

## corrigé type 2

### Solution

#### 1. Détente isotherme et réversible :

a) Température finale du gaz :

$$T_2 = T_1 = 298\text{K} \quad \text{transformation isotherme}$$

b) Variation de l'énergie interne du gaz pendant la détente isotherme :

$$\Delta U = 0 \quad \text{transformation isotherme}$$

c) Travail effectué par le gaz pendant la détente isotherme :

$$W_{rev}(1 \rightarrow 2) = -\int_1^2 P_{ext} dV = -\int_1^2 P_{gaz} dV = -\int_1^2 \frac{nRT}{V} dV = -nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -P_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$W_{rev} = -\int_1^2 P_1 dV = nRT \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

$$W_{rev} = 8,31 \cdot 298 \ln 1/5$$

$$W_{rev}(1 \rightarrow 2) = -3985,6 \text{ J}$$

d) Quantité de chaleur Q mise en jeu pendant la détente isotherme :

$$\Delta U = Q + W \quad Q = -W \quad \text{puisque } \Delta U = 0$$

$$Q(1 \rightarrow 2) = 3985,6 \text{ J}$$

e) Variation d'enthalpie du gaz pendant la détente isotherme :

$$H = U + PV \Rightarrow dH = dU + d(PV)$$

$$\text{Or } d(PV) = 0 \text{ (détente isotherme)} \quad \Rightarrow \Delta H = 0$$

#### 1. Détente isotherme et réversible :

a) Température finale du gaz :

$$T_2 = T_1 = 298\text{K} \quad \text{transformation isotherme}$$

b) Variation de l'énergie interne du gaz pendant la détente isotherme :

$$\Delta U = 0 \quad \text{transformation isotherme}$$

c) Travail effectué par le gaz pendant la détente isotherme :

$$W_{rev}(1 \rightarrow 2) = -\int_1^2 P_{ext} dV = -\int_1^2 P_{gaz} dV = -\int_1^2 \frac{nRT}{V} dV = -nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -P_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

#### 2. Détente isotherme et irréversible

a) Température finale du gaz est :

$$T_2 = T_1 = 298\text{K} \text{ (transformation isotherme)}$$

b) Variation de l'énergie interne du gaz pendant la détente isotherme irréversible :

$$\Delta U = 0 \text{ transformation isotherme}$$

c) Travail effectué par le gaz pendant la détente isotherme irréversible:

$$W_{irrev}(1 \rightarrow 2) = -\int_1^2 P_{ext} dV = -\int_1^2 P_{gaz} dV = -\int_1^2 P_{final} dV$$

$$= -P_{final} \int_1^2 dV = -P_2 (V_2 - V_1)$$

$$W_{irrev}(1 \rightarrow 2) = -P_2 (RT/P_2 - RT/P_1)$$

$$W_{irrev}(1 \rightarrow 2) = -1981 \text{ J}$$

d) Quantité de chaleur Q mise en jeu pendant la détente isotherme irréversible :

$$\Delta U = Q + W \quad Q = -W \text{ puisque } \Delta U = 0$$

$$Q = 1981 \text{ J}$$

e) Variation d'enthalpie du gaz pendant la détente isotherme irréversible :

$$\Delta H = 0 \text{ (détente isotherme)}$$

### 3. Détente adiabatique réversible

a) Température finale du gaz :

$$dU = C_v dT = \delta W + \delta Q \text{ car } \delta Q = 0$$

$$C_v dT = -PdV = -\frac{RT}{V} dV \text{ pour une mole}$$

$C_v dT = -(C_p - C_v) T dV/V$  car pour un gaz parfait  $C_p - C_v = R$  et  $\gamma = C_p/C_v$

$$dT/T = -((C_p - C_v)/C_v) dV/V = (1 - \gamma) dV/V$$

$$dT/T = (1 - \gamma) dV/V$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante} \quad (PV/R)V^{\gamma-1} = \text{constante}$$

$$PV^\gamma = R \text{ constante} \Rightarrow PV^\gamma = \text{constante.}$$

b) En remplaçant  $V$  par  $\frac{RT}{P}$ , dans l'expression  $PV^\gamma$ , nous obtenons :

