Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Géométrie des courbes et surfaces
Mr. Zerguine Mohamed
2020-2021

TRAVAUX DIRIGÉS
$2^{\text{ÈME}}$ ANNÉE LMD

Exercice 1. Pour réduire le domaine d'étude d'une courbe

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)) \text{ ou } \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

avec $x, y, z : I \mapsto \mathbb{R}$ sont des fonctions réelles. Voici une série de transformations.

— Translation avec un vecteur (a_0, b_0) : $\gamma(t) = (x(t) + a_0, y(t) + b_0)$,

— Périodicité de période T : $P_T \gamma(t+T) = (x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t))$, on restreint notre étude sur un intervalle de longueur T,

— Réflexion d'axe (ox) : $S_{(ox)}\gamma = (x, -y)$,

— Réflexion d'axe (oy) : $S_{(oy)}\gamma = (-x, y)$,

— Réflexion d'axe $y = x$: $S_{(y=x)}\gamma = (y, x)$,

— Symétrie centrale de centre O : $S_{(O)}\gamma = (-x, -y)$

— Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour O : $\text{rot}_{(O,\pi/2)}\gamma = (-y, x)$

Réduir les domaines des courbes suivantes/

(1) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = (3 - 2\cos t - \cos 2t, 2\sin t - \sin 2t)$,
(2) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = (\sin t, \frac{\sin t}{2+\cos t})$,
(3) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$,
(4) $\gamma : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = (t + \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t})$,
(5) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = (\cos t, \frac{t}{2} + \sin t)$,
(6) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = ((\cos t)^3, (\sin t)^3)$,
(7) $\gamma : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \gamma(t) = (\cos t, \sin t, at)$, $a \neq 0$,

Exercice 2.

(1) On considère la courbe d'équation cartésienne $y \ln\left(\frac{y}{x}\right) = x^2$ En introduisant le paramètre $t = \frac{y}{x}$. Décrire la représentation paramétrique de cette courbe.

(2) Vérifier que la courbe paramétrique $\gamma : (-1, \infty) \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$ admet comme équation cartésienne $3xy = x^3 + y^3$.

(3) Soit une courbe $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t^2, t^3)$.
(3.i) Montrer que $\gamma(I)$ est le graphe de la fonction $f(x) = x^{2/3}$.
(3.ii) Tracer le graphe de cette fonction.

(4) Soit γ la courbe de l'équation cartésienne $x(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$
(4.i) Soit D_t la droite d'équation $y = tx$. Déterminer pour $t \neq 0$ le point d'intersection $M(t) = (x(t), y(t))$ de γ et D_t. En déduire une paramétrisation de γ.
(4.ii) Déduire l'équation polaire de γ

جامعة باتنة ٢ كلية الرياضيات و الاعلام الالي قسم الرياضيات

Université de Batna –2–
Faculté de Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Géométrie des courbes et surfaces
Mr. Zerguine Mohamed
2020-2021

TRAVAUX DIRIGÉS (II)
2ÈME ANNÉE LMD

Exercice 1. L'objectif est l'étude des points multiples, les points réguliers et les points singuliers.
Indication : Pour trouver les points multiples d'une courbe paramétrée, on cherche les couples $(t,s) \in I^2$ tels que $s < t$ et $\gamma(t) = \gamma(s)$ ou $\frac{\gamma(t)-\gamma(s)}{t-s} = 0$.
Pour déterminer les points réguliers (respectivement les points singuliers) on vérifie que γ est dérivable sur le domaine de définition de γ noté D_γ et que $\gamma'(t_0) \neq 0$ (respectivement $\gamma'(t_0) = 0$) avec $t_0 \in D_\gamma$. Dans ce cas $(t_0, \gamma(t_0))$ est un point régulier (respectivement point singulier).

(1) Déterminer les points multiples des courbes paramétrées suivantes
$$\gamma(t) = (2t + t^2, 2t - \frac{1}{t^2}), \quad t \in \mathbb{R} - \{0\},$$
$$\gamma(t) = (\sin 2t, \sin 3t),$$
(sachant que $\sin a - \sin b = 2\sin(\frac{a-b}{2})\cos(\frac{a+b}{2})$.)

(2) Déterminer les points réguliers des courbes paramétrées
$$\gamma(t) = (\tan(\frac{t}{3}), \sin t),$$
$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t).$$

(3) Déterminer les points singuliers des courbes paramétrées
$$\gamma(t) = (3t^2, 2t^3),$$
$$\gamma(t) = (\frac{t^3}{t^2-1}, \frac{t(3t-2)}{3(t-1)}).$$

Exercice 2. Considérons la courbe paramétrée donnée par
$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (1 + \cos t + 2\cos\frac{t}{2}, \sin t), \quad t \in I =]-2\pi, 2\pi[.$$

(1) La courbe paramétrée γ est-elle régulière ?

(2) Montrer que l'origine $(0,0)$ est un point triple pour γ.

(3) Utiliser le tableau de variation de γ pour montrer que la fonction $x'(\cdot)y''(\cdot) - x''(\cdot)y'(\cdot)$ est strictement positive. Déduire alors que la courbure algébrique $k_{alg}(t)$ de γ en $\gamma(t)$ garde un signe constant pour tout $t \in I$.

(4) Déterminer les tangentes verticales et horizontales et le point triple de γ. (On rappel que $\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$.)