

## CHAPITRE II

### MODELISATION DES ROBOTS

#### 1. Introduction

Pour commander ou simuler le comportement d'un système mécanique articulé (robot), on doit disposer d'un modèle. Plusieurs niveaux de modélisation sont possibles selon les objectifs, les contraintes de la tâche et les performances recherchées.

Les modèles mathématiques nécessaires sont :

- Les modèles géométriques direct et inverse qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction des variables articulaires et inversement.
- Les modèles cinématiques direct et inverse qui expriment les vitesses de l'organe terminal en fonction des variables articulaires et inversement.
- Les modèles dynamiques définissant les équations du mouvement du robot qui permettent d'établir les relations entre les couples ou forces exercées par les actionneurs et les positions, vitesses et accélérations des articulations.

#### Difficultés:

- Complexité de la cinématique
- Nombre de degré de liberté
- Type d'articulation (prismatique ou rotoïde)
- Type de chaîne (ouverte, simple, arborescente ou fermée)

Pour obtenir un bon modèle il faut

- 1- Mettre en œuvre des procédures efficaces d'identification et de leurs paramètres constitutifs.
- 2- Pour qu'une commande puisse être effectivement implantée sur un contrôleur de robot, les modèles doivent être calculés en ligne et donc le nombre d'opération à effectuer doit être minimum.

#### 2. Modèle Géométrique des robots

La Conception et la commande des robots nécessitent le calcul de certains modèles mathématiques tel que le modèle géométrique direct qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction des variables articulaires du mécanisme et inversement.

Le calcul symbolique de ces modèles par ordinateur a fait l'objet d'un grand nombre de travaux.

Le logiciel SYMORO+ conçu par Khalil et dans lequel on retrouve implanté la plupart des algorithmes de modélisation en robotique, est certainement le plus performant.

La modélisation du robot de façon systématique et automatique exige une méthode adéquate pour la description de leur morphologie. Plusieurs méthodes et notations ont été proposées, la plus répandue est celle de Denavit-Hartenberg mais cette méthode, développée pour des structures ouvertes simples, présente des ambiguïtés lorsqu'elle est appliquée sur des robots ayant des structures fermées ou arborescentes. C'est pourquoi, on utilise la notation de Khalil

et Kleinfinger qui permet la description homogène, et avec un nombre minimum de paramètres, des architectures ouvertes simples et complexes des systèmes mécaniques articulés.

## 2.1 Convention de Denavit-Hartenberg

Méthodologie à suivre pour décrire les robots à structure ouverte simple.

Une structure ouverte simple est composée de  $n+1$  corps notés  $C_0 \dots\dots\dots C_n$  et de  $n$  articulations. A chaque corps on associe un repère  $R_i$ ,  $i$  variant de 0 à  $n$ . La  $i^{\text{ème}}$  articulation  $q_i$  relie les corps  $i-1$  et  $i$ .

Le corps  $C_0$  désigne la base du robot et le corps  $C_n$  le corps qui porte l'organe terminal

Le repère  $R_i$  fixé au corps  $C_i$  est défini de sorte que :

- ✓ L'axe  $z_i$  est porté par l'axe de l'articulation  $i$ .
- ✓ L'axe  $x_i$  est porté par la perpendiculaire commune aux axes  $x_i$  et  $x_{i+1}$ . Si les axes  $z_i$  et  $z_{i+1}$  sont parallèles ou colinéaires, le choix de  $x_i$  n'est pas unique.

### Principe

- ✓ Fixer des repères à chaque corps du robot.
- ✓ Calculer les matrices homogènes entre deux corps successifs
- ✓ Calculer la matrice homogène entre la base et l'organe terminal

Le modèle géométrique direct permet d'obtenir l'attitude du repère attaché à l'organe terminal d'un robot à partir des positions articulaires.

