Université de Batna2

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département de Mathématiques

Laboratoire de Mathématiques appliquées

Cours: Statistiques prévisionnelles

Méthodes de lissage exponentiel pour la prévision

1.1 Introduction

Un des objectifs principaux de l'étude d'une série temporelle est la prévision des réalisations futures. Les méthodes de lissage exponentiel ont ét'e introduites par Holt en 1958, Winters en 1960 et popularisées par le livre de Brown en (1963) constituent l'ensemble des techniques empiriques de prévision à court terme qui supposent que le phénomène étudié ne dépend que de ses valeurs passée. Ces méthodes sont largement diffusées et utilisées. Leur succés est dû à la fois à leur simplicité et à la qualité des prévisions obtenues.

1.2 Rappel

Définition 1.1. Une série temporelle (ou série chronologique) à temps discret est une suite finie d'obeservations réelles indexées par le temps t

1.2.1 Composantes et modèles d'une série chronologique

a-Une série temporelle peut se composer de :

- une tendance T_t,
- une composante cyclique C_t,
- une composante saisonnière S_t,
- une composante résiduelle ε_t (partie aléatoire).

b- On peut distiguer deux modèles présentants une série chronologique.

- Le modèle additif :

  Ce modèle est défini par

$$X_t = T_t + C_t + S_t + \varepsilon_t$$

- Le modèle multiplicatif :

  est un modèle donné par

$$X_t = T_t \times C_t \times S_t \times \varepsilon_t.$$

1.2.2 Tendances et composantes saisonnières

Définition 1.2. On dit que la série admet une tendance si on peut écrire

$$X_t = f(t) + \varepsilon_t$$

-Si $f(t) = a + bt$, on dit que la tendance est linéaire.
-Si $f(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i t^i$, on dit que la tendance est polynomiale.
Si $f(t) = a + bt + S_t$ avec s une composante saisonnière, on dit que la série a une tendance saisonnìere de période s.

1.3 Prévision par Les méthodes de lissage exponentiel

Ce sont des méthodes d'extrapolation qui donnent un poids prépondérant aux valeurs récentes : les coefficients de pondération décroissent exponentiellement en remontant dans le temps ; Chacune des méthodes dépend d'un ou plusieurs paramètres (paramètres de lissage) compris entre0 et 1; Le poid de chacune des valeurs passées se calcule à partir de ces paramètres.Nous présentons trois types de lissage exponentiel :

- Le lissage exponentiel simple qui consiste à ajuster localement à la série temporelle une constante.
- Le lissage exponentiel double qui ajuste quant à lui une droite.
- Le lissage exponentiel de Holt-Winters qui considère des fonctions plus complexes (polynomiales, périodiques...).

1.4 Lissage exponentiel simple(LES)

On suppose que l'on dispose de T observations $X_1, ..., X_T$ indexées par les instants $1, ..., T$. On veut réaliser une prédiction pour les instants suivantes $T + k$, $k \geq 1$. Le lissage exponentiel simple est bien adapté au cas où la série a une moyenne approximativement constante au voisinage de T.

pour ce type de lissage, On considère le modèle suivant

$$X_t = a + \varepsilon_t$$

avec ε_t est le terme erreur du modèle et a est une constante .

Définition 1.3. La prévision de la série à l'horizon $h, \hat{X}_T(h)$, fournie par la méthode de lissage exponentiel simple est donnée par

$$\hat{X}_T(h) = (1-\beta)\sum_{j=0}^{T-1}\beta^j X_{T-j}(h), 0 < \beta < 1$$

où β est dite constante de lissage.

Remarque 1.1. 1.La prévision est une moyenne de toutes les observations passées, pondérée de sorte à ce que plus l'observation soit ancienne moins elle ait d'importance.

3.$\hat{X}_T(h)$ est indépend de h alors elle peut être notée par $\hat{X}_T$.

Propostion 1.1. *$\hat{X}_T(h)$ est la meilleure prévision obtenue en minimimisant la quantité suivante:*

$$\sum_{j=0}^{T-1} (X_{T-j}(h) - a)^2$$

.

