f$ *au point* $(0,0)$
Pour $x > 0$, *alors* $\partial_x f(x,0) = 2x \sin \frac{1}{x} - cos(\frac{1}{x})$ *n'admet pas de limite (car* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} 2x \sin \frac{1}{x} = 0$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} cos(\frac{1}{x})$ *n'existe pas) donc* f *n'est pas de classe* $\mathcal{C}^1$ *au point* $(0,0)$, *alors elle n'est pas de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}^2$.
Etude de la différentiabilité de f *sur* $\mathbb{R}^2$:

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, alors elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, il reste d'étudier la différentiabilité au point $(0,0)$.
Etude en $(0,0)$ *:*

$$\lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)} \frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-h_1\partial_x f(0,0)-h_2\partial_y f(0,0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)} \frac{h_1^2\sin\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}{\sqrt{(h_1^2+h_2^2)}}.$$

On a

$$\left|\frac{h_1^2\sin\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}}{\sqrt{(h_1^2+h_2^2)}}\right| \leq \frac{h_1^2}{\sqrt{(h_1^2+h_2^2)}} \leq \sqrt{(h_1^2+h_2^2)},$$

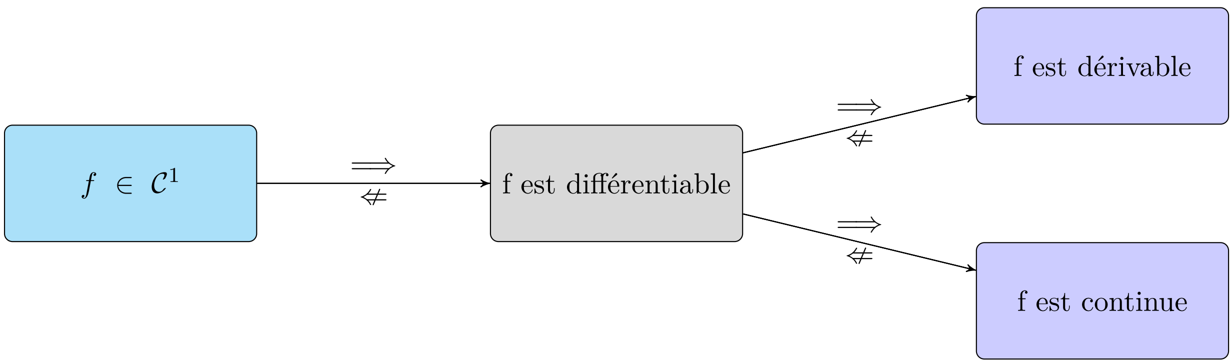
alors

$$\lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)} \frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-h_1\partial_x f(0,0)-h_2\partial_y f(0,0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0.$$

Par conséquent f est différentiable au point $(0,0)$ et par suite f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, mais pas de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

Récapitulation

Soit $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $n>1$, on a le schéma suivant :



3.5. Différentielle des fonctions vectorielles

DÉFINITION 3.5.1. (Différentielle d'une fonction vectorielle)

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On dit que f est différentiable au point $a \in E$, si chaque composante $f_j, j = 1, ..., p$ est différentiable en a.

DÉFINITION 3.5.2. Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction différentiable au point $a \in E$. La différentielle de f est définie par :

$$\begin{aligned} df_a : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ h &\mapsto df_a(h) = (df_{1(a)}(h), df_{2(a)}(h), ..., df_{p(a)}(h)). \end{aligned}$$