### Paramétrage de la position

Les trois paramètres de translation seront presque toujours les coordonnées de l'origine du repère attaché à l'organe terminal. Ces coordonnées sont en général exprimées dans le repère  $R_0$

L'attitude d'un repère  $R_i$  par rapport à un repère  $R_{i-1}$  peut être représentée par 4 paramètres à condition que :

- ✓ L'axe  $x_i$  de  $R_i$  soit perpendiculaire à l'axe  $z_{i-1}$  de  $R_{i-1}$
- ✓ L'axe  $x_i$  de  $R_i$  coupe l'axe  $z_{i-1}$  de  $R_{i-1}$
- ✓ L'axe  $z_i$  de  $R_i$  est confondu avec l'axe  $i+1$  du robot
- ✓ L'axe  $x_i$  de  $R_i$  est perpendiculaire à l'axe  $i$  du robot

### Matrice homogène DH

Elle est décomposée en 4 transformations élémentaires :

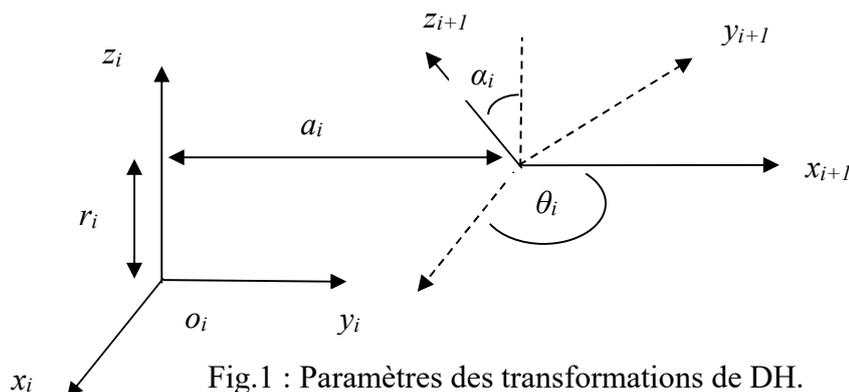


Fig.1 : Paramètres des transformations de DH.

- ✓ Rotation autour de  $z_i$  d'un angle  $\theta_i$  ( $\theta_i$  étant l'angle entre les axes  $x_i$  et  $x_{i+1}$ )
- ✓ Translation le long de  $z$  d'une distance  $r_i$  ( $r_i$  étant la distance entre les axes  $x_i$  et  $x_{i+1}$ )
- ✓ Translation le long de  $x$  d'une distance  $a_i$  ( $a_i$  étant la distance entre les axes  $z_i$  et  $z_{i+1}$ )
- ✓ Rotation autour de  $x_i$  d'un angle  $\alpha_i$  ( $\alpha_i$  étant l'angle entre les axes  $z_i$  et  $z_{i+1}$ )

- Si l'articulation  $i$  est de type prismatique, alors  $r_i$  est variable et  $\alpha_i$ ,  $\theta_i$  et  $a_i$  sont constants.
- Si l'articulation  $i$  est de type rotoïde, alors  $\theta_i$  est variable et  $\alpha_i$ ,  $a_i$  et  $r_i$  sont constants.

La variable articulaire  $q_i$  associée à la  $i^{\text{ème}}$  articulation est définie par :

$$q_i = \delta_i \cdot \theta_i + (1 - \delta_i) \cdot r_i$$

avec :  $\delta_i = 0$  si l'articulation  $i$  est rotoïde

$\delta_i = 1$  si l'articulation est prismatique

A partir de cette description on peut définir la matrice de transformation homogène définissant le repère  $R_i$  dans le repère  $R_{i-1}$ . La matrice de transformation homogène s'écrit donc :

$$DH_{i-1,i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \cos\alpha_i & \sin\theta_i \sin\alpha_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \sin\alpha_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & r_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Exemple

Soit le manipulateur suivant composé de quatre articulations rotoïdes :