Démonstration 1. *(En exercice)*

1.4.1 Formule de mise à jour

pour raison de simplifier les calculs la formule de la prévision a été mise à jour. En effet, on a

$$\beta \hat{X}_{T-1} = (1-\beta) \sum_{j=0}^{T-2} \beta^{j+1} X_{T-(j+1)} = (1-\beta) \sum_{j=1}^{T-1} \beta^j X_{T-j}$$

et

$$\hat{X}_T = (1-\beta) \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j X_{T-j} = (1-\beta) X_t + \beta \hat{X}_{T-1} + (1-\beta) \sum_{j=0}^{T-2} \beta^{j+1} X_{T-(j+1)}$$

Par conséquent

$$\hat{X}_T = (1-\beta) X_T + \beta \hat{X}_{T-1}$$

et l'erreur de la prévision est donnée par

$$e_T = \hat{X}_T - \beta \hat{X}_{T-1} = (1-\beta) X_t$$

Remarque 1.2. On peut calculer $\hat{X}_T$ à partir de la formule de mise à jour de LES en initialisant $\hat{X}_1 = \hat{X}_0(1) =$ à X_1

Exemple 1.1. On considère la série (X_t) suivante

t	1	2	3	4	5	6
X_t	2700	2950	2660	2980	3010	3140

1) prédire la valeur $\hat{X}_7$ pour la constante de lissage $\beta = 0.3$.

Corrigé

on applique la formule de mise à jourde LES, on obtient

$\hat{X}_1 = \hat{X}_0(1) = X_1 = 2700$

$\hat{X}_2 = \hat{X}_1(1) = (1 - 0.3) \times 2700 + .3 \times 2700 = 2700$

$\hat{X}_3 = \hat{X}_2(1) = (1 - 0.3) \times 2950 + .3 \times 2700 = 2875$

$\hat{X}_4 = \hat{X}_3(1) = (1 - 0.3) \times 2660 + .3 \times 2875 = 2724.5$

$\hat{X}_5 = \hat{X}_4(1) = (1 - 0.3) \times 2980 + .3 \times 2724.5 = 2903.35$

$\hat{X}_6 = \hat{X}_5(1) = (1 - 0.3) \times 3010 + .3 \times 2903.35 = 2978.005$

$\hat{X}_7 = \hat{X}_6(1) = (1 - 0.3) \times 3140 + .3 \times 2978.005 = 3091.402$

t	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{X}_T$	2700	2700	2875	2724.5	2903.35	2978.005	3091.402

1.4.2 Choix de la constante de lissage

Un problème important en pratique est le choix du β qui est en général trés subjectif et varie selon le contexte de l'étude et/ou le type de prévision souhaité. En pratique, si on veut une prévision rigide, on choisira $\beta \in [0.7; 0.99]$.

si on veut une prévision souple, on choisira $\beta \in [0.01; 0.3]$.

si on ne sait pas, une autre solution, dictée par les données, consiste à choisir β comme la solution qui minimise

$$\sum_{\left[\frac{T-h}{2}\right]}^{T-1}\left(X_{T+h}-\hat{X}_T(h)\right)^2$$

On repète cette opération pour plusieurs valeurs de β, et on choisit celle la plus petite erreur.

1.4.3 Choix de la valeur initiale

Le choix de la valeur initiale X_1 a d'autant plus d'importance que β est proche de zéro et que la série est courte. On a les possibilités suivantes:

