Analyse -3-

Les séries numériques - partie 1-

Sidi Ali Fatima Zohra[1]

2 ème Statistiques et Analyse des Données

Université de Mostefa Ben Boulaïd -Batna 2 -

Année Universitaire : 2020/ 2021

1 Chapitre 1. Séries numériques.
2 Chapitre 2. Suites et séries de fonctions.
3 Chapitre 3. Séries entières.
4 Chapitre 4. Séries de Fourier.
5 Chapitre 5. Intégrales impropres-Fonctions définies par une intégrale .

1. Chapitre 1. Séries numériques.
2. Chapitre 2. Suites et séries de fonctions.
3. Chapitre 3. Séries entières.
4. Chapitre 4. Séries de Fourier.
5. Chapitre 5. Intégrales impropres-Fonctions définies par une intégrale .

Tables des matières

1. Chapitre 1. Séries numériques.
2. Chapitre 2. Suites et séries de fonctions.
3. Chapitre 3. Séries entières.
4. Chapitre 4. Séries de Fourier.
5. Chapitre 5. Intégrales impropres-Fonctions définies par une intégrale .

1. Chapitre 1. Séries numériques.
2. Chapitre 2. Suites et séries de fonctions.
3. Chapitre 3. Séries entières.
4. Chapitre 4. Séries de Fourier.
5. Chapitre 5. Intégrales impropres-Fonctions définies par une intégrale .

Tables des matières

1. Chapitre 1. Séries numériques.
2. Chapitre 2. Suites et séries de fonctions.
3. Chapitre 3. Séries entières.
4. Chapitre 4. Séries de Fourier.
5. Chapitre 5. Intégrales impropres-Fonctions définies par une intégrale .

Les séries numériques

Plan de travail

1 Introduction

2 Objectifs

3 Notions générales

4 Conditions nécessaires de convergence

5 Structure algébrique de l'ensemble des séries convergentes

6 Propriétés

7 Bibliographie

1 Introduction

2 Objectifs

3 Notions générales

4 Conditions nécessaires de convergence

5 Structure algébrique de l'ensemble des séries convergentes

6 Propriétés

7 Bibliographie

Introduction

La théorie des séries à pour but de donner si possible un sens à la somme d'une infinité des nombres.
Les sommes infinies :

1. $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots\ldots$
2. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

la somme infinie généralise la notion d'une somme finie.

Introduction

La théorie des séries à pour but de donner si possible un sens à la somme d'une infinité des nombres.

Les sommes infinies :

1. $1 + 2 + 3 + 4 + \dots\dots\dots\dots$
2. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\dots\dots\dots$

la somme infinie généralise la notion d'une somme finie.

Introduction

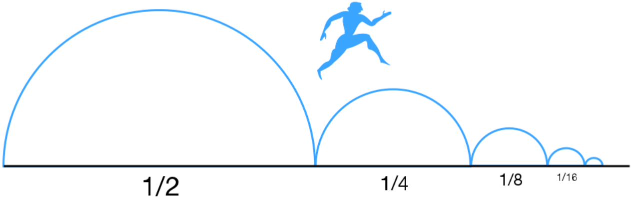
La théorie des séries à pour but de donner si possible un sens à la somme d'une infinité des nombres.
Les sommes infinies :

1. $1 + 2 + 3 + 4 + \dots\dots\dots\dots$
2. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\dots\dots\dots$

la somme infinie généralise la notion d'une somme finie.

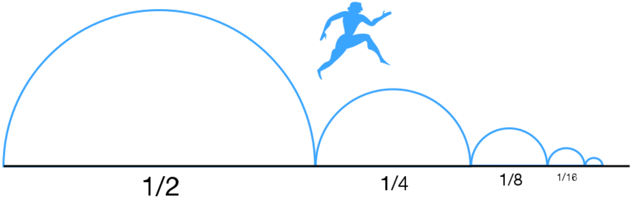
Introduction

De point de vue mathématique, la somme d'une infinité de nombres positifs n'est pas nécéssairement infinie. En effet, la somme de ces termes de la suite défine par $u_n = \dfrac{1}{2^n}$, vaut 1.