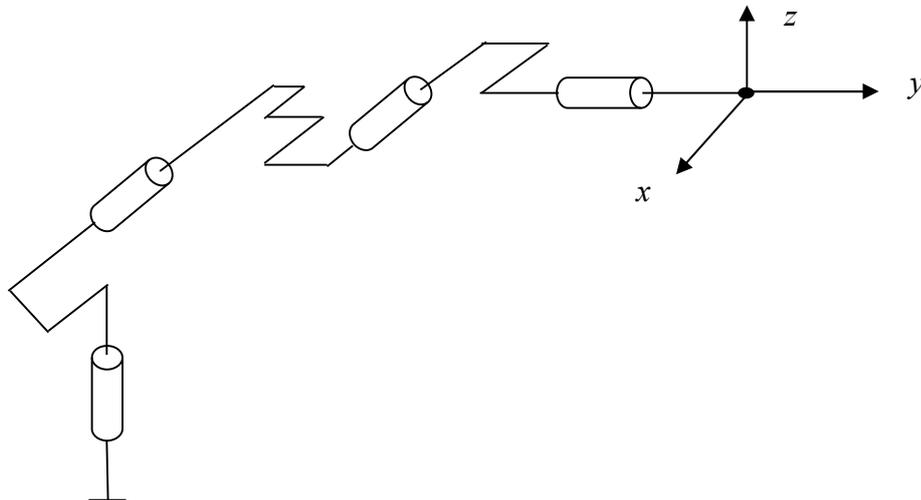


Fig. 2 : Manipulateur à 4 articulations

La projection de ces articulations sur des repères orthonormés donne la représentation suivante :

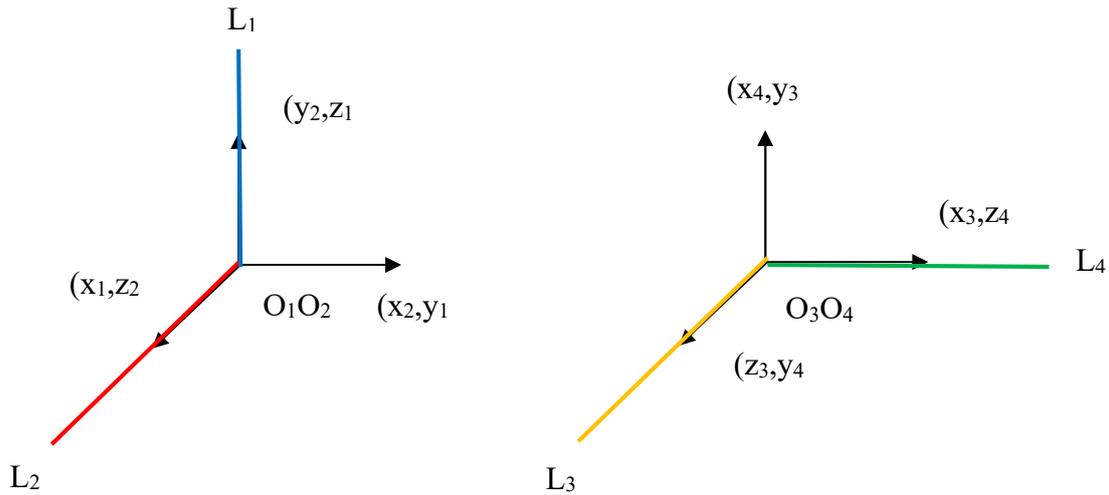


Fig. 3 : Repères liés aux différentes articulations

Les valeurs des différents paramètres de Denavit-Hartenberg pour ce manipulateur sont données dans le tableau suivant :

| Articulations / Paramètres | 1       | 2     | 3       | 4       |
|----------------------------|---------|-------|---------|---------|
| $\delta_i$                 | 0       | 0     | 0       | 0       |
| $\alpha_i$                 | $\pi/2$ | 0     | $\pi/2$ | $\pi/2$ |
| $a_i$                      | 0       | $a_2$ | 0       | 0       |
| $\theta_i$                 | $q_1$   | $q_2$ | $q_3$   | $q_4$   |
| $r_i$                      | 0       | 0     | 0       | $r_4$   |