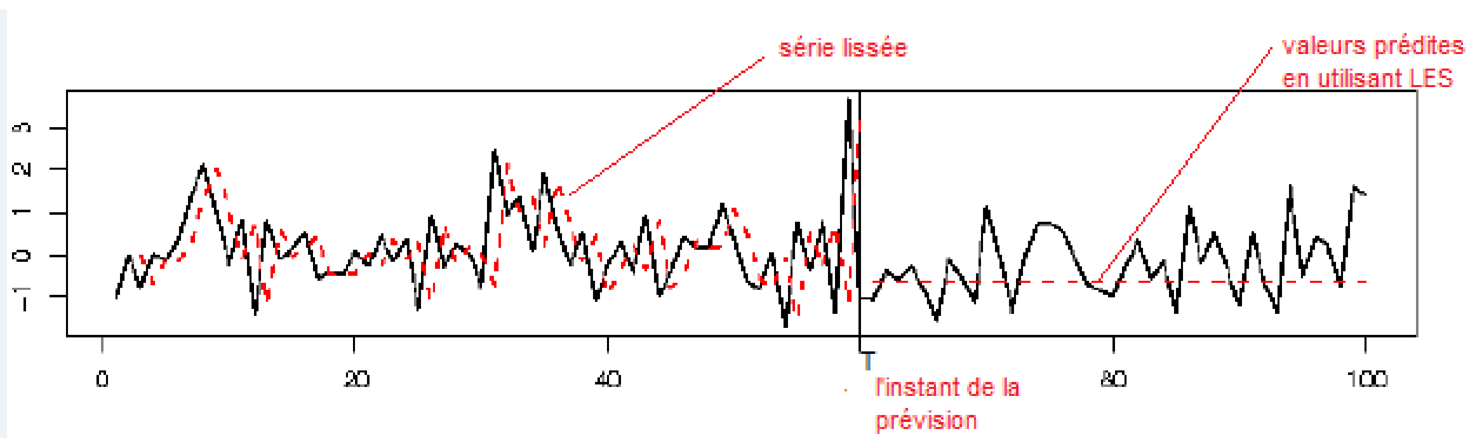
1) Prendre X_1 égle à la valeur initiale de la série dans le cas où cette dérnière est très fluctuante.

2) Prendre pour X_1 la moyenne de toutes les données; c'est surtout adéquat pour une série qui varie autour d'une valeur constante.

3) Prendre pour X_1 la moyenne de quelques premières données; si on a un compromis entre 1) et 2)

1.4.4 Représentation graphique de la prévision $\hat{X}_T(h)$

Graphiquement $\hat{X}_T(h)$ est une droite, d'ajustement au voisinage de l'instant T, d'équation$y_t = cste$.



1.5 Lissage exponentiel double

On suppose que la série peut être approximée par une droite au voisinage de T et on considère le Modèle

$$X_t = a + b(t-T) + \varepsilon_t,$$

pour tout h, Notons que a et b dépendent de t. On cherche à déterminer les valeurs des deux paramètres en minimisant la fonction suivante:

$$\sum_{j=0}^{T-1} \beta^j \left(X_{T-j}(h) - (a-bj)\right)^2$$

Propostion 1.2. *La prévision de la série à l'horizon $h, \hat{X}_t(h)$, fournie par la méthode de lissage exponentiel double est donnée par*

$$\hat{X}_T(h) = \hat{a}(T) + \hat{b}(T)h$$

où β est la constante de lissage et le couple $(\hat{a}(T), \hat{b}(T))$ est donné par

$$S_1(t) = (1-\beta)\, X_{t-1} \sum_{j=0}^{t-1} \beta^j X_{t-j}, S_2(t) = (1-\beta) \sum_{j=0}^{t-1} \beta^j S_1(t-j),$$

et $\begin{cases} \hat{a}(T) = \frac{1-\beta}{\beta}(S_1(T) - S_2(T)) \\ \hat{b}(T) = 2S_1(T) - S_2(T) \end{cases}$ *telles que*

$$S_1(T) = (1-\beta)\, X_{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j X_{T-j}, S_2(T) = (1-\beta) \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j S_1(T-j),$$

Démonstration 2. *les valeurs de $\hat{a}(T)$ et $\hat{b}(T)$ sont obtenues au moyen de la méthode des moindres carrés en en minimisant le critère*

$$Q(a(T), b(T) = \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j (X_{T-j} - a(T) + b(T)j)^2$$

