Analyse 3

-Séries numériques - Partie 2-

Sidi ali Fatima Zohra[1]

2 ème Statistiques et Analyse des Données

Université de Mostefa Ben Boulaïd -Batna 2 -

Année Universitaire : 2020/ 2021

Les séries numériques à termes positifs

Plan de travail

1. Notions générales
2. Théorèmes de comparaison
3. Série de Riemann
4. Série de Bertrand
5. Critère de d'Alembert
6. Critère de Cauchy

1 Notions générales

2 Théorèmes de comparaison

3 Série de Riemann

4 Série de Bertrand

5 Critère de d'Alembert

6 Critère de Cauchy

Séries à termes positifs

Définition

Une série $(\sum_{n\geqslant 0} u_n)$ *est dite série à termes positifs si* $u_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Lemme

Soit $(\sum_{n\geqslant 0} u_n)$ *une série à termes positifs,* $(\sum_{n\geqslant 0} u_n)$ *converge si et seulement si* (S_n) *est majorée.*

Démonstration.

Soit $(\sum_{n\geqslant 0} u_n)$ une série à termes positifs alors $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geq S_n$ donc S_n est croissante d'ou (S_n) converge si et seulement si (S_n) est majorée. □

Remarque

Si une série à terme positif diverge alors $\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = +\infty$.

Séries à termes positifs

Définition

Une série $(\sum_{n\geqslant 0} u_n)$ *est dite série à termes positifs si* $u_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Lemme

Soit $(\sum_{n\geqslant 0} u_n)$ *une série à termes positifs,* $(\sum_{n\geqslant 0} u_n)$ *converge si et seulement si* (S_n) *est majorée.*

Démonstration.

Soit $(\sum_{n\geqslant 0} u_n)$ une série à termes positifs alors $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geq S_n$ donc S_n est croissante d'ou (S_n) converge si et seulement si (S_n) est majorée. $\square$

Remarque

Si une série à terme positif diverge alors $\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = +\infty$.

Séries à termes positifs

Définition

Une série $\left(\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n\right)$ *est dite série à termes positifs si* $u_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Lemme

Soit $\left(\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n\right)$ *une série à termes positifs,* $\left(\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n\right)$ *converge si et seulement si* (S_n) *est majorée.*

Démonstration.

Soit $\left(\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n\right)$ une série à termes positifs alors $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geq S_n$ donc S_n est croissante d'ou (S_n) converge si et seulement si (S_n) est majorée. $\square$

Remarque

Si une série à terme positif diverge alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Séries à termes positifs

Définition

Une série $(\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n)$ *est dite série à termes positifs si* $u_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Lemme

Soit $(\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n)$ *une série à termes positifs,* $(\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n)$ *converge si et seulement si* (S_n) *est majorée.*

Démonstration.

Soit $(\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n)$ une série à termes positifs alors $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geq S_n$ donc S_n est croissante d'ou (S_n) converge si et seulement si (S_n) est majorée. $\square$

Remarque

Si une série à terme positif diverge alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Séries à termes positifs

Exemple

Soit $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ *(c'est une série à terme positif), on a*

$\frac{1}{n^2}\leq\frac{1}{n(n-1)}$ $\forall n\geq 2$, *alors*

$$\begin{aligned} S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} &\leq 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)} \\ &= 1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) \\ &= 1+\left(1-\frac{1}{n}\right) \\ &= 2-\frac{1}{n} \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

(S_n) *est majorée donc* $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ *converge.*

Séries à termes positifs

Exemple

Soit $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ *(c'est une série à terme positif), on a*
$\frac{1}{n^2}\leq\frac{1}{n(n-1)}$ $\forall n\geq 2$, *alors*

$$\begin{aligned} S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} &\leq 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)} \\ &= 1+\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}) \\ &= 1+(1-\frac{1}{n}) \\ &= 2-\frac{1}{n} \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

(S_n) *est majorée donc* $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ *converge.*

Séries à termes positifs

Exemple

Soit $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *(c'est une série à terme positif), on a*

$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ $\forall n \geq 2$, *alors*

$$
\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} &\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \\
&= 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
&= 2 - \frac{1}{n} \\
&\leq 2
\end{aligned}
$$

(S_n) *est majorée donc* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *converge.*

1 Notions générales

2 Théorèmes de comparaison

3 Série de Riemann

4 Série de Bertrand

5 Critère de d'Alembert

6 Critère de Cauchy

Critère de comparaison

Théorème

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *deux séries à termes positifs et vérifiant :*

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k,\ u_n \leq v_n,$$

alors

1. *Si* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *converge alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge.*
2. *Si* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge alors* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *diverge.*

Critère de comparaison

Théorème

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *deux séries à termes positifs et vérifiant :*

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k,\ u_n \leq v_n,$$

alors

1. *Si* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *converge alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge.*
2. *Si* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge alors* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *diverge.*

Critère de comparaison

Théorème

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *deux séries à termes positifs et vérifiant :*

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k,\ u_n \leq v_n,$$

alors

1. *Si* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *converge alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge.*
2. *Si* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge alors* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *diverge.*

Critère de comparaison

Théorème

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *deux séries à termes positifs et vérifiant :*

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall n \geq k,\ u_n \leq v_n,$$

alors

1. *Si* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *converge alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge.*
2. *Si* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge alors* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *diverge.*

Critère de comparaison

Démonstration.

1. On suppose que $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ soit converge alors sa somme partielle $\sum_{k=0}^{n} v_k$ est majorée (d'aprés **le lemme (1)**) d'ou $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} v_k \leq M$.

   En utilisant $u_n \leq v_n$, on trouve $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq M$.

   Ceci implique que, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

2. Par contraposition de (1) on trouve (2). □

Critère de comparaison

Démonstration.

1. On suppose que $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ soit converge alors sa somme partielle $\sum_{k=0}^{n} v_k$ est majorée (d'aprés **le lemme (1)**) d'ou $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} v_k \leq M$.

   En utilisant $u_n \leq v_n$, on trouve $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq M$.

   Ceci implique que, $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge.

2. Par contraposition de (1) on trouve (2).

Critère de comparaison

Démonstration.

1. On suppose que $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ soit converge alors sa somme partielle $\sum_{k=0}^{n} v_k$ est majorée (d'aprés **le lemme (1)**) d'ou $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} v_k \leq M$.

   En utilisant $u_n \leq v_n$, on trouve $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq M$.

   Ceci implique que, $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge.

2. Par contraposition de (1) on trouve (2).

Critère de comparaison

Démonstration.

1. On suppose que $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ soit converge alors sa somme partielle $\sum_{k=0}^{n} v_k$ est majorée (d'aprés **le lemme (1)**) d'ou $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} v_k \leq M$.

   En utilisant $u_n \leq v_n$, on trouve $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq M$.

   Ceci implique que, $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge.

2. Par contraposition de (1) on trouve (2).

Critère de comparaison

Démonstration.

1. On suppose que $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ soit converge alors sa somme partielle $\sum_{k=0}^{n} v_k$ est majorée (d'aprés **le lemme (1)**) d'ou $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} v_k \leq M$.

   En utilisant $u_n \leq v_n$, on trouve $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq M$.

   Ceci implique que, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
2. Par contraposition de (1) on trouve (2).