### Modèle Géométrique Inverse

Le modèle géométrique direct est l'ensemble des relations qui permettent d'exprimer la situation de l'organe terminal, les coordonnées opérationnelles, du robot en fonction de ses coordonnées articulaires. Dans le cas d'une chaîne simple ouverte, il peut être représenté par la matrice  $T_{0,n}$  qui se calcule par :  $T_{0,n} = T_{0,1}(q_1) \times T_{1,2}(q_2) \times \dots \times T_{n-1,n}(q_n)$

Le modèle géométrique direct du robot peut se représenter aussi par la relation :  $\underline{X} = f(\underline{q})$  où  $\underline{X}$  est le vecteur des coordonnées opérationnelles exprimées dans le repère de référence  $R_0$ , et  $\underline{q}$  les variables articulaires.

La matrice  $T_{0,n}$  représente la position et l'orientation, exprimées dans le repère de référence  $R_0$ , de l'organe terminal du robot.

Le modèle géométrique inverse est le problème inverse qui permet de connaître les variables articulaires en fonction de la situation de l'organe terminal, ce qui peut se représenter par la relation :  $\underline{q} = g(\underline{X})$

### Inversion du modèle géométrique - Méthode de Paul

Il s'agit de déterminer les coordonnées articulaires permettant d'obtenir une situation désirée pour l'organe terminal et spécifiée par les coordonnées opérationnelles  $\underline{X}$ .

Il n'existe pas de méthode systématique d'inversion du modèle géométrique. Lorsqu'elle existe, la forme explicite, issue d'une inversion mathématique, qui donne toutes les solutions possibles au problème inverse (il y a rarement unicité de la solution) constitue le **modèle géométrique inverse**. Il existe un certain nombre de méthodes pour calculer le modèle géométrique inverse, notamment la méthode de Paul qui traite séparément chaque cas particulier et qui convient pour la plupart des robots industriels.

Lorsque le modèle géométrique inverse n'existe pas, c'est-à-dire qu'il n'existe pas une forme explicite, on peut calculer une solution particulière du problème inverse par des procédures numériques, qui est une solution locale au sens où elle dépend des conditions initiales (voir TD sur l'utilisation de la méthode de Newton). Notons que de telles méthodes peuvent être pénalisantes du point de vue du temps de calcul.

### Exemples (simples)

#### ✓ 1<sup>er</sup> exemple

Soit le manipulateur évoluant dans un plan et décrit dans la figure suivante.

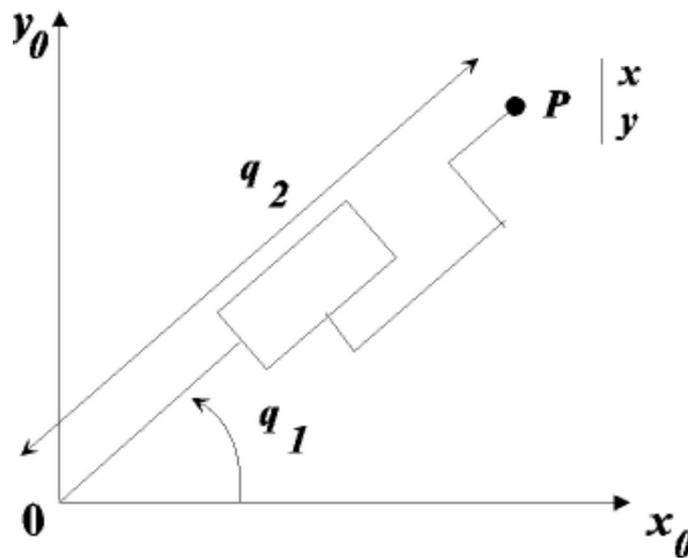


Fig. 4 : Manipulateur évoluant dans un plan.