En annulant les dérivées par rapport à $a(T)$ et $b(T)$, on obtient

$$\begin{cases} 2\sum_{j=0}^{T-1} \beta^j (X_{T-j} - a(T) + b(T)Tj) = 0 \\ 2\sum_{j=0}^{T-1} \beta^j (X_{T-j} - a(T) + b(T)j)j = 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j X_{T-j} - a(T) \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j + b(T) \sum_{j=0}^{T-1} j\beta^j = 0 \\ \sum_{j=0}^{T-1} j\beta^j X_{T-j} - a(T) \sum_{j=0}^{T-1} j\beta^j + b(T) \sum_{j=0}^{T-1} j^2\beta^j = 0 \end{cases}$$

on a

$$\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j = \frac{1}{1-\beta}, \sum_{j=0}^{\infty} j\beta^j = \frac{\beta}{(1-\beta)^2}, \sum_{j=0}^{\infty} j^2\beta^j = \frac{\beta(1+\beta)}{(1-\beta)^3}$$

ce qui entraîne

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j X_{T-j} - aT\frac{1}{1-\beta} + \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j + bT\frac{\beta}{(1-\beta)^2} = 0 \\ \sum_{j=0}^{T-1} j\beta^j X_{T-j} - aT\frac{\beta}{(1-\beta)^2} + \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j + bT\frac{\beta(1+\beta)}{(1-\beta)^3} = 0 \end{cases}$$

On note par $S_1(T)$ le premier lissage de la série (X_T) suivant:

$$(1-\beta)\sum_{j=0}^{T-1} \beta^j X_{T-j}$$

et par$S_2(T)$ le double lissage de la série (X_T) (c-à-d) le premier lissage de $S_1(T$

$$\begin{aligned} S_2(T) &= (1-\beta)\sum_{j=0}^{T-1} \beta^j S_1(T-j) \\ &= (1-\beta)\sum_{j=0}^{T-1} \beta^j (1-\beta) \sum_{i=0}^{T-1-j} \beta^j X_{T-j-i} \\ &= (1-\beta)^2 \sum_{j=0}^{T-1} \sum_{i=0}^{T-1-j} \beta^{j+1} X_{T-j-i} \\ &= (1-\beta)^2 \sum_{K=0}^{T-1} (k+1)\beta^k X_{t-k} \\ &= (1-\beta)^2 \sum_{K=0}^{T-1} k\beta^k X_{t-k} + (1-\beta)S_1(T) \end{aligned}$$

on obtient finalement

$$\sum_{K=0}^{T-1} k\beta^k X_{t-k} = \frac{S_2(T)}{(1-\beta)^2} - \frac{S_1(T)}{(1-\beta)}$$

et

$$\begin{cases} \frac{S_1(T)}{(1-\beta)} - a(T)\frac{1}{1-\beta} + \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j + b(T)\dfrac{\beta}{(1-\beta)^2} = 0 \\ \frac{S_2(T)}{(1-\beta)^2} - \frac{S_1(T)}{(1-\beta)} - a(T)\frac{\beta}{(1-\beta)^2} + \sum_{j=0}^{T-1} \beta^j + b(T)\dfrac{\beta(1+\beta)}{(1-\beta)^3} = 0 \end{cases}$$

en résolvant le système en obtient

$$\begin{cases} \hat{a}(T) = 2S_1(T) - S_2(T) \\ \hat{b}(T) = \frac{(1-\beta)}{\beta}(S_1(T) - S_2(T)) \end{cases}$$

1.5.1 Formule de mise à jour

Comme $S_1(T), S_2(T)$ sont les premiers lissages de X_T et $S_1(T)$ (respectivement), alors d'aprés la formule de mise à jourde LES, on a

$$\begin{aligned} S_1(T) &= (1-\beta)X_T + \beta S_1(T-1) \\ S_2(T) &= (1-\beta)S_1(T) + \beta S_2(T-1) \\ &= \beta S_2(T-1) + (1-\beta)\left[\beta S_1(T-1) + (1-\beta)X_T\right] \\ &= \beta S_2(T-1) + \beta(1-\beta)S_1(T-1) + (1-\beta)^2 X_T. \end{aligned}$$