□

Critère de comparaison

Exemples

- ★ *Soit* $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $n \geq \sqrt{n}$ *d'ou* $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, *comme la série* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ *diverge, alors* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *est aussi diverge.*
- ★ *Soit* $u_n = \frac{1}{n^p}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p > 2$, *on a* $n^p \geq n^2$ *d'ou* $\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}$, *comme la série* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *converge, alors* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^p}$ *est aussi converge.*

Critère de comparaison

Exemples

- ★ *Soit* $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $n \geq \sqrt{n}$ *d'ou* $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, *comme la série* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ *diverge, alors* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *est aussi diverge.*
- ★ *Soit* $u_n = \frac{1}{n^p}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p > 2$, *on a* $n^p \geq n^2$ *d'ou* $\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}$, *comme la série* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *converge, alors* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^p}$ *est aussi converge.*

Critère de comparaison

Exemples

★ *Soit* $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $n \geq \sqrt{n}$ *d'ou* $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, *comme la série* $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ *diverge, alors* $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *est aussi diverge.*

★ *Soit* $u_n = \frac{1}{n^p}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p > 2$, *on a* $n^p \geq n^2$ *d'ou* $\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}$, *comme la série* $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *converge, alors* $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^p}$ *est aussi converge.*

Critère de comparaison

Exemples

★ *Soit* $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $n \geq \sqrt{n}$ *d'ou* $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, *comme la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ *diverge, alors* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *est aussi diverge.*

★ *Soit* $u_n = \dfrac{1}{n^p}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p > 2$, *on a* $n^p \geq n^2$ *d'ou* $\dfrac{1}{n^p} \leq \dfrac{1}{n^2}$, *comme la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *converge, alors* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^p}$ *est aussi converge.*

Critère d'équivalence

Théorème

(Critère d'équivalence)

Soient $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ *deux séries à termes strictement positifs, on suppose que :*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l, \qquad l \neq 0, \qquad l \neq +\infty.$$

alors

1. *Les deux séries* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ *sont de même nature.*
2. *Si* $l = 0$ *et* $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ *converge alors* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *converge.*
3. *Si* $l = +\infty$ *et* $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ *diverge alors* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge.*

Critère d'équivalence

Théorème

(Critère d'équivalence)
Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *deux séries à termes strictement positifs, on suppose que :*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l, \qquad l \neq 0, \qquad l \neq +\infty.$$

alors

1. *Les deux séries* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *sont de même nature.*
2. *Si* $l = 0$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *converge alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge.*
3. *Si* $l = +\infty$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *diverge alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge.*

Critère d'équivalence

Théorème

(Critère d'équivalence)
Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *deux séries à termes strictement positifs, on suppose que :*

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = l, \qquad l \neq 0, \qquad l \neq +\infty.$$

alors

1. *Les deux séries* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *sont de même nature.*
2. *Si* $l = 0$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *converge alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge.*
3. *Si* $l = +\infty$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *diverge alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge.*

Critère d'équivalence

Théorème

(Critère d'équivalence)

Soient $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ *deux séries à termes strictement positifs, on suppose que :*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = l, \qquad l \neq 0, \qquad l \neq +\infty.$$

alors

1. *Les deux séries* $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ *sont de même nature.*
2. *Si* $l = 0$ *et* $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ *converge alors* $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ *converge.*
3. *Si* $l = +\infty$ *et* $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ *diverge alors* $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ *diverge.*

Critère d'équivalence

Théorème

(Critère d'équivalence)
Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *deux séries à termes strictement positifs, on suppose que :*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l, \qquad l \neq 0, \qquad l \neq +\infty.$$

alors

1. *Les deux séries* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *sont de même nature.*
2. *Si* $l = 0$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *converge alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge.*
3. *Si* $l = +\infty$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *diverge alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge.*

Critère d'équivalence

Remarque

Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, *on dit que* (u_n) *et* (v_n) *sont équivalentes au voisinage de* $+\infty$ *et on ecrit* $u_n \overset{+\infty}{\sim} v_n$.

Exemples

1) Soit $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \backslash \dfrac{1}{n} = 1$, *donc* $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, *d'autre part on a* $\sum\limits_{n\geqslant1} \dfrac{1}{n}$ *diverge, alors* $\sum\limits_{n\geqslant1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ *est aussi divergente.*

2) Soit $u_n = \sqrt{\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on a*
$\sqrt{\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right)} \overset{+\infty}{\sim} \sqrt{\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)} \overset{+\infty}{\sim} \left(\dfrac{1}{n^4}\right)^{\frac{1}{2}}$, *comme* $\sum\limits_{n\geqslant1} \dfrac{1}{n^2}$ *converge, donc* $\sum\limits_{n\geqslant1} \sqrt{\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right)}$ *converge .*

Critère d'équivalence

Remarque

Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=1$, *on dit que* (u_n) *et* (v_n) *sont équivalentes au voisinage de* $+\infty$ *et on ecrit* $u_n \overset{+\infty}{\sim} v_n$.

Exemples

1) Soit $u_n=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, *on a* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\backslash\dfrac{1}{n}=1$ *, donc* $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\overset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$, *d'autre part on a* $\sum\limits_{n\geqslant1}\dfrac{1}{n}$ *diverge, alors* $\sum\limits_{n\geqslant1}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ *est aussi divergente.*

2) Soit $u_n=\sqrt{\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right)}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, *on a*

$\sqrt{\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right)}\overset{+\infty}{\sim}\sqrt{\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)}\overset{+\infty}{\sim}\left(\dfrac{1}{n^4}\right)^{\frac{1}{2}}$, *comme* $\sum\limits_{n\geqslant1}\dfrac{1}{n^2}$ *converge, donc* $\sum\limits_{n\geqslant1}\sqrt{\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right)}$ *converge .*

Critère d'équivalence

Remarque

Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=1$, *on dit que* (u_n) *et* (v_n) *sont équivalentes au voisinage de* $+\infty$ *et on ecrit* $u_n \overset{+\infty}{\sim} v_n$.

Exemples

1) Soit $u_n=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, *on a* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\backslash\dfrac{1}{n}=1$

$$\text{on utilise } \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

, *donc* $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\overset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$, *d'autre part on a* $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ *diverge*, *alors* $\sum\limits_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ *est aussi divergente.*

2) Soit $u_n=\sqrt{\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right)}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, *on a*

$\sqrt{\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right)}\overset{+\infty}{\sim}\sqrt{\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)}\overset{+\infty}{\sim}\left(\dfrac{1}{n^4}\right)^{\frac{1}{2}}$, *comme* $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ *converge, donc*

Critère d'équivalence

Remarque

Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, *on dit que* (u_n) *et* (v_n) *sont équivalentes au voisinage de* $+\infty$ *et on ecrit* $u_n \overset{+\infty}{\sim} v_n$.

Exemples

1) Soit $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \setminus \dfrac{1}{n} = 1$, *donc* $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, *d'autre part on a* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ *diverge, alors* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ *est aussi divergente.*

2) Soit $u_n = \sqrt{\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $\sqrt{\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right)} \overset{+\infty}{\sim} \sqrt{\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)} \overset{+\infty}{\sim} \left(\dfrac{1}{n^4}\right)^{\frac{1}{2}}$, *comme* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ *converge, donc* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \sqrt{\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right)}$ *converge .*

Critère d'équivalence

Remarque

Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, *on dit que* (u_n) *et* (v_n) *sont équivalentes au voisinage de* $+\infty$ *et on ecrit* $u_n \overset{+\infty}{\sim} v_n$.

Exemples

1) Soit $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \backslash \dfrac{1}{n} = 1$, *donc* $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, *d'autre part on a* $\sum\limits_{n\geqslant1} \dfrac{1}{n}$ *diverge, alors* $\sum\limits_{n\geqslant1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ *est aussi divergente.*

2) Soit $u_n = \sqrt{\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on a*
$\sqrt{\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right)} \overset{+\infty}{\sim} \sqrt{\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)} \overset{+\infty}{\sim} \left(\dfrac{1}{n^4}\right)^{\frac{1}{2}}$, *comme* $\sum\limits_{n\geqslant1} \dfrac{1}{n^2}$ *converge, donc* $\sum\limits_{n\geqslant1} \sqrt{\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right)}$ *converge .*

Critère d'équivalence

Remarque

Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, *on dit que* (u_n) *et* (v_n) *sont équivalentes au voisinage de* $+\infty$ *et on ecrit* $u_n \overset{+\infty}{\sim} v_n$.