Introduction

De point de vue mathématique, la somme d'une infinité de nombres positifs n'est pas nécéssairement infinie. En effet, la somme de ces termes de la suite défine par $u_n = \frac{1}{2^n}$, vaut 1.



Introduction

- Série numérique
  - Divergente
  - Convergente
    - on sait calculer sa valeur
    - on ne connaît pas sa valeur exacte

Objectifs

- Etudier la nature d'une série numérique.
- Savoir les conditions nécéssaires et suffisantes de convergence.
- Effectuer la somme d'une série convergente (si possible).

Objectifs

- Etudier la nature d'une série numérique.
- Savoir les conditions nécéssaires et suffisantes de convergence.
- Effectuer la somme d'une série convergente (si possible).

Objectifs

- Etudier la nature d'une série numérique.
- Savoir les conditions nécéssaires et suffisantes de convergence.
- Effectuer la somme d'une série convergente (si possible).

1 Introduction

2 Objectifs

3 Notions générales

4 Conditions nécessaires de convergence

5 Structure algébrique de l'ensemble des séries convergentes

6 Propriétés

7 Bibliographie

Notions générales

Définition

On appelle série à termes dans $\mathbb{K}$ (le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) tout couple $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$ formé d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = u_0,$$
$$S_1 = u_0 + u_1,$$
$$.$$
$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

- *u_n s'appelle le terme général de la série.*
- *S_n s'appelle la $n^{\text{ème}}$ somme partielle de la série.*
- *La série est notée $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.*

Notions générales

Définition

On appelle série à termes dans $\mathbb{K}$ *(le corps* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) tout couple* $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *formé d'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et de la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$\begin{aligned} S_0 &= u_0, \\ S_1 &= u_0 + u_1, \\ &. \\ S_n &= u_0 + u_1 + ... + u_n, \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

- u_n *s'appelle le terme général de la série.*
- S_n *s'appelle la* $n^{\text{ème}}$ *somme partielle de la série.*
- *La série est notée* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

Notions générales

Définition

On appelle série à termes dans $\mathbb{K}$ (le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) tout couple $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$ formé d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{aligned} S_0 &= u_0, \\ S_1 &= u_0 + u_1, \\ &. \\ S_n &= u_0 + u_1 + ... + u_n, \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

- u_n *s'appelle le terme général de la série.*
- S_n *s'appelle la $n^{ème}$ somme partielle de la série.*
- *La série est notée* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

Notions générales

Définition

On appelle série à termes dans $\mathbb{K}$ (le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) tout couple $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$ formé d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{aligned} S_0 &= u_0, \\ S_1 &= u_0 + u_1, \\ &. \\ S_n &= u_0 + u_1 + ... + u_n, \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

- u_n *s'appelle le terme général de la série.*
- S_n *s'appelle la $n^{\text{ème}}$ somme partielle de la série.*
- *La série est notée* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

Notions générales

Définition

1. *On dit que la série* $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ *converge si et seulement si la suite* $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *des sommes partielles converge, et dans ce cas, la limite de la suite* $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est appelée somme de la série* $\sum_{n \geqslant 0} u_n$*, et on écrit* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n$.
2. *On dit que la série* $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ *diverge si et seulement si elle ne converge pas.*

Notions générales

Définition

1. *On dit que la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge si et seulement si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des sommes partielles converge, et dans ce cas, la limite de la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est appelée somme de la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, *et on écrit* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n$.
2. *On dit que la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge si et seulement si elle ne converge pas.*

Notions générales

Définition

1. *On dit que la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge si et seulement si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des sommes partielles converge, et dans ce cas, la limite de la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est appelée somme de la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$*, et on écrit* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n$.
2. *On dit que la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge si et seulement si elle ne converge pas.*

Notions générales

Définition

1. *On dit que la série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *converge si et seulement si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des sommes partielles converge, et dans ce cas, la limite de la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est appelée somme de la série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$*, et on écrit* $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} S_n$.
2. *On dit que la série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge si et seulement si elle ne converge pas.*

Notions générales

Exemples

1) Soit la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$,

$u_n = \frac{1}{n(n-1)}$ *est le terme général.*

$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$ *la somme partielle.*

En effet

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \\ &= (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}) + (\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}) \\ &= 1-\frac{1}{n}, \end{aligned}$$

alors $\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = 1$, *donc* $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ *est convergente et* $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$.