On voit que

$$\begin{aligned}
a(T) &= 2S_1(T) - S_2(T) \\
&= (1-\beta^2)X_T + \beta^2[\hat{a}(T-1) + \hat{b}(T-1)] \\
&= (1-\beta^2)X_T + \beta^2(\hat{X}_{T-1}) \\
&= \hat{a}(T-1) + \hat{a}(T-1) + (1-\beta^2)\left[X_T - \hat{X}_{T-1}(1)\right] \\
&= \hat{X}_{T-1}(1) + (1-\beta^2)\left[X_T - \hat{X}_{T-1}\right]
\end{aligned}$$

Exemple 1.2. Dans le tableau ci-dessou, on donne la série chronologique représentant le prix moyen mensuel d'un certain produit durant lannée 2020

mois	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
	54.23	51.51	55.60	55.72	58.71	58.82	58.41	64.92	63.95	72.98	70.25	68.24

-Prédire le prix moyen du produit en mois de janvier de l'année 2021, pour $\beta = .7$.

on effectue d'abord un premier lissage en utilisant la formule de mise ̀jour

$$S_1(T) = (1-\beta)X_T + \beta S_1(T-1)$$

et on initialise $S_1(1)$ à X_1

On obtient : $S_1(1) = X1 = 54.23$,

$S_1(2) = (1-\beta)X_2 + \beta S_1(1) = 0.3 \times (51.51) + 0.7 \times 54.23 = 53.414$,

$S_1(3) = (1-\beta)X_3 + \beta S_1(2) = 0.3 \times 55.60 + 0.7 \times 53.41 = 54.070$,

⁝⁝ Ensuite, on effectue un premier lissage à la série lissée $S_1(T)$ moyennant la formule de mise à jour-suivante