Exemples

1) Soit $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \setminus \dfrac{1}{n} = 1$, *donc* $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, *d'autre part on a* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ *diverge, alors* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ *est aussi divergente.*

2) Soit $u_n = \sqrt{\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $\sqrt{\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right)} \overset{+\infty}{\sim} \sqrt{\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)} \overset{+\infty}{\sim} \left(\dfrac{1}{n^4}\right)^{\frac{1}{2}}$, *comme* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ *converge, donc* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \sqrt{\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right)}$ *converge* .

Critère d'équivalence

Remarque

Si $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, *on dit que* (u_n) *et* (v_n) *sont équivalentes au voisinage de* $+\infty$ *et on ecrit* $u_n \overset{+\infty}{\sim} v_n$.

Exemples

1) Soit $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \setminus \frac{1}{n} = 1$ *, donc* $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, *d'autre part on a* $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ *diverge, alors* $\sum\limits_{n \geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ *est aussi divergente.*

2) Soit $u_n = \sqrt{\ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\sqrt{\ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)} \overset{+\infty}{\sim} \sqrt{\sin\left(\frac{1}{n^4}\right)} \overset{+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{n^4}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{on utilise } \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Critère d'équivalence

Remarque

Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=1$, *on dit que* (u_n) *et* (v_n) *sont équivalentes au voisinage de* $+\infty$ *et on ecrit* $u_n \overset{+\infty}{\sim} v_n$.

Exemples

1) Soit $u_n=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, *on a* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\setminus\dfrac{1}{n}=1$ *, donc* $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\overset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$, *d'autre part on a* $\sum\limits_{n\geqslant1}\dfrac{1}{n}$ *diverge, alors* $\sum\limits_{n\geqslant1}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ *est aussi divergente.*

2) Soit $u_n=\sqrt{\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right)}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, *on a* $\sqrt{\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right)}\overset{+\infty}{\sim}\sqrt{\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)}\overset{+\infty}{\sim}\left(\dfrac{1}{n^4}\right)^{\frac{1}{2}}$, *comme* $\sum\limits_{n\geqslant1}\dfrac{1}{n^2}$ *converge, donc* $\sum\limits_{n\geqslant1}\sqrt{\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right)}$ *converge .*

Critère d'équivalence

Exemples

3) Soit $u_n = \dfrac{\sin \dfrac{1}{n(n+1)}}{\cos(\dfrac{1}{n})\cos(\dfrac{1}{n+1})}$, $\forall n > 0.$

$1^{ère}$ ***Méthode*** *: on a* $u_n \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(n+1)} \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, *comme* $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ *converge, alors* $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *est aussi converge.*

$2^{ème}$ ***Méthode :*** $u_n = \dfrac{\sin \dfrac{1}{n} \cos \dfrac{1}{n+1} - \cos \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{1}{n+1}}{\cos \dfrac{1}{n} \cos \dfrac{1}{n+1}} = \tan \dfrac{1}{n} - \tan \dfrac{1}{n+1}.$

On prend $v_n = \tan \dfrac{1}{n}$, *on trouve* $u_n = v_n - v_{n+1}$ *et* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = 0.$

Par conséquent : $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *converge vers* $v_1 = \tan(1) = \frac{\pi}{4}.$

Critère d'équivalence

Exemples

3) Soit $u_n = \dfrac{\sin \dfrac{1}{n(n+1)}}{\cos(\dfrac{1}{n}) \cos(\dfrac{1}{n+1})}, \ \forall n > 0.$

$1^{ère}$ ***Méthode*** *: on a* $u_n \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(n+1)} \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, *comme* $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ *converge, alors* $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ *est aussi converge.*

$2^{ème}$ ***Méthode :*** $u_n = \dfrac{\sin \dfrac{1}{n} \cos \dfrac{1}{n+1} - \cos \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{1}{n+1}}{\cos \dfrac{1}{n} \cos \dfrac{1}{n+1}} = \tan \dfrac{1}{n} - \tan \dfrac{1}{n+1}.$

On prend $v_n = \tan \dfrac{1}{n}$, *on trouve* $u_n = v_n - v_{n+1}$ *et* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} v_n = 0.$

Par conséquent : $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ *converge vers* $v_1 = \tan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Critère d'équivalence

Exemples

3) Soit $u_n = \dfrac{\sin \dfrac{1}{n(n+1)}}{\cos(\frac{1}{n})\cos(\frac{1}{n+1})}$, $\forall n > 0$.

$1^{\text{ère}}$ ***Méthode*** *: on a* $u_n \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(n+1)} \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, *comme* $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ *converge, alors* $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *est aussi converge.*

$2^{\text{ème}}$ ***Méthode*** *:* $u_n = \dfrac{\sin\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1} - \cos\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n+1}}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}} = \tan\dfrac{1}{n} - \tan\dfrac{1}{n+1}$.

On prend $v_n = \tan\frac{1}{n}$, *on trouve* $u_n = v_n - v_{n+1}$ *et* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = 0$.

Par conséquent : $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *converge vers* $v_1 = \tan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Critère d'équivalence

Exemples

3) Soit $u_n = \dfrac{\sin \dfrac{1}{n(n+1)}}{\cos(\dfrac{1}{n})\cos(\dfrac{1}{n+1})}$, $\forall n > 0.$

$1^{ère}$ ***Méthode*** *: on a* $u_n \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(n+1)} \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, *comme* $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ *converge, alors* $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *est aussi converge.*

$2^{ème}$ ***Méthode*** *:* $u_n = \dfrac{\sin\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n+1} - \cos\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n+1}}{\cos\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n+1}} = \tan\dfrac{1}{n} - \tan\dfrac{1}{n+1}.$

On prend $v_n = \tan\dfrac{1}{n}$, *on trouve* $u_n = v_n - v_{n+1}$ *et* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = 0.$

Par conséquent : $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *converge vers* $v_1 = \tan(1) = \frac{\pi}{4}.$

Critère d'équivalence

Exemples

3) Soit $u_n = \dfrac{\sin \dfrac{1}{n(n+1)}}{\cos(\frac{1}{n})\cos(\dfrac{1}{n+1})}, \ \forall n > 0.$

$1^{ère}$ ***Méthode*** *: on a* $u_n \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(n+1)} \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, *comme* $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ *converge, alors* $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ *est aussi converge.*

$2^{ème}$ ***Méthode*** *:*

$$\text{on utilise } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{ et } \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$u_n = \frac{\sin\frac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n+1} - \cos\frac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n+1}}{\cos\frac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n+1}} = \tan\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{n+1}.$$

On prend $v_n = \tan\frac{1}{n}$, *on trouve* $u_n = v_n - v_{n+1}$ *et* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} v_n = 0.$

Par conséquent : $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ *converge vers* $v_1 = \tan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Critère d'équivalence

Exemples

3) Soit $u_n = \dfrac{\sin \dfrac{1}{n(n+1)}}{\cos(\dfrac{1}{n})\cos(\dfrac{1}{n+1})}$, $\forall n > 0.$

$1^{\text{ère}}$ ***Méthode*** *: on a* $u_n \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(n+1)} \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, *comme* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ *converge, alors* $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ *est aussi converge.*

$2^{\text{ème}}$ ***Méthode*** *:* $u_n = \dfrac{\sin \dfrac{1}{n} \cos \dfrac{1}{n+1} - \cos \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{1}{n+1}}{\cos \dfrac{1}{n} \cos \dfrac{1}{n+1}} = \tan \dfrac{1}{n} - \tan \dfrac{1}{n+1}.$

On prend $v_n = \tan \dfrac{1}{n}$, *on trouve* $u_n = v_n - v_{n+1}$ *et* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n = 0.$