Notions générales

Exemples

1) Soit la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(n-1)}$,

$u_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$ *est le terme général.*

$S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}$ *la somme partielle.*

En effet

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k} \\ &= (1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+....+(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1})+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}) \\ &= 1-\frac{1}{n}, \end{aligned}$$

alors $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = 1$, *donc* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ *est convergente et* $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n-1)} = 1.$

Notions générales

Exemples

1) Soit la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$,

$u_n = \frac{1}{n(n-1)}$ *est le terme général.*

$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$ *la somme partielle.*

En effet

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \\ &= (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}) + (\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}) \\ &= 1-\frac{1}{n}, \end{aligned}$$

alors $\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = 1$, *donc* $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ *est convergente et* $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1.$

Notions générales

Exemples

1) Soit la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$,

$u_n = \frac{1}{n(n-1)}$ *est le terme général.*

$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$ *la somme partielle.*

En effet

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \\ &= (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}) + (\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}) \\ &= 1-\frac{1}{n}, \end{aligned}$$

alors $\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = 1$, *donc* $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ *est convergente et* $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1.$

Notions générales

Exemples

1) Soit la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n(n-1)}$,

$u_n = \frac{1}{n(n-1)}$ *est le terme général.*

$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$ *la somme partielle.*

En effet

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \\ &= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}) + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) \\ &= 1 - \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

alors $\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = 1$, *donc* $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ *est convergente et* $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$.

Notions générales

Exemples

2) Soit la série $\sum_{n\geqslant 0} q^n$, *dite* *la série géométrique de raison* q. *En effet,*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 + q^1 + \dots + q^n$$

$$= \begin{cases} q^0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & si\ q \neq 1 \\ 1+1+\dots+1 & si\ q = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & si\ q \neq 1, \\ n+1 & si\ q = 1. \end{cases}$$

D'oú : Si $q = 1$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = +\infty$ *la série* $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ *est divergente.*

Si $|q| < 1$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$ *la série* $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ *est convergente vers* $\dfrac{1}{1-q}$.

Si $|q| > 1$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \pm\infty$ *la série* $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ *est divergente. On conclut que :*

La série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ *converge ssi* $|q| < 1$ *et* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

Notions générales

Exemples

2) Soit la série $\sum_{n\geqslant 0} q^n$, *dite la série géométrique de raison* q. *En effet,*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 + q^1 + ... + q^n$$

$$= \begin{cases} q^0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & si\, q \neq 1 \\ 1+1+....+1 & si\, q = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & si\, q \neq 1, \\ n+1 & si\, q = 1. \end{cases}$$

D'oú : *Si* $q = 1$, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = +\infty$ *la série* $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ *est divergente.*

Si $|q| < 1$, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$ *la série* $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ *est convergente vers* $\dfrac{1}{1-q}$.

Si $|q| > 1$, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = \pm\infty$ *la série* $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ *est divergente. On conclut que :*

La série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ *converge ssi* $|q| < 1$ *et* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

Notions générales

Exemples

2) Soit la série $\sum_{n\geqslant 0} q^n$, *dite* *la série géométrique de raison* q. *En effet,*

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 + q^1 + \dots + q^n \\ &= \begin{cases} q^0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & si\, q \neq 1 \\ 1+1+\dots+1 & si\, q = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & si\, q \neq 1, \\ n+1 & si\, q = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

D'oú : Si $q = 1$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = +\infty$ *la série* $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ *est divergente.*

Si $|q| < 1$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$ *la série* $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ *est convergente vers* $\dfrac{1}{1-q}$.

Si $|q| > 1$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \pm\infty$ *la série* $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ *est divergente. On conclut que :*

La série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ *converge ssi* $|q| < 1$ *et* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

Notions générales

Exemples

2) Soit la série $\sum_{n\geqslant 0} q^n$, *dite* *la série géométrique de raison* q. *En effet,*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 + q^1 + \ldots.. + q^n$$
$$= \begin{cases} q^0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & si\, q \neq 1 \\ 1+1+\ldots.+1 & si\, q = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & si\, q \neq 1, \\ n+1 & si\, q = 1. \end{cases}$$

D'oú : Si $q = 1$, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = +\infty$ *la série* $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ *est divergente.*

Si $|q| < 1$, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$ *la série* $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ *est convergente vers* $\dfrac{1}{1-q}$.