$$P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma} T_2^\gamma$$

$$\text{Soit } T_2 = T_1 (P_1/P_2)^{1/\gamma}$$

Pour le gaz monoatomique, nous avons :  $C_v = 3R/2$  et  $C_p = 5R/2 \Rightarrow \gamma = 5/3$

$$T_2 = T_1 (P_1/P_2)^{0,4} = 156,5 \text{ K}$$

c) La variation de l'énergie interne pour la détente adiabatique réversible est :

$$\Delta U = C_v (T_2 - T_1)$$

$$\Delta U = 3/2 (156,5 - 298) \cdot 8,31 = -1764 \text{ J.mol}^{-1}$$

d) La quantité de chaleur pour la détente adiabatique réversible est :  $Q = 0$

e) Le travail mis en jeu pendant pour la détente adiabatique réversible

est :  $\Delta U = W$

$$W = -1764 \text{ J.mol}^{-1}$$

f) La variation d'enthalpie pour la détente adiabatique réversible est :

$$\Delta H = C_p (T_2 - T_1)$$

$$\Delta H = -2940 \text{ J.mol}^{-1}$$

### 4. Détente adiabatique irréversible

a) Température finale du gaz:

$$\delta Q = 0 \Rightarrow dU = \delta W \Rightarrow C_v dT = -PdV$$

$$C_v (T_2 - T_1) = -P_2 (V_2 - V_1) = -P_2 R (T_2/P_2 - T_1/P_1)$$

$$\Rightarrow T_2 = 203 \text{ K} \text{ (} T_{\text{irr}} \rightarrow T_{\text{rev}} \text{)}$$

b) La variation de l'énergie interne pour la détente adiabatique irréversible est :  $\Delta U = C_v (T_2 - T_1)$

$$\Delta U = 3/2 \cdot 8,31 (203 - 298) = -1184 \text{ J.mol}^{-1}$$

c) La quantité de chaleur pour la détente adiabatique irréversible est :

$$Q = 0$$

d) Travail mis en jeu pour la détente adiabatique réversible

$$\Delta U = W + Q$$

$$\Delta U = W$$

$$W = - 1184 \text{ Jmol}^{-1}$$

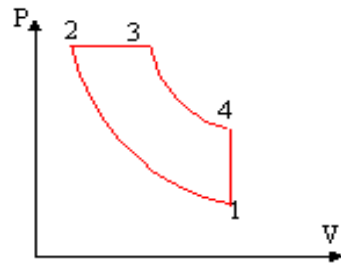
e) La variation d'enthalpie pour la détente adiabatique réversible est :

$$\Delta H = C_p (T_2 - T_1)$$

$$\Delta H = - 1974 \text{ J.mol}^{-1}$$

## Exercice 2

Données :  $\gamma = 1,4$  ;  $P_1 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  ;  $a = 9$  ;  $T_1 = 300 \text{ K}$  ;  $b = 3$  ;  $C_v = 20,8 \text{ J/K/mol}$



compression adiabatique :

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \text{ soit } P_2 = P_1 (V_1 / V_2)^\gamma = P_1 a^\gamma$$

$$P_2 = 10^5 * 9^{1,4} = 2,167 \cdot 10^6 \text{ Pa.}$$

$$V_1 / V_2 = a \text{ d'où } V_2 = V_1 / a$$

$$\text{avec } P_1 V_1 = RT_1 \text{ soit } V_1 = 8,31 * 300 / 10^5 = 0,025 \text{ m}^3.$$

$$\text{et } V_2 = RT_1 / (a P_1) = 0,025 / 9 = 2,77 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

$$P_2 V_2 = RT_2 \text{ soit } T_2 = P_1 a^\gamma RT_1 / (a P_1)$$

$$T_2 = a^{\gamma-1} T_1 = 9^{0,4} * 300 = 722,4 \text{ K.}$$

dilatation à P=Cte :

$$P_3 = P_2 ; V_3 = 8,33 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ (calcul ci dessous)}$$

$$P_3 V_3 = RT_3 \text{ d'où } T_3 = P_2 V_3 / R = P_1 a^\gamma V_1 / (Rb)$$

$$T_3 = 10^5 * 9^{1,4} * 0,025 / (8,3 * 3) = 2176 \text{ K.}$$

détente adiabatique :