En terme de Jacobienne

$$df_a(h) = J(f)_a h = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

PROPOSITION 3.5.1. ***(Condition suffisante pour la différentiabilité)***

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, si f est de classe C^1 sur E alors f est différentiable sur E et de plus on a :

$$df_a(h) = J(f)_a.h$$

EXEMPLE 3.5.3. En revenant à l'exemple (3.2.2), on a les fonctions $f_i, i = 1,.,3$, sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, alors la fonction f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$, il en résulte que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, avec

$$df_{(x,y)}(h) = J(f)_{(x,y)}.h = \begin{pmatrix} 3x^2 + \sin y & x\cos y \\ 3y^2x^2 & 2yx^3 \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3x^2 + \sin y)h_1 + x\cos y h_2 \\ 3y^2x^2h_1 + 2yx^3h_2 \\ e^{x-y}h_1 - e^{x-y}h_2 \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION 3.5.2. ***(Opérations algébriques)***
Soient $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ deux fonctions différentiables en $a \in E$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

(1) La somme $f + g$ est différentiable et $d(f + g)_a = df_a + dg_a$.
(2) Le produit λf est différentiable et $d(\lambda f)_a = \lambda.df_a$.

En termes de Jacobiennes :

(1) $J(f + g)_a = J(f)_a + J(g)_a$.
(2) $J(\lambda f)_a = \lambda.J(f)_a$.

3.6. Composition des fonctions différentiables

PROPOSITION 3.6.1. *(Composition)*
Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction différentiable au point $a \in U$, et $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ une fonction différentiable au point $f(a)$, alors la fonction $g \circ f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ est différentiable au point a et on a

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ \mathrm{d}f_a.$$

En termes de Jacobiennes :

$$d(g \circ f)_a = J(g \circ f)_a = J(g)_{f(a)} \times J(f)_a.$$

PROPOSITION 3.6.2. *Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction différentiable sur U, et $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ une fonction différentiable sur V alors la fonction $g \circ f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ est différentiable sur U et ses dérivée partielles sont données par :*

$$\frac{\partial (g \circ f)_j}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(f(x)).\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x), \qquad \forall i = 1, ..., n, \qquad \forall j = 1, ..., q.$$

Cette formule est appelée la règle de dérivation en chaîne.

Voici deux cas pratiques pour les fonctions à deux variables :

PROPOSITION 3.6.3. *(Cas $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$)*
Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto x(t) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto y(t) \end{aligned}$$

Alors, la fonction g

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto (x = x(t), y = y(t)) \mapsto g(t) = f(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

est dérivable et

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \times y'(t).$$

EXEMPLE 3.6.1. *On considère la fonction $g(t) = f(\cos t, \sin t)$ avec $f(x,y) = x^3 - y^3 + xy$.*
$1^{\text{ère}}$***Méthode :***
La dérivée de g est

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \times y'(t).$$

avec $x(t) = \cos t$ et $y(t) = \sin t$, donc

$$\begin{aligned} g'(t) &= -(3x^2(t) + y(t)) \sin t + (-3y^2(t) + x(t)) \cos t \\ &= -(3\cos t^2 + \sin t) \sin t + (-3\sin^2(t) + \cos t) \cos t. \end{aligned}$$

$2^{\text{ème}}$***Méthode :***
On a

$$g(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^3 t - \sin^3 t + \cos t \sin t$$

Alors

$$g'(t) = -3\cos t^2 \sin t - 3\sin^2(t) \cos t + \cos t \cos t - \sin t \sin t.$$

PROPOSITION 3.6.4. *(Cas $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$)*

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto x(u,v) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto y(u,v) \end{aligned}$$

Alors, la fonction g

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \qquad \mathbb{R}^2 \qquad \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto (x = x(u,v), y = y(u,v)) \mapsto g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v)) \end{aligned}$$

est dérivable et

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v)) \times \frac{\partial y}{\partial u}(u,v).$$
$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v)) \times \frac{\partial y}{\partial v}(u,v).$$

Exemple 3.6.2. *(Passage aux coordonnées polaires)*

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *une fonction de classse* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$*, tel que*

$$\begin{aligned} x:\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[&\to\mathbb{R} \qquad & y:\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[&\to\mathbb{R}\\ (r,\theta)&\mapsto x(r,\theta)=r.\cos\theta & (r,\theta)&\mapsto r.\sin\theta \end{aligned}$$