Si $|q| > 1$, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = \pm\infty$ *la série* $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ *est divergente. On conclut que :*

La série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ *converge ssi* $|q| < 1$ *et* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

Notions générales

Exemples

2) Soit la série $\sum_{n\geqslant 0} q^n$, *dite* *la série géométrique de raison* q. *En effet,*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 + q^1 + \ldots.. + q^n$$
$$= \begin{cases} q^0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & si\, q \neq 1 \\ 1+1+\ldots.+1 & si\, q = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & si\, q \neq 1, \\ n+1 & si\, q = 1. \end{cases}$$

D'oú : Si $q = 1$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = +\infty$ *la série* $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ *est divergente.*

Si $|q| < 1$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$ *la série* $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ *est convergente vers* $\dfrac{1}{1-q}$.

Si $|q| > 1$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \pm\infty$ *la série* $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ *est divergente. On conclut que :*

La série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} q^n$ *converge ssi* $|q| < 1$ *et* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

Notions générales

Exemples

2) Soit la série $\sum_{n \geqslant 0} q^n$, *dite la série géométrique de raison* q. *En effet,*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 + q^1 + \ldots.. + q^n$$

$$= \begin{cases} q^0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & si\, q \neq 1 \\ 1 + 1 + \ldots. + 1 & si\, q = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & si\, q \neq 1, \\ n + 1 & si\, q = 1. \end{cases}$$

D'oú : Si $q = 1$, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} S_n = +\infty$ *la série* $\sum_{n \geqslant 0} q^n$ *est divergente.*

Si $|q| < 1$, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} S_n = \dfrac{1}{1 - q}$ *la série* $\sum_{n \geqslant 0} q^n$ *est convergente vers* $\dfrac{1}{1 - q}$.

Si $|q| > 1$, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} S_n = \pm\infty$ *la série* $\sum_{n \geqslant 0} q^n$ *est divergente. On conclut que :*

La série géométrique $\sum_{n \geqslant 0} q^n$ *converge ssi* $|q| < 1$ *et* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1 - q}$.

1 Introduction

2 Objectifs

3 Notions générales

4 Conditions nécessaires de convergence

5 Structure algébrique de l'ensemble des séries convergentes

6 Propriétés

7 Bibliographie

Conditions nécéssaires de convergence

Proposition

Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge, alors* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$.

Démonstration.

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, donc $\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = S$, d'autre part on a $u_n = S_n - S_{n-1}$.

Par conséquent $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$. □

Remarque

Lorsque $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n \neq 0$, *on dit que* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge grossièrement.*

Conditions nécéssaires de convergence

Proposition

Si la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ *converge, alors* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$.

Démonstration.

Soit $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge, donc $\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = S$, d'autre part on a $u_n = S_n - S_{n-1}$.

Par conséquent $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$. □

Remarque

Lorsque $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n \neq 0$, *on dit que* $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ *diverge grossièrement.*

Conditions nécéssaires de convergence

Proposition

Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge, alors* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$.

Démonstration.

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, donc $\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = S$, d'autre part on a $u_n = S_n - S_{n-1}$.
Par conséquent $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$. □

Remarque

Lorsque $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n \neq 0$, *on dit que* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge grossièrement*.

Conditions nécéssaires de convergence

Exemples

1. $u_n = \dfrac{2n}{n+1} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 2$, *donc la série* $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ *diverge grossièrement.*
2. $u_n = \cos n$, *alors la série* $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ *diverge grossièrement.*
3. $u_n = n$, *donc la série* $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ *diverge grossièrement.*

Conditions nécéssaires de convergence

Exemples

1. $u_n = \dfrac{2n}{n+1} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 2$, *donc la série* $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ *diverge grossièrement.*
2. $u_n = \cos n$, *alors la série* $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ *diverge grossièrement.*
3. $u_n = n$, *donc la série* $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ *diverge grossièrement.*