On a le modèle géométrique direct suivant :

$$X = q_2 \cos(q_1)$$

$$Y = q_2 \sin(q_1)$$

Une démarche analytique simple permet de déterminer le modèle géométrique inverse. On a :

$$\text{tg}(q_1) = y/x \Rightarrow q_1 = \text{arctg}(y/x)$$

$$\text{et } x^2 + y^2 = q_2^2 \Rightarrow q_2 = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

#### ✓ 2<sup>ème</sup> exemple

Soit le manipulateur RR plan décrit sur la figure 5 ci-dessous.

On a le modèle géométrique direct suivant :

$$X = l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2)$$

$$Y = l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2)$$

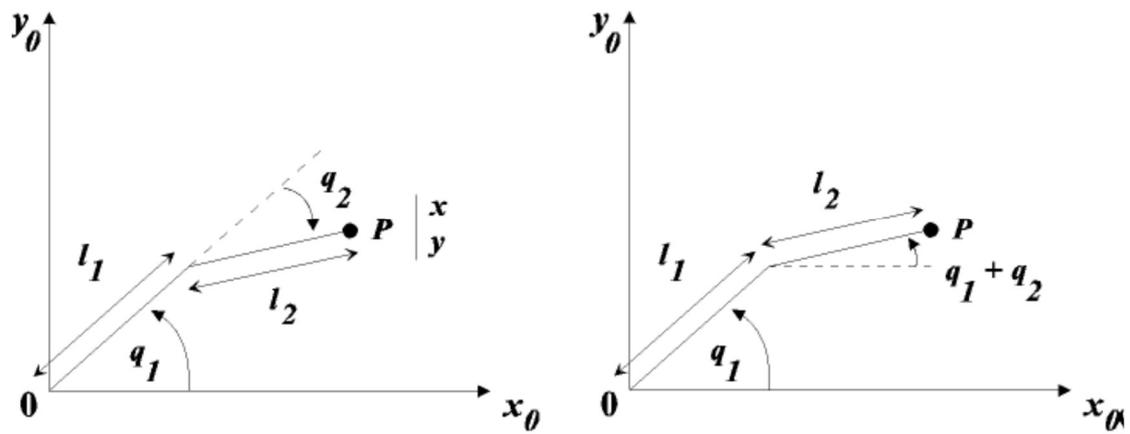
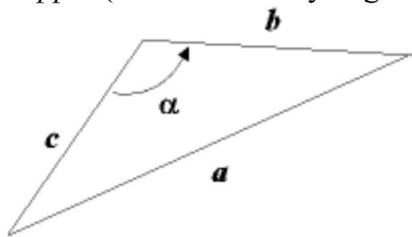


Fig. 5 : Manipulateur RR évoluant dans un plan.

soit un système de 2 équations à 2 inconnues.

Une démarche analytique, procédant par substitution, permet de déterminer le modèle géométrique inverse.

*Rappel* (Théorème de Pythagore généralisé) :



$$\text{On a : } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

Complétons le schéma du modèle géométrique direct :