Comme les fonction x *et* y *sont de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[$*, et* f *est ainsi de* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$*, alors la fonction* $g(r,\theta)=f(x(r,\theta),y(r,\theta))$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[$ *et on a :*

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)&=\frac{\partial f}{\partial x}(x(r,\theta),y(r,\theta))\times\frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(r,\theta),y(r,\theta))\times\frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta)\\ &=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r.\cos\theta,r.\sin\theta)+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r.\cos\theta,r.\sin\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)&=\frac{\partial f}{\partial x}(x(r,\theta),y(r,\theta))\times\frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(r,\theta),y(r,\theta))\times\frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta).\\ &=-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r.\cos\theta,r.\sin\theta)+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r.\cos\theta,r.\sin\theta).\end{aligned}$$

3.7. Dérivées partielles d'ordre supérieur à 1, Fonctions de classe C^k et Théorème de Schwarz

Soit $f:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Les dérivées partielles définissent n nouvelles fonctions

$$f'_{x_i}(x_1,\cdots,x_n)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\cdots,x_n).$$

On peut regarder les dérivées partielles de chacune de ces nouvelles fonctions. Cela nous donne les dérivées partielles d'ordre 2 (aussi appellées les dérivées partielles secondes) et à leur tour on peut regarder les dérivées partielles des dérivées partielles d'ordre 2, etc. Cela s'écrit par exemple :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}:=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

.

Dérivées partielles d'ordre deux d'une fonction de deux variables

Soit $f:E\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction à deux variables dont les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et admettant aussi des dérivées partielles :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

Ces dérivées partielles sont appelées les dérivées partielles d'ordre deux de f, ce qui nous permet de définir la matrice (2×2) dite matrice Hessienne, notée H_f est définie par :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

Définition 3.7.1. Soit $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et soit $(x_0, y_0) \in E$. Par définition on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0+h, y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{h}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0+h) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{h}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{h}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+h) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{h}.$$

Exemple 3.7.1. *(1) Soit la fonction $f(x,y) = x^3y + e^{xy^2}$. On a f est dérivable sur $\mathbb{R}^2$, et ainsi ses dérivées partielles sont dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et on a :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + y^2e^{xy^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 + 2yxe^{xy^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = 6xy + y^4e^{xy^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) = 2xe^{xy^2} + 4y^2x^2e^{xy^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 3x^2 + 2ye^{xy^2} + 2y^3xe^{xy^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 3x^2 + 2ye^{xy^2} + 2y^3xe^{xy^2}.$$

(2) Soit f une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On va calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ *:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y + 3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5 - x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = 0,$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Définition 3.7.2. Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(1) On dit que f est de classe C^k, $k \geq 1$ sur E si toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues et on écrit $f \in C^k(E)$.

(2) On dit que f est de classe C^∞ sur E si elle est de classe $C^k(E)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et on écrit $f \in C^\infty(E)$.

Théorème 3.7.3. *(Schwarz)*
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^2 *sur* E*. Alors, on a en tout point* $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *de* E *:*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a), \qquad 1 \leq i,j \leq n.$$

Remarque 3.7.4. Le théorème de Schwarz implique que les dérivées partielles d'ordre k, $k \geq 2$, d'une fonction de classe C^k, $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ne dépendent pas de l'ordre dans lequel les dérivées partielles sont prises.

En particulier, pour une fonction $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (une fonction de deux variables) de classe $C^2(E)$, on a

$$\forall (a,b) \in E : \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b).$$

Exemple 3.7.2. *Revenant à le premier exemple (3.7.1) on a* f *est de classe* $C^2(\mathbb{R}^2)$*, alors* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$*.*
Par contre dans le deuxième exemple on a trouver que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

On en conclut que f est n'est pas de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$.