$$P_3 V_3^\gamma = P_4 V_4^\gamma \text{ soit } P_4 = P_3 (V_3 / V_4)^\gamma = P_3 / b^\gamma = P_1 (a/b)^\gamma$$

$$P_4 = 10^5 * 3^{1,4} = 4,65 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

$$V_4 / V_3 = b \text{ d'où } V_3 = V_4 / b = V_1 / b = 0,025 / 3 = 8,33 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\text{avec } P_4 V_4 = RT_4 \text{ soit } T_4 = P_4 V_1 / R = P_1 (a/b)^\gamma V_1 / R.$$

$$T_4 = 10^5 * 3^{1,4} * 0,025 / 8,31 = 1402 \text{ K.}$$

travail et chaleur échangés (1) --> (2) :

adiabatique, donc pas d'échange de chaleur avec l'extérieur

$$\text{travail : } W_{12} = \frac{(P_2 V_2 - P_1 V_1)}{(\gamma - 1)}$$

$$W_{12} = \frac{(21,67 \cdot 10^5 * 2,77 \cdot 10^{-3} - 10^5 * 0,025)}{0,4} = 8 \, 756 \text{ J. (reçu)}$$

travail et chaleur échangés (2) --> (3) :

pression constante donc  $W_{23} = -P_2 (V_3 - V_2)$

$$W_{23} = -21,67 \cdot 10^5 (8,33 - 2,77) \cdot 10^{-3} = - 12 \, 048 \text{ J (cédé à l'extérieur)}$$

variation d'énergie interne du gaz  $C_v (T_3 - T_2)$

$$\Delta U = 20,8 (2176 - 722,4) = 30\,235 \text{ J}$$

$$Q_{23} = \Delta U - W_{23} = 30\,235 - (-12\,048) = 42\,283 \text{ J (reçu)}$$

travail et chaleur échangés (3) --> (4) :

adiabatique, donc pas d'échange de chaleur avec l'extérieur

$$\text{travail : } W_{34} = \frac{(P_4 V_4 - P_3 V_3)}{(\gamma - 1)}$$

$$W_{34} = \frac{(4,65 \cdot 10^5 \cdot 25 \cdot 10^{-3} - 21,67 \cdot 10^5 \cdot 8,33 \cdot 10^{-3})}{0,4} = -16\,065 \text{ J. (perdu)}$$

travail et chaleur échangés (4) --> (1) :

volume constant donc  $W_{41} = 0$

la chaleur échangée est égale à la variation d'énergie interne du gaz

$$Q_{41} = C_v(T_1 - T_4)$$

$$Q_{41} = 20,8 (300 - 1402) = -22\,922 \text{ J. (cédé à l'extérieur)}$$

rendement :

il représente le taux de conversion en travail de l'énergie thermique reçue.

énergie thermique reçue = 42 283 J

travail fourni - travail reçu :  $-16065 - 12048 + 8756 = -19357 \text{ J}$

rendement =  $-(-19357) / 42\,283 = 0,46$ .

autre méthode :  $1 + Q_2 / Q_1$  avec

$Q_1$  chaleur reçue et  $Q_2$  chaleur cédée.

$$1 + (-22\,921) / 42\,283 = 1 - 0,54 = 0,46.$$

### Exercice 3

1. La donnée des volume, pression et température du gaz au point C définit complètement les variables thermodynamiques du gaz en particulier son nombre de moles. Le volume  $V_A$  au point A du cycle dépend de ce nombre de moles suivant la loi des gaz parfaits. Ainsi :

$$\frac{P_A V_A}{T_2} = \frac{P_C V_C}{T_1}$$

soit  $V_A = \frac{P_C V_C T_2}{P_A T_1}$ . Numériquement, on obtient  $V_A = 8,5$  litres.