Par conséquent : $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ *converge vers* $v_1 = \tan(1) = \frac{\pi}{4}.$

Critère d'équivalence

Exemples

3) Soit $u_n = \dfrac{\sin \dfrac{1}{n(n+1)}}{\cos(\dfrac{1}{n})\cos(\dfrac{1}{n+1})}$, $\forall n > 0.$

$1^{\text{ère}}$ ***Méthode*** *: on a* $u_n \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(n+1)} \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$*, comme* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ *converge, alors* $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ *est aussi converge.*

$2^{\text{ème}}$ ***Méthode*** *:* $u_n = \dfrac{\sin\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n+1} - \cos\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n+1}}{\cos\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n+1}} = \tan\dfrac{1}{n} - \tan\dfrac{1}{n+1}.$

On prend $v_n = \tan\dfrac{1}{n}$*, on trouve* $u_n = v_n - v_{n+1}$ *et* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = 0.$

Par conséquent : $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ *converge vers* $v_1 = \tan(1) = \frac{\pi}{4}.$

Critère d'équivalence

Exemples

3) Soit $u_n = \dfrac{\sin \dfrac{1}{n(n+1)}}{\cos(\dfrac{1}{n})\cos(\dfrac{1}{n+1})}, \ \forall n > 0.$

$1^{ère}$ ***Méthode*** *: on a* $u_n \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(n+1)} \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, *comme* $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ *converge, alors* $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *est aussi converge.*

$2^{ème}$ ***Méthode*** *:* $u_n = \dfrac{\sin \dfrac{1}{n} \cos \dfrac{1}{n+1} - \cos \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{1}{n+1}}{\cos \dfrac{1}{n} \cos \dfrac{1}{n+1}} = \tan \dfrac{1}{n} - \tan \dfrac{1}{n+1}.$

On prend $v_n = \tan \dfrac{1}{n}$, *on trouve* $u_n = v_n - v_{n+1}$ *et* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = 0.$

(Rappel. Suite et série)

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge si et seulement si la série* $\sum_{n\geqslant 0} v_n - v_{n+1}$ *converge et on a alors*

$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n - v_{n+1} = v_0 - \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_{n+1}$. *Par conséquent :* $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *converge vers* $v_1 = \tan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Critère d'équivalence

Exemples

3) Soit $u_n = \dfrac{\sin \dfrac{1}{n(n+1)}}{\cos(\dfrac{1}{n})\cos(\dfrac{1}{n+1})}$, $\forall n > 0$.

$1^{\text{ère}}$ ***Méthode** : on a* $u_n \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(n+1)} \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, *comme* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ *converge, alors* $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ *est aussi converge.*

$2^{\text{ème}}$ ***Méthode** :* $u_n = \dfrac{\sin\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n+1} - \cos\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n+1}}{\cos\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n+1}} = \tan\dfrac{1}{n} - \tan\dfrac{1}{n+1}$.

On prend $v_n = \tan\dfrac{1}{n}$, *on trouve* $u_n = v_n - v_{n+1}$ *et* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = 0$.

Par conséquent : $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ *converge vers* $v_1 = \tan(1) = \frac{\pi}{4}$.

Critère de comparaison

Théorème

(*Comparaison d'une série avec une intégrale*)

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et positive et décroissante, soit la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$, *alors on a :*

1. *La série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et l'intégrale* $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ *sont de la même nature.*
2. $\forall k \in \mathbb{N}$, *on a* $\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_{n}^{+\infty} f(x)dx$.

Critère de comparaison

Théorème

(*Comparaison d'une série avec une intégrale*)

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et positive et décroissante, soit la série* $\sum_{n \geqslant 0} u_n$, *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$, *alors on a :*

1. *La série* $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ *et l'intégrale* $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ *sont de la même nature.*
2. $\forall k \in \mathbb{N}$, *on a* $\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(x)dx$.

Critère de comparaison

Théorème

(*Comparaison d'une série avec une intégrale*)
Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et positive et décroissante, soit la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$, *alors on a :*

1. *La série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et l'intégrale* $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ *sont de la même nature.*

Définition

(*Intégrale imprpre*) *Soit* f *une fonction continue sur* $[a, +\infty[$. *On dit que l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *converge si la limite, lorsque* x *tend vers* $+\infty$, *de la primitive* $\int_a^x f(t)dt$ ***existe et est finie***. *Si c'est le cas, on pose*

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \int_a^x f(x)dx$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge.

2. $\forall k \in \mathbb{N}$, *on a* $\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(x)dx$.

Critère de comparaison

Théorème

(*Comparaison d'une série avec une intégrale*)

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et positive et décroissante, soit la série* $\sum_{n \geqslant 0} u_n$, *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$, *alors on a :*

1. *La série* $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ *et l'intégrale* $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ *sont de la même nature.*
2. $\forall k \in \mathbb{N}$, *on a* $\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(x)dx$.

1 Notions générales

2 Théorèmes de comparaison

3 Série de Riemann

4 Série de Bertrand

5 Critère de d'Alembert

6 Critère de Cauchy

Série de Riemann

Théorème

(Séries de Riemann)

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ *fixé,* $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *converge si et seulement si :* $\alpha > 1$.

Proposition

(Règle $n^{\alpha} u_n$)

Soit $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ *une série à termes positifs.*

S'il existe $\alpha \in]1; +\infty[$ *tel que* $n^{\alpha} u_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$, *alors* $(\sum_{n \geqslant 0} u_n)$ *converge .*

Série de Riemann

Théorème

(*Séries de Riemann*)

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ *fixé,* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si :* $\alpha > 1$.

Proposition

(*Règle* $n^\alpha u_n$)

Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes positifs.*

S'il existe $\alpha \in]1; +\infty[$ *tel que* $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$*, alors* $(\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n)$ *converge .*

Série de Riemann

Théorème

(Séries de Riemann)

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ *fixé,* $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si :* $\alpha > 1$.

Proposition

(Règle $n^\alpha u_n$*)*

Soit $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ *une série à termes positifs.*

S'il existe $\alpha \in]1; +\infty[$ *tel que* $n^\alpha u_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$*, alors* $(\sum_{n \geqslant 0} u_n)$ *converge .*

Série de Riemann

Théorème

(Séries de Riemann)

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ *fixé,* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *converge si et seulement si :* $\alpha > 1$.

Proposition

(Règle $n^{\alpha}u_n$*)*

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes positifs.*

S'il existe $\alpha \in]1;+\infty[$ *tel que* $n^{\alpha}u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$*, alors* $(\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n)$ *converge .*

Série de Riemann

Exemple

Nature de la série de terme général $u_n = e^{-(\ln n)^a}$, *pour* $a \in \mathbb{R}$ *fixé.*

- *Si* $a = 1$, *alors* $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n}\right)$, *donc* $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *diverge.*
- *Si* $a < 1$, *pour tout* $n \geq 3$, $e^{-(\ln n)^a} \geq e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$, *donc* $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *diverge.*
- *Si* $a > 1$, *alors* $n^2 u_n = e^{(2\ln n-(\ln n)^a)}$, $(2\ln n - (\ln n)^a) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} -\infty$, *et donc* $n^2 u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$, *alors* $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *converge.*

On conclut que : la série de terme général $u_n = e^{-(\ln n)^a}$ *converge si et seulement si* $a > 1$.

Série de Riemann

Exemple

Nature de la série de terme général $u_n = e^{-(\ln n)^a}$, *pour* $a \in \mathbb{R}$ *fixé.*

- *Si* $a = 1$, *alors* $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{1}{n}\right)$, *donc* $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ *diverge.*
- *Si* $a < 1$, *pour tout* $n \geq 3$, $e^{-(\ln n)^a} \geq e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$, *donc* $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ *diverge.*
- *Si* $a > 1$, *alors* $n^2 u_n = e^{(2\ln n - (\ln n)^a)}$, $(2\ln n - (\ln n)^a) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} -\infty$, *et donc* $n^2 u_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$, *alors* $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ *converge.*

On conclut que : la série de terme général $u_n = e^{-(\ln n)^a}$ *converge si et seulement si* $a > 1$.