3.8. Théorème des accroissements finis

Définition 3.8.1. Soit a et b deux points de $\mathbb{R}^n$. On appelle segment de $\mathbb{R}^n$ d'extrémités a et b, l'ensemble de $\mathbb{R}^n$ noté $[a, b]$ et défini par

$$[a, b] = \{a + t(b - a), \quad t \in [0, 1]\}.$$

Cette définition généralise à $\mathbb{R}^n$ la notion bien connue de segment de $\mathbb{R}$.

Théorème 3.8.2. *(Théorème des accroissements finis)*

Soit E un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et continue. Soit $a = (a_1, ..., a_n)$ et $b = (b_1, ..., b_n)$ dans E tels que le segment $[a, b]$ soit contenu dans E. Si f est différentiable en chaque point du segment ouvert $]a, b[$, alors il existe un point c de $]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = \nabla f(c).(b - a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)(b_i - a_i).$$

3.9. Formule de Taylor

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS

Le développement limité de Mac Laurin au voininage de $x = 0$, à l'ordre "n" pour une fonction "f" indéfiniment dérivable s'écrit :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + o(x^n).$$

tel que $f^{(n)}$ éxprimer la dérivée d'ordre n et $o(x^n) = x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \longrightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

Nous obtenons au voisinage de 0, les développements limités des fonctions usuelles suivantes :

$f(x)$	Le développement limité de f au voisinage de 0
e^x	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots\dots\dots\dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\dots\dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\dots\dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$\sinh(x)$	$x + \frac{x^3}{3!} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
$\cosh(x)$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \dots\dots\dots\dots\dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \dots\dots\dots + x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 + \dots\dots\dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\dots\dots\dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n)$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots\dots\dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots.(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$
$arctanh(x)$	$x + \frac{x^3}{3} + \dots\dots\dots\dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$
$arctan(x)$	$x - \frac{x^3}{3} + \dots\dots\dots\dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$
$\sqrt{1+x}$	$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots\dots\dots\dots\dots + \frac{(-1)^{n-1}1.3.5\dots\dots..(2n-3)}{2^n(n)!}x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots\dots\dots\dots\dots + \frac{(-1)^n 1.3.5\dots\dots..(2n-1)}{2^n(n)!}x^n + o(x^n)$

On va généraliser la formule de Taylor au cas de fonctions de plusieurs variables.

Soit maintenant, E un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^p sur E, $a, a+h \in E$. On note

$$d^{(k)}f_a(h)^{(k)} = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} \ldots\ldots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\ldots\partial x_{i_k}}(a)h_{i_1}h_{i_2}\ldots.h_{i_k}, \qquad k = 1, \ldots\ldots, p.$$

On a par exemple

$$k = 1, \qquad df_a(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i = h.\nabla f(a).$$

$$k = 2, \qquad d^{(2)}f_a(h)^{(2)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_i h_j = h^T H_f(a)h.$$

Théorème 3.9.1. *(Formule de Taylor)*

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^p au voisinage du point $a = (a_1, a_2, \cdots a_p) \in E$. Soient $h = (h_1, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ et en supposant que le segment $[a, a+h]$ est inclus dans E. Alors le développement de Taylor de f au voisinage de a :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} d^{(k)}f_a(h)^{(k)} + o(\|h\|^p).$$

En particulier, la formule de Taylor à l'ordre 2 est la suivante :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a)h_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i\partial_j f(a)h_i h_j + o(\|h\|^2). \tag{3.5}$$

Remarque 3.9.2. L'idée de la formule de Taylor c'est de trouver une approximation de la fonction par un polynôme dans un voisinage d'un point donné.