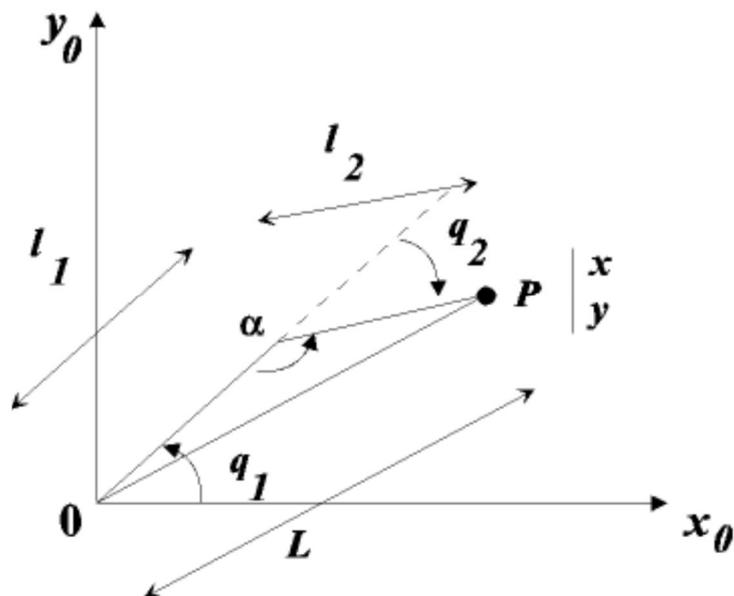


Fig. 6 : Description mathématique du manipulateur.

On a les relations suivantes :

$$L^2 = x^2 + y^2$$

$$\text{Et } L^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2 l_1 l_2 \cos(\alpha)$$

Avec  $\alpha = \pi + q_2$  (d'après le théorème de Pythagore généralisé),

D'où  $x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2 l_1 l_2 \cos(q_2)$  (on a  $\cos(\pi+a) = -\cos(a)$ ), soit

$$\cos(q_2) = [x^2 + y^2 - (l_1^2 + l_2^2)] / 2 l_1 l_2$$

Sachant que  $\cos(q) = a$  avec  $a \in [-1, 1] \Rightarrow q = \pm \text{Arcos}(a)$ , il en résulte que

$$q_2 = \pm \text{Arcos} \left\{ [x^2 + y^2 - (l_1^2 + l_2^2)] / 2 l_1 l_2 \right\}, \text{ sous réserve que}$$

$$-1 \leq [x^2 + y^2 - (l_1^2 + l_2^2)] / 2 l_1 l_2 \leq 1$$

**Remarques :**

- La condition  $-1 \leq [x^2 + y^2 - (l_1^2 + l_2^2)] / 2 l_1 l_2 \leq 1$  indique que la position du point  $P$  doit être atteignable.
- Lorsque  $q_2$  est positif (resp., négatif), le robot a une posture *coude bas* (resp., *coude haut*), voir figure ci-dessous.

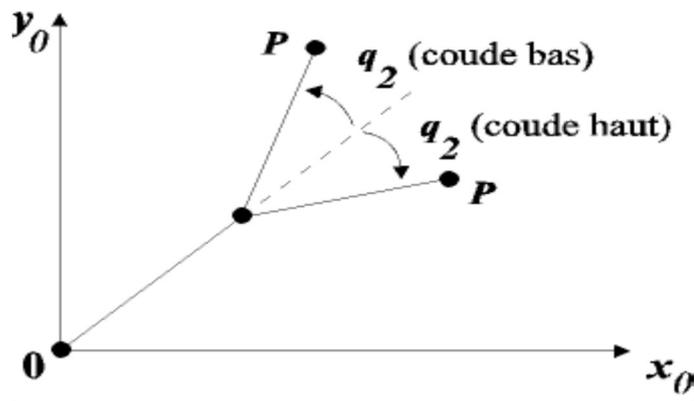


Fig. 7 : Caractéristique Coude bas/Coude haut.

**Méthode de Paul**

Dans le cas de robots à géométrie simple (pour lesquels la plupart des distances  $d_j$  et  $r_j$  sont nulles et les angles  $\theta_j$  et  $\alpha_j$  sont égaux à  $0, \pm \pi/2$ ), le modèle géométrique inverse (M.G.I.) peut être obtenu analytiquement *via* la méthode de Paul.