Conditions nécéssaires de convergence

Exemples

1. $u_n = \dfrac{2n}{n+1} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 2$, *donc la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge grossièrement.*
2. $u_n = \cos n$, *alors la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge grossièrement.*
3. $u_n = n$, *donc la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge grossièrement.*

Conditions nécessaires de convergence

Définition

(Reste d'ordre n d'une série convergente)

La série $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ *s'appelle le reste de la série convergente* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et on la note*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = R_n.$$

Proposition

Si une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est convergente, alors* $S = S_n + R_n$ *(pour tout* $n \geq 0$*) et*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} R_n = 0.$$

Remarque

Lorsque $\lim_{n\longrightarrow+\infty} R_n \neq 0$*, alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge grossièrement.*

Conditions nécessaires de convergence

Définition

(Reste d'ordre n d'une série convergente)

La série $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ *s'appelle le reste de la série convergente* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et on la note* $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = R_n$.

Proposition

Si une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est convergente, alors* $S = S_n + R_n$ *(pour tout* $n \geq 0$*) et* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} R_n = 0$.

Remarque

Lorsque $\lim_{n\longrightarrow+\infty} R_n \neq 0$, *alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge grossièrement.*

Conditions nécessaires de convergence

Définition

(Reste d'ordre n d'une série convergente)

La série $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ *s'appelle le reste de la série convergente* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et on la note* $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = R_n$.

Proposition

Si une série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est convergente, alors* $S = S_n + R_n$ *(pour tout* $n \geq 0$*) et* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} R_n = 0$.

Remarque

Lorsque $\lim_{n\longrightarrow+\infty} R_n \neq 0$, *alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge grossièrement.*

Conditions necéssaires de convergence

Exemple

(Série harmonique)

Soit $u_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, *on a*

$$R_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n+n} + \underbrace{\frac{1}{2n+1} + \ldots\ldots}_{>0}$$

$$\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\not\rightarrow} 0$$

alors, la série harmonique $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ *est divergente.*

Conditions necéssaires de convergence

Exemple

(Série harmonique)

Soit $u_n = \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$, *on a*

$$R_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n+n} + \underbrace{\frac{1}{2n+1} + \ldots..}_{>0}$$

$$\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\not\to} 0$$

alors, la série harmonique $\sum_{n\geqslant1} \dfrac{1}{n}$ *est divergente.*

Conditions necéssaires de convergence

Exemple

(Série harmonique)

Soit $u_n = \frac{1}{n},\ n \geq 1,$ *on a*

$$R_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n} + \underbrace{\frac{1}{2n+1} + ...}_{>0}$$

$$\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\not\rightarrow} 0$$

alors, la série harmonique $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ *est divergente.*

Conditions necéssaires de convergence

Exemple

(Série harmonique)

Soit $u_n = \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$, *on a*

$$R_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n+n} + \underbrace{\frac{1}{2n+1} + \ldots..}_{>0}$$

$$\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\not\rightarrow} 0$$

alors, la série harmonique $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ *est divergente.*

Condition nécessaire et suffisante de convergence

Théorème

(Critère de cauchy de convergence d'une série)
La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge si et seulement si* $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}^*$ *:*
$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon.$$

Condition nécessaire et suffisante de convergence

Exemple

2)On va montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n^2}$ *soit convergente . En effet*

$$
\begin{aligned}
|S_{n+p} - S_n| &= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2}\right| \\
&= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots\dots\dots + \frac{1}{(n+p)^2} \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+1)} + \frac{1}{(n+2)(n+2)} + \dots\dots\dots + \frac{1}{(n+p)(n+p)} \\
&\leq \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots\dots\dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\
&= (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) + \dots\dots\dots + (\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \leq \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

Condition nécessaire et suffisante de convergence

Exemple

2)On va montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n^2}$ *soit convergente . En effet*

$$
\begin{aligned}
|S_{n+p}-S_n| &= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}\right| \\
&= \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots\dots\dots+\frac{1}{(n+p)^2} \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+1)}+\frac{1}{(n+2)(n+2)}+\dots\dots\dots+\frac{1}{(n+p)(n+p)} \\
&\leq \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\dots\dots\dots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\
&= (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})+(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})+\dots\dots\dots+(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}) \\
&= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}\leq\frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