Dans le cas particulier des fonctions de deux variables i.e $n = 2$, $a = (a, b)$, $h = (h, k)$, $(a + h) = (a+h, b+k)$, on a le développement de Taylor d'odre 2 i.e $p = 2$ est donné par :

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\ &+ \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right) + o(h^2+k^2) \end{aligned}$$

Exemple 3.9.1. *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \cos(x+y)$.*
La fonction f est de classe C^2 La formule de Taylor au point $(0, \frac{\pi}{4})$ à l'ordre 2 est donné par :

$$\begin{aligned} f(h, k+\frac{\pi}{4}) = &\; f(0,\frac{\pi}{4}) + h\frac{\partial f}{\partial x}(0,\frac{\pi}{4}) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0,\frac{\pi}{4}) \\ &+ \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,\frac{\pi}{4}) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,\frac{\pi}{4}) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,\frac{\pi}{4})\right) + o(h^2+k^2) = \\ &= \frac{-\sqrt{2}}{2}\left(-1 + h + k + \frac{h^2}{2} + hk + \frac{k^2}{2}\right) + o(h^2+k^2). \end{aligned}$$

Remarque 3.9.1. *Dans plusieurs cas, la fonction $(x,y) \longmapsto f(x,y)$ est une composition de fonctions d'une seule variable x et de la seule variable y, donc pour obtenir un développement limité à l'ordre 2 de f, on est ramené à faire des développement limités de fonctions d'une seule variable avec les formules classiques des fonctions usuelles, ainsi on écrire un développement limité de f sans calculer ses dérivées partielles.*

Exemples 3.9.1. *(1) Soit $f(x,y) = \cos x e^y$, f est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Pour obtenir un développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage $(0,0)$, on utilise les DL d'ordre 2 des fonctions $\cos x$ et e^y. On a*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad e^x = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2).$$

On fait le produit de $1 - \frac{x^2}{2}$ par $1 + y + \frac{y^2}{2}$, en conservant les termes x, y, x^2, xy, y^2 et en englobant tout le reste dans le reste $o(x^2+y^2)$, on obtient :

$$f(x,y) = \cos x e^y = 1 + y - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + o(x^2+y^2).$$

L'identification de ce développement avec la formule théorique, nous donne sans calculs supplémentaires les valeurs des dérivées partielles premières et deuxième de f au point $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0,0) = -1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,0) = 1.$$

(2) Soit $f(x,y) = \dfrac{1+x+y}{1+x-y}$. On cherchons le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage $(0,0)$,

$$f(x,y) = \frac{1+x+y}{1+x-y} = (1+x+y) \times \frac{1}{1+x-y}.$$

On a $(x,y) \in V(0,0)$ alors $(x-y) \in V(0,0)$, alors

$$f(x,y) = (1+x+y) \times (1 - (x-y) + (x-y)^2 + o(x^2+y^2)).$$

Par conséquent

$$f(x,y) = 1 + 2y - 2xy + 2y^2 + o(x^2+y^2).$$

Par identification avec la formule théorique, on trouve :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0,0) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,0) = 4.$$

3.10. Extremums libres

Définition 3.10.1. (Extremums)
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et soit $a \in E$. On dit que f admet un :

(1) maximum global (ou absolu) sur E au point $a \in E$ si

$$\forall x \in E, \quad f(x) \leq f(a).$$

(2) minimum global (ou absolu) sur E au point $a \in E$ si

$$\forall x \in E, \quad f(x) \geq f(a).$$

(3) maximum local (ou relatif) au point $a \in E$, s'il existe une boule ouverte $B(a,r) \subset E$ telle que

$$\forall x \in B(a,r), \quad f(x) \leq f(a).$$

(4) maximum local (ou relatif) au point $a \in E$, s'il existe une boule ouverte $B(a, r) \subset E$ telle que

$$\forall x \in B(a, r), \quad f(x) \geq f(a).$$

On dit que f admet un extremum au point a si elle admet un maximum ou un minimun au point a.

Théorème 3.10.2. *(Théorème des extremums sur un compact)*
Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un compact $K \subset \mathbb{R}^n$. Alors f admet un maximum et un minimum sur K.