**Présentation**

Considérons le robot décrit par la matrice de transformation suivante :

$$T_{0,n} = T_{0,1}(q_1) \times T_{1,2}(q_2) \times \dots \times T_{n-1,n}(q_n)$$

Soit  $U_0$  la situation du repère  $R_n$  (lié à l'organe terminal) décrit par :

$$U_0 = \begin{pmatrix} S_x & N_x & A_x & P_x \\ S_y & N_y & A_y & P_y \\ S_z & N_z & A_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le MGI est obtenu en résolvant l'équation matricielle :

$$U_0 = T_{0,1}(q_1) \times T_{1,2}(q_2) \times \dots \times T_{n-1,n}(q_n)$$

La méthode de Paul permet la détermination de  $q_1$ , puis  $q_2$  et ainsi de suite jusqu'à  $q_n$ . Il s'agit de déplacer l'une après l'autre chacune des variables articulaires ( $q_1, q_2, \dots, q_n$ ) dans le membre de gauche de l'équation. Pour cela, on multiplie par  $T_{j, j-1}$  (en prenant successivement  $j=1, \dots, n$ ) de part et d'autre dans l'équation.

## Le MGI des robots série

### Techniques utilisées

Méthode classique (1970-1980)

- Utilisable par la plupart des robots industriels
- Résolution simple, utilisation de modèle de résolution

Méthode algébrique (Raghavan et Roth 1990)

- Technique de l'élimination dialytique

Méthode numérique (Newton)

- Quand on ne sait pas faire
- Problème de l'unicité des solutions

### Méthode classique

1- Développer l'ensemble des équations possibles

$$H_X = H_{0,1} \cdot H_{1,2} \cdot H_{2,3} \cdot H_{3,4} \cdot H_{4,5} \cdot H_{5,6}$$

$$H_{1,0} \cdot H_X = H_{1,2} \cdot H_{2,3} \cdot H_{3,4} \cdot H_{4,5} \cdot H_{5,6}$$

$$H_{2,1} \cdot H_{1,0} \cdot H_X = H_{2,3} \cdot H_{3,4} \cdot H_{4,5} \cdot H_{5,6}$$

$$H_{3,2} \cdot H_{2,1} \cdot H_{1,0} \cdot H_X = H_{3,4} \cdot H_{4,5} \cdot H_{5,6}$$

$$H_{4,3} \cdot H_{3,2} \cdot H_{2,1} \cdot H_{1,0} \cdot H_X = H_{4,5} \cdot H_{5,6}$$

$$H_{5,4} \cdot H_{4,3} \cdot H_{3,2} \cdot H_{2,1} \cdot H_{1,0} \cdot H_X = H_{5,6}$$

Avec  $H_{i,j}^{-1} = H_{j,i}$

2- On constate que beaucoup d'équations ont la même forme

3- On utilise des formules de type ci-après pour résoudre

Pour l'équation  $X \sin \alpha + Y \cos \alpha = Z$  :

$$\cos \alpha = \frac{YZ - \varepsilon X \sqrt{X^2 + Y^2 - Z^2}}{X^2 + Y^2}$$

$$\sin \alpha = \frac{XZ + \varepsilon Y \sqrt{X^2 + Y^2 - Z^2}}{X^2 + Y^2}$$

Avec  $\varepsilon = + / - 1$

### Remarques

- Si le poignet est d'axes concourants (rotule), la résolution est plus simple.
- De la même façon, si la chaîne cinématique possède 3R à axes concourants ou 3 articulations prismatiques (q. q. soit leurs positions) le MGI est simplifié.
- Le nombre de solutions du MGI d'un robot à 6 liaisons varie mais  $\leq 16$ . (16 pour RRRRRR)

### Méthode Algébrique, Générale pour un robot à 6 liaisons

1- On utilise les formules suivantes pour obtenir des équations algébriques

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

2- On utilise une méthode d'élimination algébrique pour éliminer 5 variables parmi les 6

3- On obtient un polynôme de degré 16

4- Les racines de ce polynôme nous fournissent les solutions

### Méthode Numérique (pour les cas à problèmes)

On utilise un schéma de Newton multivarié :  $X_{k+1} = X_k - J^{-1}(X_k)F(X_k)$

Avec  $F = [f_1, \dots, f_n]^T$ ,  $X = [X_1, \dots, X_n]^T$  et  $J$  la jacobienne du système défini par :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

**Attention ! ne fournit qu'une seule solution**