Conditions nécessaire et suffisante de convergence

D'autre part on a : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \frac{1}{n} < \varepsilon$.
Par conséquent,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}^* : \quad |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Conditions nécessaire et suffisante de convergence

D'autre part on a : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc, $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \frac{1}{n} < \varepsilon$.
Par conséquent,

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}^* : \quad |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

1 Introduction

2 Objectifs

3 Notions générales

4 Conditions nécessaires de convergence

5 Structure algébrique de l'ensemble des séries convergentes

6 Propriétés

7 Bibliographie

Structure algébrique

Règles générales

- Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ convergentes alors $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ converge.
- Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge alors pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $\sum_{n\geqslant 0}\lambda u_n$ converge.
- Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge alors $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ diverge.
- Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ divergent alors $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ peut diverger comme elle peut converger.

Structure algébrique

Règles générales

- Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ convergentes alors $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ converge.
- Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge alors pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $\sum_{n\geqslant 0}\lambda u_n$ converge.
- Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge alors $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ diverge.
- Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ divergent alors $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ peut diverger comme elle peut converger.

Structure algébrique

Règles générales

- Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ convergentes alors $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ converge.
- Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge alors pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $\sum_{n\geqslant 0}\lambda u_n$ converge.
- Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge alors $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ diverge.
- Si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ divergent alors $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ peut diverger comme elle peut converger.

Structure algébrique

Règles générales

- Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ convergentes alors $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ converge.
- Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \lambda u_n$ converge.
- Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ diverge alors $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ diverge.
- Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ divergent alors $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ peut diverger comme elle peut converger.

Exemples

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ *et* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{-1}{n}$ *elles divergent mais* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} + \sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{-1}{n} = 0$ *converge.*
2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} 1$ *et* $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n$ *elles divergent et* $\sum\limits_{n\geqslant 1} 1 + (-1)^n$ *aussi diverge .*

Exemples

1. $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ *et* $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{-1}{n}$ *elles divergent mais* $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}+\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{-1}{n}=0$ *converge.*
2. $\sum\limits_{n\geqslant 1}1$ *et* $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n$ *elles divergent et* $\sum\limits_{n\geqslant 1}1+(-1)^n$ *aussi diverge .*

1 Introduction

2 Objectifs

3 Notions générales

4 Conditions nécessaires de convergence

5 Structure algébrique de l'ensemble des séries convergentes

6 Propriétés

7 Bibliographie

Propriétés

Proposition

(Changement d'indice de départ)

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *une série, la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ *(* $n_0 \in \mathbb{N}$*) sont de même nature, et si elles convergent, on a :* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n_0}^{+\infty} u_n$

Proposition

(Suite et série)

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge si et seulement si la série* $\sum_{n\geqslant 0} v_n - v_{n+1}$ *converge et on a alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n - v_{n+1} = v_0 - \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_{n+1}$.

Propriétés

Proposition

(Changement d'indice de départ)

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *une série, la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ *(* $n_0 \in \mathbb{N}$*) sont de même nature, et si elles convergent, on a :* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n_0}^{+\infty} u_n$

Proposition

(Suite et série)

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge si et seulement si la série* $\sum_{n\geqslant 0} v_n - v_{n+1}$ *converge et on a alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n - v_{n+1} = v_0 - \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_{n+1}$.

Propriétés

Exemples

1. *On va étudier la nature de la série suivante :* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

On a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, *on prend* $v_n = \frac{1}{n}$ *alors* $\frac{1}{n(n+1)} = v_n - v_{n+1}$ *et* (v_n) *converge vers* 0. *On conclut que,* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ *converge et*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = v_1 - \lim_{n \longrightarrow +\infty} v_{n+1} = 1 - 0 = 1.$$

Propriétés

Exemples

1. *On va étudier la nature de la série suivante :* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$.