Définition 3.10.3. (Point critique)
Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur E. On dit que $a \in E$ est un point critique de f si toutes les dérivées partielles s'annulent en a (équivalent à dire que $\nabla f(a) = 0$).

Théorème 3.10.4. *(Condition nécessaire d'extremum local)*
Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 définie sur un ouvert $E \subset \mathbb{R}^n$ admettant un extremum local au point $a \in E$. Alors a est un point critique de f.

3.10.1. Extremums dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 3.10.5. Soit $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $(x_0, y_0) \in E$ un point critique de f. On pose :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \ \ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \ \ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

et

$$\triangle = rt - s^{2.}$$

Alors

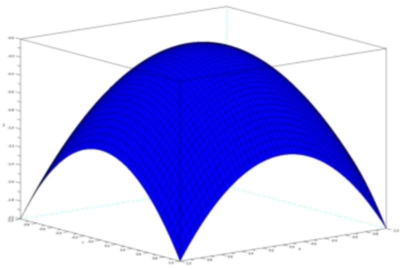
(1) Si $\triangle > 0$, le point (x_0, y_0) est un extremum local de f et on a :
- Si $r > 0$, le point (x_0, y_0) est un minimum local de f sur E.
- Si $r < 0$, le point (x_0, y_0) est un maximum local de f sur E.

(2) Si $\triangle < 0$, la fonction f n'admet pas d'extremum local, on dit alors que (x_0, y_0) est un point selle ou col.

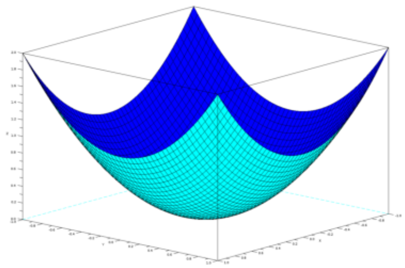
(3) Si $r = 0$, on ne peut rien conclure.

On résume, si a est un point critique de f, sa nature est déterminée par le tableux suivant :

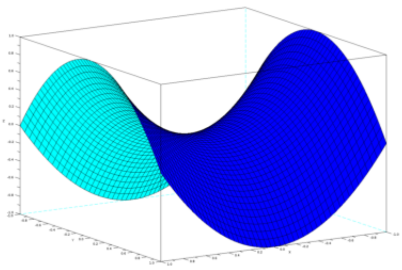
$\triangle = rt - s^2$	$r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(a)$	Nature du point a
+	+	minimum local
+	-	maximum local
-		point selle
0		on ne peut pas conclure



(a) *Maximum*



(b) *Minimum*



(c) *Point col*

EXEMPLE 3.10.6. On veut étudier la fonction $f(x, y) = 2x^2y + 2x^2 + y^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On cherche les points critiques :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = 4xy + 4x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = 2x^2 + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(y+1) & = 0 \\ x^2 + y & = 0 \end{cases}$$

On trouve alors trois points critiques $(0, 0), (-1, -1)$ et $(1, -1)$.

Points critiques	$(0,0)$	$(-1,-1)$	$(1,-1)$
$r = 4y + 4$	4	0	0
$s = 4x$	0	-4	4
$t = 2$	2	2	2
$rt - s^2$	8	-16	-16
Signe de r	$r > 0$		
Nature du pt critique :	min	pt selle	pt selle

Les extrema globaux : on voit que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x,0) = \lim_{x \to \pm\infty} 2x^2 = +\infty,$$

donc pas de maximum global. Pas de minimum global non plus car

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x,-2) = \lim_{x \to \pm\infty} -2x^2 + 4 = -\infty.$$

Bibliographie

[1] François Cottet-Emard, *Analyse 2* , de boeck, 2004.

[2] François Rideau *Exercices de calcul différentiel* ., Hermann, 1979.

[3] Maurice Gaultier, *Exercices et problèmes Analyse.*, Dunod, 2008.

[4] Nilkolaï Piskounov, *Calcul différentielle et intégral (tome 1 et 2).*, Edition Mir.