Série de Riemann

Exemple

Nature de la série de terme général $u_n = e^{-(\ln n)^a}$*, pour* $a \in \mathbb{R}$ *fixé.*

- *Si* $a = 1$*, alors* $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n}\right)$*, donc* $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *diverge.*
- *Si* $a < 1$*, pour tout* $n \geq 3$*,* $e^{-(\ln n)^a} \geq e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$*, donc* $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *diverge.*
- *Si* $a > 1$*, alors* $n^2 u_n = e^{(2\ln n - (\ln n)^a)}$*,* $(2\ln n - (\ln n)^a) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} -\infty$*, et donc* $n^2 u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$*, alors* $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *converge.*

On conclut que : la série de terme général $u_n = e^{-(\ln n)^a}$ *converge si et seulement si* $a > 1$*.*

Série de Riemann

Exemple

Nature de la série de terme général $u_n = e^{-(\ln n)^a}$, *pour* $a \in \mathbb{R}$ *fixé.*

- *Si* $a = 1$, *alors* $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n}\right)$, *donc* $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ *diverge.*
- *Si* $a < 1$, *pour tout* $n \geq 3$, $e^{-(\ln n)^a} \geq e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$, *donc* $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ *diverge.*
- *Si* $a > 1$, *alors* $n^2 u_n = e^{(2\ln n - (\ln n)^a)}$, $(2\ln n - (\ln n)^a) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} -\infty$, *et donc* $n^2 u_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$, *alors* $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ *converge.*

On conclut que : la série de terme général $u_n = e^{-(\ln n)^a}$ *converge si et seulement si* $a > 1$.

Série de Riemann

Exemple

Nature de la série de terme général $u_n = e^{-(\ln n)^a}$, *pour* $a \in \mathbb{R}$ *fixé.*

- *Si* $a = 1$, *alors* $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{1}{n}\right)$, *donc* $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ *diverge.*
- *Si* $a < 1$, *pour tout* $n \geq 3$, $e^{-(\ln n)^a} \geq e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$, *donc* $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ *diverge.*
- *Si* $a > 1$, *alors* $n^2 u_n = e^{(2\ln n - (\ln n)^a)}$, $(2\ln n - (\ln n)^a) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} -\infty$, *et donc* $n^2 u_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$, *alors* $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ *converge.*

On conclut que : la série de terme général $u_n = e^{-(\ln n)^a}$ *converge si et seulement si* $a > 1$.

Série de Riemann

Exemple

Nature de la série de terme général $u_n = e^{-(\ln n)^a}$, *pour* $a \in \mathbb{R}$ *fixé.*

- *Si* $a = 1$, *alors* $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{1}{n}\right)$, *donc* $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ *diverge.*
- *Si* $a < 1$, *pour tout* $n \geq 3$, $e^{-(\ln n)^a} \geq e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$, *donc* $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ *diverge.*
- *Si* $a > 1$, *alors* $n^2 u_n = e^{(2\ln n - (\ln n)^a)}$, $(2\ln n - (\ln n)^a) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} -\infty$, *et donc* $n^2 u_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$, *alors* $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ *converge.*

On conclut que : la série de terme général $u_n = e^{-(\ln n)^a}$ *converge si et seulement si* $a > 1$.

Série de Riemann

Exemple

Nature de la série de terme général $u_n = e^{-(\ln n)^a}$, *pour* $a \in \mathbb{R}$ *fixé.*

- *Si* $a = 1$, *alors* $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n}\right)$, *donc* $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ *diverge.*
- *Si* $a < 1$, *pour tout* $n \geq 3$, $e^{-(\ln n)^a} \geq e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$, *donc* $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ *diverge.*
- *Si* $a > 1$, *alors* $n^2 u_n = e^{(2\ln n - (\ln n)^a)}$, $(2\ln n - (\ln n)^a) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} -\infty$, *et donc* $n^2 u_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$, *alors* $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ *converge.*

On conclut que : la série de terme général $u_n = e^{-(\ln n)^a}$ *converge si et seulement si* $a > 1$.

Série de Riemann

Exemple

Nature de la série de terme général $u_n = e^{-(\ln n)^a}$*, pour* $a \in \mathbb{R}$ *fixé.*

- *Si* $a = 1$*, alors* $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{1}{n}\right)$*, donc* $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ *diverge.*
- *Si* $a < 1$*, pour tout* $n \geq 3$*,* $e^{-(\ln n)^a} \geq e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$*, donc* $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ *diverge.*
- *Si* $a > 1$*, alors* $n^2 u_n = e^{(2\ln n - (\ln n)^a)}$*,* $(2\ln n - (\ln n)^a) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} -\infty$*, et donc* $n^2 u_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$*, alors* $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$ *converge.*

On conclut que : la série de terme général $u_n = e^{-(\ln n)^a}$ *converge si et seulement si* $a > 1$.

1 Notions générales

2 Théorèmes de comparaison

3 Série de Riemann

4 Série de Bertrand

5 Critère de d'Alembert

6 Critère de Cauchy

Série de Bertrand

Théorème

(*Séries de Bertrand*)

Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *fixé,* $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^{\alpha} (\ln n)^{\beta}}$ *converge si et seulement si :*

$$\begin{cases} \alpha > 1, \\ \textit{où} \\ \alpha = 1 \textit{ et } \beta > 1. \end{cases}$$

Série de Bertrand

Théorème

(*Séries de Bertrand*)

Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *fixé,* $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ *converge si et seulement si :*

$$\begin{cases} \alpha > 1, \\ \textit{où} \\ \alpha = 1 \textit{ et } \beta > 1. \end{cases}$$

Série de Bertrand

Exemple

Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\ln n!}, \quad \forall n \geq 1.$

On a

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots\ldots \times 1 \leq n \times \ldots\ldots \times n = n^n,$$

donc

$$\ln n! \leq n \ln n.$$

Ceci impliqe que

$$u_n \geq \frac{1}{n \ln n}.$$

D'autre part on a $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n \ln n}$ ***série de Bertrand*** *(*$\alpha = 1$ ***et*** $\beta = 1$*) diverge, alore* $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ *diverge.*

Série de Bertrand

Exemple

Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\ln n!}, \quad \forall n \geq 1.$
On a

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots\ldots \times 1 \leq n \times \ldots\ldots. \times n = n^n,$$

donc

$$\ln n! \leq n \ln n.$$

Ceci impliqe que

$$u_n \geq \frac{1}{n \ln n}.$$

D'autre part on a $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n \ln n}$ ***série de Bertrand*** *(*$\alpha = 1$ ***et*** $\beta = 1$*) diverge, alore* $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ *diverge.*

Série de Bertrand

Exemple

Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\ln n!}, \quad \forall n \geq 1.$
On a

$$n! = n \times (n-1) \times ...... \times 1 \leq n \times .... \times n = n^n,$$

donc

$$\ln n! \leq n \ln n.$$

Ceci impliqe que

$$u_n \geq \frac{1}{n \ln n}.$$

D'autre part on a $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n \ln n}$ ***série de Bertrand*** *(*$\alpha = 1$ ***et*** $\beta = 1$*) diverge, alore* $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ *diverge.*

Série de Bertrand

Exemple

Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\ln n!}, \quad \forall n \geq 1.$

On a

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots\ldots \times 1 \leq n \times \ldots\ldots\ldots \times n = n^n,$$

donc

$$\ln n! \leq n \ln n.$$

Ceci impliqe que

$$u_n \geq \frac{1}{n \ln n}.$$

D'autre part on a $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n \ln n}$ ***série de Bertrand*** *(*$\alpha = 1$ ***et*** $\beta = 1$*) diverge, alore* $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ *diverge.*

Série de Bertrand

Exemple

Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\ln n!}, \quad \forall n \geq 1.$
On a

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots\ldots \times 1 \leq n \times \ldots\ldots\ldots \times n = n^n,$$

donc

$$\ln n! \leq n \ln n.$$

Ceci impliqe que

$$u_n \geq \frac{1}{n \ln n}.$$

D'autre part on a $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n \ln n}$ ***série de Bertrand*** ($\alpha = 1$ ***et*** $\beta = 1$) *diverge, alore* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *diverge.*

1 Notions générales

2 Théorèmes de comparaison

3 Série de Riemann

4 Série de Bertrand

5 Critère de d'Alembert

6 Critère de Cauchy

Critère de d'Alembert

Théorème

(Critère de d'Alembert)

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes strictement positifs. On suppose que la suite* $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ *admet une limite* $l \in \mathbb{R}_+$.

