Université de Batna 2
Faculté des Mathématiques et Informatique
Département de mathématiques

$3^{ème}$ année mathématiques
Année 2020-2021
Sidi ali Fatima Zohra[1]

Série des exercices 2
Optimisation sans contraintes -LMD- S5

Exercice 1

Rechercher les points critiques et déterminer leur nature (maximum local, minimum local, point-selle,.....) pour les fonctions définies ci-dessous

1. $f_1(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$.
2. $f_2(x,y) = 3x^3 - 6xy + 3y^2$.
3. $f_3(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.
4. $f_4(x,y) = x^3y + x^3 - x^2y$.

Exercice 2

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24.$$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Calculer ∇f, puis déterminer le seul point critique (a,b) de f.

   (b) Calculer les dérivées paritielles d'odre 2 de f et écrire la matrice hessienne $\nabla^2 f(a,b)$ de f en son point critique.

   (c) En déduire que f admet un extremum local m au point (a,b) dont on précisera la nature (minimum ou maximum) et sa valeur.

3. Le but de cette question est de montrer qu'en fait cet extremum est global.

   (a) Compléter le membre de droite de l'égalité suivante

$$2x^2 + 2xy + 12x = 2(x + \frac{y}{2} + 3)^2 - ....$$

   (b) Compléter de même l'égalité :

$$\frac{y^2}{2} - 2y + 6 = \frac{1}{2}(y-2)^2 + ...$$

(c) En déduire une autre écriture de f montrant que l'extremum trouvé plus haut est global.

[1]f.sidiali@univ-batna2.dz

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = xe^{x(y^2+1)}.$$

(1) Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

(2) (a) Calculer ∇f.

(b) En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1, 0)$.

(3) (a) Déterminer les dérivées partielles secondes de f.

(b) Montrer qu'effectivement, f présente un extremum en A, en précisant sa nature et sa valeur.

(4) (a) Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \geq xe^x$.

(b) En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x$, conclure que l'extremum trouvé à la question (2)(b) est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy.$$

(a) Calculer le gradient de f et sa matrice hessienne.

(b) Utiliser le gradient de f pour calculer la dérivée de l'application $x \longrightarrow f(x, e^x)$.

(c) Donner l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ au point $(1, 1.5)$.

(d) Déterminer les points critiques de f.

(e) Utiliser la matrice hessienne de f pour déterminer la nature de ces points critiques.

(f) En considérant l'application $x \longrightarrow f(x,x)$, montrer que f n'a pas de maximum global, ni de minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5

Etudier la convexité des ensembles suivants :

1. A=$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.
2. B=$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \ \frac{1}{2}(y - x^2) \geq 0\}$.

Exercice 6

Les fonction f suivantes sont-elles convexes ?

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 + e^{x+y}$.
2. $f(x,y) = -5x^2 - 5y^2 + 2xy + 3x + 3y + 1000$.
3. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + xy$.

Exercice 7

Pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1 - 10x_3 - 2x_1x_3$.
2. $f_2(x_1,x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 12x_2 + 20$.
3. $f_3(x_1,x_2) = (x_1^4 + x_2^4) - 2(x_1 - x_2)^2$.

— Etudier l'existence de points extrémums.

— En utilisant une condition d'optimalité du premier ordre déterminer les points critiques.

— Préciser à chaque fois leur nature ?

Exercice 8

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit

$$f_a : (x,y) \longrightarrow x^2 + y^2 + axy - 2x - 2y.$$

1. Pour quelles valeurs de a, la fonction f_a est-elle convexe ? Et strictement convexe ?

2. Discuter en fonction des valeurs du paramètre a de l'existence de solutions au problème d'optimisation $\inf \left\{ f_a(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

3. Lorsque $a \in \left]-2, 2\right[$, résoudre le problème précédent.

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

1. Montrer qu'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^2$ (et les déterminer) tels que

   $$f(x,y) \geq \alpha \|(x,y)\|^2 + \beta$$

   pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, où la notation $\|.\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.
   En déduire que le problème

   $$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) \qquad (p)$$

   possède au moins une solution.
2. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$?
3. Déterminer les points critiques de f, et préciser leur nature (minimum local, maximum local, point-selle,...). Résoudre alors le problème (p).