   On a $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$*, on prend* $v_n=\dfrac{1}{n}$ *alors* $\dfrac{1}{n(n+1)}=v_n-v_{n+1}$ *et* (v_n) *converge vers* 0*. On conclut que,* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ *converge et*

   $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=v_1-\lim_{n\longrightarrow+\infty}v_{n+1}=1-0=1.$$

Propriétés

Exemples

1. *On va étudier la nature de la série suivante :* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

On a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, *on prend* $v_n = \frac{1}{n}$ *alors* $\frac{1}{n(n+1)} = v_n - v_{n+1}$ *et* (v_n) *converge vers* 0. *On conclut que,* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ *converge et*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = v_1 - \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_{n+1} = 1 - 0 = 1.$$

Propriétés

Exemples

1. *On va étudier la nature de la série suivante :* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

   On a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, *on prend* $v_n = \frac{1}{n}$ *alors* $\frac{1}{n(n+1)} = v_n - v_{n+1}$ *et* (v_n) *converge vers* 0. *On conclut que,* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ *converge et*

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = v_1 - \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_{n+1} = 1 - 0 = 1.$$

Propriétés

Exemples

1. *On va étudier la nature de la série suivante :* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.

   On a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, *on prend* $v_n = \frac{1}{n}$ *alors* $\frac{1}{n(n+1)} = v_n - v_{n+1}$ *et* (v_n) *converge vers* 0. *On conclut que,* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ *converge et*

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = v_1 - \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_{n+1} = 1 - 0 = 1.$$

1 Introduction

2 Objectifs

3 Notions générales

4 Conditions nécessaires de convergence

5 Structure algébrique de l'ensemble des séries convergentes

6 Propriétés

7 Bibliographie

Bibliographie

- **J-M, Monier.,** *Les méthodes et exercices de mathématiques MPSI, DUNOD. Paris.*, 2008 .
- **K, Allab.,** *Eléments d'analyse, O.P.U . Tome 1 et 2.*, 2007.
- **G-D, Sylvie.,** *Suites, séries, Intégrales, Cours et exercices.*
- **L,Pascal .,** *Intégrales généralisées. Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions. Séries entières, Exercices corrigés.*

Bibliographie

- **J-M, Monier.,** *Les méthodes et exercices de mathématiques MPSI, DUNOD. Paris.*, 2008 .
- **K, Allab.,** *Eléments d'analyse, O.P.U . Tome 1 et 2.*, 2007.
- **G-D, Sylvie.,** *Suites, séries, Intégrales, Cours et exercices.*
- **L,Pascal .,** *Intégrales généralisées. Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions. Séries entières, Exercices corrigés.*

Bibliographie

J-M, Monier., *Les méthodes et exercices de mathématiques MPSI, DUNOD. Paris.*, 2008 .

K, Allab., *Eléments d'analyse, O.P.U . Tome 1 et 2.*, 2007.

G-D, Sylvie., *Suites, séries, Intégrales, Cours et exercices.*

L,Pascal ., *Intégrales généralisées. Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions. Séries entières, Exercices corrigés.*

Bibliographie

- **J-M, Monier.,** *Les méthodes et exercices de mathématiques MPSI, DUNOD. Paris.*, 2008 .
- **K, Allab.,** *Eléments d'analyse, O.P.U . Tome 1 et 2.*, 2007.
- **G-D, Sylvie.,** *Suites, séries, Intégrales, Cours et exercices.*
- **L,Pascal .,** *Intégrales généralisées. Suites et séries numériques. Suites et séries de fonctions. Séries entières, Exercices corrigés.*

Les sites web

1. http://exo7.emath.fr/
2. http: //www.bibmath.net/
3. https://groupe-reussite.fr/cours-en-ligne-series-numeriques-maths-spe/
4. https://www.studocu.com/

Les sites web

1. http://exo7.emath.fr/
2. http: //www.bibmath.net/
3. https://groupe-reussite.fr/cours-en-ligne-series-numeriques-maths-spe/
4. https://www.studocu.com/

Les sites web

1. http://exo7.emath.fr/
2. http: //www.bibmath.net/
3. https://groupe-reussite.fr/cours-en-ligne-series-numeriques-maths-spe/
4. https://www.studocu.com/

Les sites web

1. http://exo7.emath.fr/
2. http: //www.bibmath.net/
3. https://groupe-reussite.fr/cours-en-ligne-series-numeriques-maths-spe/
4. https://www.studocu.com/