1. *Si* $l < 1$, *alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge.*
2. *Si* $l > 1$, *alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge.*
3. *Si* $l = 1$, *on peut pas conclure.*

Exemples :

1) La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ *diverge et* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$.

2) La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *converge et* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$.

Critère de d'Alembert

Théorème

(Critère de d'Alembert)

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes strictement positifs. On suppose que la suite* $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ *admet une limite* $l \in \mathbb{R}_+$.

1. *Si* $l < 1$, *alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge.*
2. *Si* $l > 1$, *alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge.*
3. *Si* $l = 1$, *on peut pas conclure.*

Exemples :

1) La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ *diverge et* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$.

2) La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *converge et* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$.

Critère de d'Alembert

Théorème

(Critère de d'Alembert)

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes strictement positifs. On suppose que la suite* $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ *admet une limite* $l \in \mathbb{R}_+$.

1. *Si* $l < 1$, *alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge.*
2. *Si* $l > 1$, *alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge.*
3. *Si* $l = 1$, *on peut pas conclure.*

Exemples :

1) La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ *diverge et* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$.

2) La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *converge et* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$.

Critère de d'Alembert

Théorème

(Critère de d'Alembert)

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes strictement positifs. On suppose que la suite* $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ *admet une limite* $l \in \mathbb{R}_+$.

1. *Si* $l < 1$, *alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge.*
2. *Si* $l > 1$, *alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge.*
3. *Si* $l = 1$, *on peut pas conclure.*

Exemples :

1) La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ *diverge et* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$.

2) La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *converge et* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$.

Critère de d'Alembert

Théorème

(Critère de d'Alembert)

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes strictement positifs. On suppose que la suite* $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ *admet une limite* $l \in \mathbb{R}_+$.

1. *Si* $l < 1$*, alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge.*
2. *Si* $l > 1$*, alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge.*
3. *Si* $l = 1$*, on peut pas conclure.*

Exemples :

1) La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ *diverge et* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$.

2) La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *converge et* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$.

Critère de d'Alembert

Théorème

(Critère de d'Alembert)

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes strictement positifs. On suppose que la suite* $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ *admet une limite* $l \in \mathbb{R}_+$.

1. *Si* $l < 1$, *alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge.*
2. *Si* $l > 1$, *alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge.*
3. *Si* $l = 1$, *on peut pas conclure.*

Exemples :

1) La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ *diverge et* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$.

2) La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *converge et* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$.

Critère de d'Alembert

Exemples

1. $u_n = \dfrac{1}{n!}$, *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

*d'aprés **le critère de d'Alembert** :* $\sum u_n$ *converge.*

2. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$, *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$$
$$= \frac{1}{e} < 1,$$

*On conclut qu'aprés **le critère de d'Alembert** :* $\sum u_n$ *soit convergente.*

Critère de d'Alembert

Exemples

1. $u_n = \dfrac{1}{n!}$, *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

*d'aprés **le critère de d'Alembert** : $\sum u_n$ converge.*

2. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$, *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$= \frac{1}{e} < 1,$$

*On conclut qu'aprés **le critère de d'Alembert** : $\sum u_n$ soit convergente.*

Critère de d'Alembert

Exemples

1. $u_n = \dfrac{1}{n!}$, *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

d'aprés ***le critère de d'Alembert*** *:* $\sum u_n$ *converge.*

2. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$, *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$$
$$= \frac{1}{e} < 1,$$

On conclut qu'aprés ***le critère de d'Alembert*** *:* $\sum u_n$ *soit convergente.*

Critère de d'Alembert

Exemples

1. $u_n = \dfrac{1}{n!}$, *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

d'aprés ***le critère de d'Alembert*** *:* $\sum u_n$ *converge.*

2. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$, *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^n$$

$$= \frac{1}{e} < 1,$$

On conclut qu'aprés ***le critère de d'Alembert*** *:* $\sum u_n$ *soit convergente.*

Critère de d'Alembert

Exemples

1. $u_n = \dfrac{1}{n!}$, *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

*d'aprés **le critère de d'Alembert** :* $\sum u_n$ *converge.*

2. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$, *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$$
$$= \frac{1}{e} < 1,$$

*On conclut qu'aprés **le critère de d'Alembert** :* $\sum u_n$ *soit convergente.*

Critère de d'Alembert

Exemples

1. $u_n = \dfrac{1}{n!}$, *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

d'aprés ***le critère de d'Alembert*** *:* $\sum u_n$ *converge.*

2. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$, *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^n$$
$$= \frac{1}{e} < 1,$$

on utilise $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \ln \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n = e^a$

On conclut qu'aprés ***le critère de d'Alembert*** *:* $\sum u_n$ *soit convergente.*

Critère de d'Alembert

Exemples

1. $u_n = \frac{1}{n!}$, *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

d'aprés ***le critère de d'Alembert*** *:* $\sum u_n$ *converge.*

2. $u_n = \frac{n!}{n^n}$, *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$$
$$= \frac{1}{e} < 1,$$

On conclut qu'aprés ***le critère de d'Alembert*** *:* $\sum u_n$ *soit convergente.*

Critère de d'Alembert

Exemples

3) $u_n = \dfrac{e^n}{n}$, *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{e^{n+1}}{n+1} \frac{n}{e^n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} e \frac{n}{n+1} = e > 1,$$

d'aprés ***le critère de d'Alembert*** *:* $\sum u_n$ *diverge.*

Remarque

On essaie d'appliquer ***le critère de d'Alembert*** *(7) lorsque le terme général* u_n *contient des exponentielles ou des puissances* $n^{\text{èmes}}$*.*

Critère de d'Alembert

Exemples

3) $u_n = \dfrac{e^n}{n}$, *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{e^{n+1}}{n+1} \frac{n}{e^n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} e \frac{n}{n+1} = e > 1,$$

d'aprés ***le critère de d'Alembert*** *:* $\sum u_n$ *diverge.*

Remarque

On essaie d'appliquer ***le critère de d'Alembert (7)*** *lorsque le terme général* u_n *contient des exponentielles ou des puissances* $n^{\text{èmes}}$.

1 Notions générales

2 Théorèmes de comparaison

3 Série de Riemann

4 Série de Bertrand

5 Critère de d'Alembert

6 Critère de Cauchy

Critère de Cauchy

Théorème

(*Critère de Cauchy*)

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes positifs. On suppose qu'il existe* $l \in \mathbb{R}_+$ *tel que :* $l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$.

Alors,

1. *Si* $l < 1$, *la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est convergente.*
2. *Si* $l > 1$, *la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est divergente.*
3. *Si* $l = 1$, *on peut pas conclure.*

Critère de Cauchy

Théorème

(Critère de Cauchy)

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes positifs. On suppose qu'il existe* $l \in \mathbb{R}_+$ *tel que :* $l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$.