Le point B est défini par son appartenance à l'isotherme passant par A, et l'adiabatique passant par C. Ainsi,  $P_B V_B = P_A V_A$  et  $P_B V_B^\gamma = P_C V_C^\gamma$ . L'élimination de  $P_B$  entre les deux équations permet d'obtenir l'expression de  $V_B$ :

$$V_B = \left( \frac{P_C V_C^\gamma}{P_A V_A} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

Numériquement,  $V_B = 6,1$  litres. La pression du gaz en B vaut  $P_B = \frac{P_A V_A}{V_B} = 1,4$  bars. Les coordonnées  $(P, V)$  du point D peuvent s'obtenir à partir de la même technique que celle utilisée pour le point B. On peut également se rappeler que pour une transformation adiabatique, le produit  $TV^{\gamma-1}$  est constant. Ainsi :

$$T_1 V_D^{\gamma-1} = T_2 V_A^{\gamma-1}, \text{ soit } V_D = V_A \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

Les points C et D étant à la même température,  $P_D V_D = P_C V_C$ , d'où  $P_D = 7,2$  bars.

2. Le tracé de cycle dans le diagramme de Clapeyron est donné sur la figure 1 ci-dessous.

3. Les échanges de chaleur ont lieu au cours des compressions et détentes isothermes. La variation d'énergie interne du gaz parfait étant nulle au cours de ces transformations, et celles-ci étant supposées quasi-statiques, on a

$$\delta Q = PdV = nRT \frac{dV}{V}$$

Après intégration, on obtient sur l'isotherme  $T_1$ :  $Q_1 = nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C} = p_C V_C \ln \frac{V_D}{V_C}$

De même sur l'isotherme  $T_2$ :  $Q_2 = p_A V_A \ln \frac{V_B}{V_A}$

Numériquement,  $Q_1 = 10 \times 101325 \times 1,5 \cdot 10^{-3} \times \ln \frac{2,1}{1,5} = 511 \text{ J}$  est la chaleur reçue par le gaz de la source chaude, et

$Q_2 = 1 \times 101325 \times 8,5 \cdot 10^{-3} \times \ln \frac{6,1}{8,5} = -286 \text{ J}$  est la chaleur donnée par le gaz à la source froide.

Au cours du cycle  $\Delta U = 0 = Q_1 + Q_2 + W$ , d'où  $W = -Q_1 - Q_2 = -225 \text{ J}$ . Cette machine thermique est

donc un moteur thermique, du travail étant fourni par le gaz au cours d'un cycle.

4. Cette machine étant un moteur thermique, son rendement est évalué par

$$\eta = \frac{|W|}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$$

Relation liant les volumes des quatre points du cycle :

Cette relation aurait pu être obtenue et exploitée à la question 1). En se rappelant qu'au cours des transformations adiabatiques  $TV^{\gamma-1}$  est constant, on a :  $T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$  et  $T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1}$ . Or,  $T_B = T_C$  et  $T_D = T_A$ .

Donc, en multipliant les deux expressions de  $TV^{\gamma-1} = \text{constante}$ , on obtient  $(V_A V_C)^{\gamma-1} = (V_B V_D)^{\gamma-1}$ , soit  $\frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C}$ . En reprenant les expressions littérales pour  $Q_1$  et  $Q_2$  obtenues plus haut, il vient :

$$\eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{p_A V_A \ln \frac{V_B}{V_A}}{p_C V_C \ln \frac{V_D}{V_C}} = 1 + \frac{-T_2 \ln \frac{V_A}{V_B}}{T_1 \ln \frac{V_D}{V_C}}$$

qui se simplifie en  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

Pour retrouver cette expression, on peut également s'appuyer sur le second principe de la thermodynamique. Selon ce principe, la variation d'entropie du système au cours du cycle (qui est

nulle) vérifie  $\Delta S = 0 \geq \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}$ , d'où  $\frac{Q_2}{Q_1} \leq -\frac{T_2}{T_1}$ . Il y a égalité dans le cas réversible, ce qui est le cas ici.

Donc on peut écrire également  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ .  
Numériquement,  $\eta = 43\%$

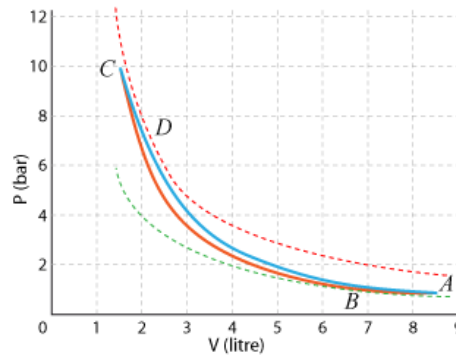


Figure 1