Alors,

1. *Si* $l < 1$, *la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est convergente.*
2. *Si* $l > 1$, *la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est divergente.*
3. *Si* $l = 1$, *on peut pas conclure.*

Critère de Cauchy

Théorème

(Critère de Cauchy)

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes positifs. On suppose qu'il existe* $l \in \mathbb{R}_+$ *tel que :* $l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$.

Alors,

1. *Si* $l < 1$, *la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est convergente.*
2. *Si* $l > 1$, *la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est divergente.*
3. *Si* $l = 1$, *on peut pas conclure.*

Critère de Cauchy

Théorème

(Critère de Cauchy)

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes positifs. On suppose qu'il existe* $l \in \mathbb{R}_+$ *tel que :* $l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$.

Alors,

1. *Si* $l < 1$, *la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est convergente.*
2. *Si* $l > 1$, *la série* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est divergente.*
3. *Si* $l = 1$, *on peut pas conclure.*

Critère de Cauchy

Exemples

1. $u_n = \left(\dfrac{n+3}{2+5n}\right)^n$, *on a*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{2+5n}\right)^n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n+3}{2+5n} = \frac{1}{5} < 1.$$

On conclut qu'aprés ***le critère de Cauchy*** *:* $\sum u_n$ *soit convergente.*

2. $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, *on a*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e} < 1,$$

d'aprés ***le critère de Cauchy*** *:* $\sum u_n$ *converge.*

Critère de Cauchy

Exemples

1. $u_n = \left(\dfrac{n+3}{2+5n}\right)^n$, *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{2+5n}\right)^n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n+3}{2+5n} = \frac{1}{5} < 1.$$

On conclut qu'aprés ***le critère de Cauchy*** *: $\sum u_n$ soit convergente.*

2. $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e} < 1,$$

d'aprés ***le critère de Cauchy*** *: $\sum u_n$ converge.*

Critère de Cauchy

Exemples

1. $u_n = \left(\dfrac{n+3}{2+5n}\right)^n$, *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{2+5n}\right)^n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n+3}{2+5n} = \frac{1}{5} < 1.$$

On conclut qu'aprés ***le critère de Cauchy*** *:* $\sum u_n$ *soit convergente.*

2. $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e} < 1,$$

d'aprés ***le critère de Cauchy*** *:* $\sum u_n$ *converge.*

Critère de Cauchy

Exemples

1. $u_n = \left(\dfrac{n+3}{2+5n}\right)^n$, *on a*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{2+5n}\right)^n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n+3}{2+5n} = \frac{1}{5} < 1.$$

On conclut qu'aprés ***le critère de Cauchy*** *:* $\sum u_n$ *soit convergente.*

2. $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, *on a*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e} < 1,$$

d'aprés ***le critère de Cauchy*** *:* $\sum u_n$ *converge.*

Critère de Cauchy

Exemples

1. $u_n = \left(\frac{n+3}{2+5n}\right)^n$, *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{2+5n}\right)^n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n+3}{2+5n} = \frac{1}{5} < 1.$$

On conclut qu'aprés ***le critère de Cauchy*** *:* $\sum u_n$ *soit convergente.*

2. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e} < 1,$$

d'aprés ***le critère de Cauchy*** *:* $\sum u_n$ *converge.*

Critère de Cauchy

Exemples

1. $u_n = \left(\dfrac{n+3}{2+5n}\right)^n$, *on a*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{2+5n}\right)^n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n+3}{2+5n} = \frac{1}{5} < 1.$$

On conclut qu'aprés ***le critère de Cauchy*** *:* $\sum u_n$ *soit convergente.*

2. $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, *on a*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e} < 1,$$

d'aprés ***le critère de Cauchy*** *:* $\sum u_n$ *converge.*

Critère de Cauchy

Exemples

3) $u_n = \left(a + \frac{1}{n^p}\right)^n$, *avec* $a > 0$ *et* $p \geq 0$.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(a + \frac{1}{n^p}\right)^n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} a + \frac{1}{n^p},$$

- *Si* $p = 0$, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = a + 1 > 1$, *alors* $\sum u_n$ *diverge.*
- *Si* $p > 0$, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = a$, *nous avons trois cas :*

(A) *Si* $a < 1$, *d'aprés* ***le critère de Cauchy*** *:* $\sum u_n$ *converge.*

(B) *Si* $a > 1$, *d'aprés* ***le critère de Cauchy*** *:* $\sum u_n$ *diverge.*

(C) *Si* $a = 1$, ***le critère de Cauchy*** *ne donne rien.*

Critère de Cauchy

Exemples

3) $u_n = \left(a + \frac{1}{n^p}\right)^n$, *avec* $a > 0$ *et* $p \geq 0$.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(a + \frac{1}{n^p}\right)^n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} a + \frac{1}{n^p},$$

- *Si* $p = 0$, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = a + 1 > 1$, *alors* $\sum u_n$ *diverge.*
- *Si* $p > 0$, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = a$, *nous avons trois cas :*

(A) *Si* $a < 1$, *d'aprés* ***le critère de Cauchy*** *:* $\sum u_n$ *converge.*

(B) *Si* $a > 1$, *d'aprés* ***le critère de Cauchy*** *:* $\sum u_n$ *diverge.*

(C) *Si* $a = 1$, ***le critère de Cauchy*** *ne donne rien.*

Critère de Cauchy

Exemples

3) $u_n = \left(a + \frac{1}{n^p}\right)^n$, *avec* $a > 0$ *et* $p \geq 0$.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(a + \frac{1}{n^p}\right)^n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} a + \frac{1}{n^p},$$

- *Si* $p = 0$, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = a + 1 > 1$, *alors* $\sum u_n$ *diverge.*
- *Si* $p > 0$, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = a$, *nous avons trois cas :*

(A) *Si* $a < 1$, *d'aprés* ***le critère de Cauchy*** *:* $\sum u_n$ *converge.*

(B) *Si* $a > 1$, *d'aprés* ***le critère de Cauchy*** *:* $\sum u_n$ *diverge.*

(C) *Si* $a = 1$, ***le critère de Cauchy*** *ne donne rien.*

Critère de Cauchy

Exemples

3) $u_n = \left(a + \frac{1}{n^p}\right)^n$, *avec* $a > 0$ *et* $p \geq 0$.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(a + \frac{1}{n^p}\right)^n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} a + \frac{1}{n^p},$$

- *Si* $p = 0$, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = a + 1 > 1$, *alors* $\sum u_n$ *diverge.*
- *Si* $p > 0$, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = a$, *nous avons trois cas :*

(A) *Si* $a < 1$, *d'aprés* ***le critère de Cauchy*** *:* $\sum u_n$ *converge.*

(B) *Si* $a > 1$, *d'aprés* ***le critère de Cauchy*** *:* $\sum u_n$ *diverge.*

(C) *Si* $a = 1$, ***le critère de Cauchy*** *ne donne rien.*

Critère de Cauchy

Exemples

3) $u_n = \left(a + \frac{1}{n^p}\right)^n$, *avec* $a > 0$ *et* $p \geq 0$.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(a + \frac{1}{n^p}\right)^n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} a + \frac{1}{n^p},$$

- *Si* $p = 0$, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = a + 1 > 1$, *alors* $\sum u_n$ *diverge.*
- *Si* $p > 0$, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = a$, *nous avons trois cas :*

(A) *Si* $a < 1$, *d'aprés* ***le critère de Cauchy*** *:* $\sum u_n$ *converge.*

(B) *Si* $a > 1$, *d'aprés* ***le critère de Cauchy*** *:* $\sum u_n$ *diverge.*

(C) *Si* $a = 1$, ***le critère de Cauchy*** *ne donne rien.*

Critère de Cauchy

Exemples

3) $u_n = \left(a + \frac{1}{n^p}\right)^n$*, avec* $a > 0$ *et* $p \geq 0$*.*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(a + \frac{1}{n^p}\right)^n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} a + \frac{1}{n^p},$$

- *Si* $p = 0$, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = a + 1 > 1$, *alors* $\sum u_n$ *diverge.*
- *Si* $p > 0$, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = a$*, nous avons trois cas :*

(A) *Si* $a < 1$*, d'aprés* ***le critère de Cauchy*** *:* $\sum u_n$ *converge.*

(B) *Si* $a > 1$*, d'aprés* ***le critère de Cauchy*** *:* $\sum u_n$ *diverge.*

(C) *Si* $a = 1$*,* ***le critère de Cauchy*** *ne donne rien.*

Critère de Cauchy

Exemples

3) $u_n = \left(a + \frac{1}{n^p}\right)^n$, *avec* $a > 0$ *et* $p \geq 0$.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(a + \frac{1}{n^p}\right)^n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} a + \frac{1}{n^p},$$

- *Si* $p = 0$, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = a + 1 > 1$, *alors* $\sum u_n$ *diverge.*
- *Si* $p > 0$, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = a$, *nous avons trois cas :*

(A) *Si* $a < 1$, *d'aprés* ***le critère de Cauchy*** *:* $\sum u_n$ *converge.*

(B) *Si* $a > 1$, *d'aprés* ***le critère de Cauchy*** *:* $\sum u_n$ *diverge.*

(C) *Si* $a = 1$, ***le critère de Cauchy*** *ne donne rien.*

Critère de Cauchy

Exemples

Mais on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(1+\frac{1}{n^p}\right)^n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n^{p-1}} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)}{\frac{1}{n^p}}}$$

$$= \begin{cases} +\infty & si \quad p < 1, \\ e & si \quad p = 1, \\ 1 & si \quad p > 1. \end{cases}$$

On remarque que le terme général ne tend pas vers zéro, donc la série est divergente.

Critère de Cauchy

Exemples

Mais on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)^n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{\frac{1}{n^{p-1}}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)}{\frac{1}{n^p}}}$$

$$= \begin{cases} +\infty & si \quad p<1, \\ e & si \quad p=1, \\ 1 & si \quad p>1. \end{cases}$$

On remarque que le terme général ne tend pas vers zéro, donc la série est divergente.

Critère de Cauchy

Exemples

Mais on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)^n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{\frac{1}{n^{p-1}}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)}{\frac{1}{n^p}}}$$

$$= \begin{cases} +\infty & si \quad p<1, \\ e & si \quad p=1, \\ 1 & si \quad p>1. \end{cases}$$

On remarque que le terme général ne tend pas vers zéro, donc la série est divergente.

Critère de Cauchy vers d'Alembert

Une question se pose maintenanat, peut-on avoir des limites différentes en appliquant les deux critère de d'Alembert et celui de Cauchy ?

La réponse est donnée par la proposition suivente.

Proposition

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes positifs.

1. *Si* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l_1 \neq 0$ *et* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l_2 \neq 0$, *alors* $l_1 = l_2$.
2. *Si* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

Critère de Cauchy vers d'Alembert

Une question se pose maintenanat, peut-on avoir des limites différentes en appliquant les deux critère de d'Alembert et celui de Cauchy ?
La réponse est donnée par la proposition suivente.

Proposition

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes positifs.*

1. *Si* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l_1 \neq 0$ *et* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l_2 \neq 0$, *alors* $l_1 = l_2$.
2. *Si* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

Critère de Cauchy vers d'Alembert

Une question se pose maintenanat, peut-on avoir des limites différentes en appliquant les deux critère de d'Alembert et celui de Cauchy ?
La réponse est donnée par la proposition suivente.

Proposition

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes positifs.*

1. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l_1 \neq 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l_2 \neq 0$, *alors* $l_1 = l_2$.
2. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

Critère de Cauchy vers d'Alembert

Une question se pose maintenanat, peut-on avoir des limites différentes en appliquant les deux critère de d'Alembert et celui de Cauchy ?
La réponse est donnée par la proposition suivente.

Proposition

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes positifs.*

1. *Si* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l_1 \neq 0$ *et* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l_2 \neq 0$*, alors* $l_1 = l_2$.
2. *Si* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$*, alors* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

Critère de Cauchy vers d'Alembert

Une question se pose maintenanat, peut-on avoir des limites différentes en appliquant les deux critère de d'Alembert et celui de Cauchy ?
La réponse est donnée par la proposition suivente.

Proposition

Soit $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ *une série à termes positifs.*

1. *Si* $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l_1 \neq 0$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l_2 \neq 0$, *alors* $l_1 = l_2$.
2. *Si* $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

Critère de Cauchy vers d'Alembert

La réciprocité du deuxième résultat est fausse. En effet, il suffit de considérer la série de terme général

$$u_n = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{si n pair,} \\ 2\left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{si n impair.} \end{cases}$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{4}{3} & \text{si n pair,} \\ \frac{1}{3} & \text{si n impair.} \end{cases}$$

Alors, le critère de d'Alembert ne s'applique pas.

Pourtant, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{2}{3} < 1$, donc le critère de Cauchy s'applique et la série est convergente.

Critère de Cauchy vers d'Alembert

La réciprocité du deuxième résultat est fausse. En effet, il suffit de considérer la série de terme général

$$u_n = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{si n pair,} \\ 2\left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{si n impair.} \end{cases}$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{4}{3} & \text{si n pair,} \\ \frac{1}{3} & \text{si n impair.} \end{cases}$$

Alors, le critère de d'Alembert ne s'applique pas.

Pourtant, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{2}{3} < 1$, donc le critère de Cauchy s'applique et la série est convergente.

Critère de Cauchy vers d'Alembert

La réciprocité du deuxième résultat est fausse. En effet, il suffit de considérer la série de terme général

$$u_n = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{si n pair,} \\ 2\left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{si n impair.} \end{cases}$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{4}{3} & \text{si n pair,} \\ \frac{1}{3} & \text{si n impair.} \end{cases}$$

Alors, le critère de d'Alembert ne s'applique pas.

Pourtant, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{2}{3} < 1$, donc le critère de Cauchy s'applique et la série est convergente.

Critère de Cauchy vers d'Alembert

La réciprocité du deuxième résultat est fausse. En effet, il suffit de considérer la série de terme général

$$u_n = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{si n pair,} \\ 2\left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{si n impair.} \end{cases}$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{4}{3} & \text{si n pair,} \\ \frac{1}{3} & \text{si n impair.} \end{cases}$$

Alors, le critère de d'Alembert ne s'applique pas.

Pourtant, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \dfrac{2}{3} < 1$, donc le critère de Cauchy s'applique et la série est convergente.

Critère de Cauchy vers d'Alembert

La réciprocité du deuxième résultat est fausse. En effet, il suffit de considérer la série de terme général

$$u_n = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{si n pair,} \\ 2\left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{si n impair.} \end{cases}$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{4}{3} & \text{si n pair,} \\ \frac{1}{3} & \text{si n impair.} \end{cases}$$

Alors, le critère de d'Alembert ne s'applique pas.

Pourtant, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \dfrac{2}{3} < 1$, donc le critère de Cauchy s'applique et la série est convergente.

Critère de Cauchy vers d'Alembert

La réciprocité du deuxième résultat est fausse. En effet, il suffit de considérer la série de terme général

$$u_n = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{si n pair,} \\ 2\left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{si n impair.} \end{cases}$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{4}{3} & \text{si n pair,} \\ \frac{1}{3} & \text{si n impair.} \end{cases}$$

Alors, le critère de d'Alembert ne s'applique pas.

Pourtant, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \dfrac{2}{3} < 1$, donc le critère de Cauchy s'applique et la série est convergente.