$$S_2(T) = (1-\beta)S_1(T) + \beta S_2(T-1)$$

avec $S_2(1) = S_1(1)$

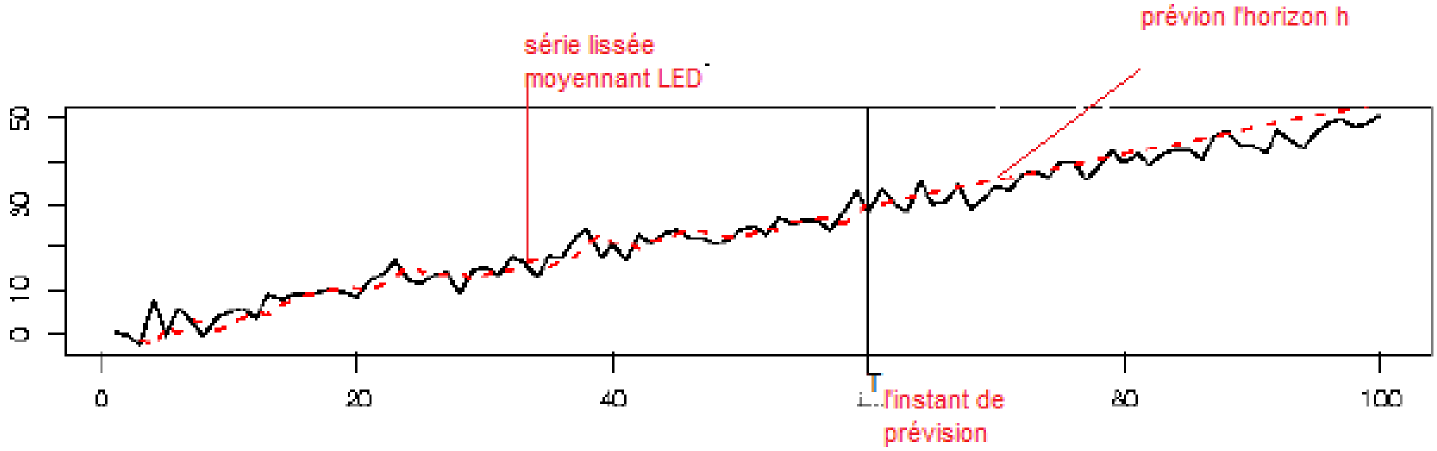
et on calcule

$$\hat{X}_T(1) = \hat{a}(1) + \hat{b}(1)$$

Année	mois	X_t	S_1	S_2	$\hat{a}(T)$	$\hat{b}(T)$	$\hat{X} = \hat{a}(T) + \hat{b}(T)$
2020	j	54.23	54.23	54.23	54.23	0	54.23
	F	51.51	54.23	54.23	54.23	0	54.23
	M	55.60	53.41	54.23	52.60	-0.350	52.25
	A	55.72	54.07	53.99	54.15	0.036	54.19
	M	58.71	54.56	54.01	55.12	0.238	55.36
	J	58.82	55.81	54.18	57.44	0.699	58.14
	J	58.41	56.71	54.67	58.76	0.877	59.63
	A	64.92	57.22	55.28	59.16	0.832	59.99
	S	63.95	59.53	55.86	63.20	1.572	64.77
	O	72.98	60.86	56.96	64.75	1.669	66.42
	N	70.25	64.49	58.13	70.86	2.727	73.58
	D	68.24	66.22	60.04	72.40	2.649	75.05
2021	J		73.01	63.93	82.08	3.889	85.97

1.5.2 Représentation graphique de la prévision $\hat{X}_T(h)$

Graphiquement $\hat{X}_T(h)$ est une droite, d'ajustement au voisinage de l'instant $t = T$, d'équation$y_t = a_t + b_t(h)$.


prévion l'horizon h
série lissée
moyennant LED
50
30
10
0
0
20
40
l'instant de
prévision
80
100

1.6 Méthode de Holt-Winters

Holt et Winters ont proposé une approche un peu différente au problème du lissage exponentiel.

1.6.1 Méthode non saisonnière

Holt et Winters ajustent aussi une droite au voisinage de T (comme dans le lissage exponentiel double).

Les formules de mise à jourdes coefficients sont toutefois différentes :

$$\begin{aligned}
\hat{a}_1(T) &= (1-\alpha)X_T + \alpha\left[\hat{a}(T-1) + \hat{b}(T-1)\right] \\
&= (1-\alpha)X_T + \alpha\hat{X}_{T-1} \\
\hat{a}_2(T) &= (1-\gamma)\left[\hat{a}(T) + \hat{(}b)(T-1)\right] + \gamma\hat{b}(T-1) \\
&= \hat{b}(T-1) + (1-\gamma)\left[\hat{a}(T) - \hat{a}(T-1) - \hat{b}(T-1)\right]
\end{aligned}$$

avec γ est une constante de lissage.

Ces deux formules sont Les prévisions associées sont :

$$\hat{X}_T(h) = \hat{a}(T) + h\hat{b}(T)$$

les valeurs initiales sont

$$\hat{a}(2) = X_2, \hat{b}(2) = X_2 - X_1$$

Remarque 1.3. Comme le lissage exponentiel double est un cas particulier de la méthode non saisonnière alors la formule de mise à jourde LED peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned}
\hat{a}(T) &= (1-\beta)^2 X_T + \beta^2[\hat{a}(T-1) + \hat{b}(T-1)] \\
\hat{b}(T) &= \hat{b}(T-1) + \frac{(1-\beta)^2}{1-\beta^2}\left[\hat{a}(T) - \hat{a}(T-1) - \hat{b}(T-1)\right]
\end{aligned}$$

1.6.2 Méthodes saisonnières additives

On suppose que la série peut etre approximée au voisinage de T par

$$a + (t - T)b + S_t$$

ou S_t est la composante saisonnière de période s. Prenant la période

$s = 4$ pour desdonnées trimestrielles,

$s = 12$ pour desdonnées mensuelles,

les formule de mise à jour adaptées pour ce cas sont données par

$$\begin{aligned}
\hat{a}(T) &= (1-\alpha)(X_t - \hat{S}_{T-s} + \alpha\left[\hat{a}(T-1) + \hat{b}(T-1)\right] \\
\hat{b}(T) &= (1-\gamma)\left[\hat{a}(T) - \hat{a}(T-1)\right] + \gamma\hat{b}(T-1) \\
\hat{S}_T &= (1-\delta)[X_T - \hat{a}(T)] + \delta\hat{S}_{T-s}.
\end{aligned}$$

où $0 < \alpha < 1, 0 < \gamma < 1et0 < \delta < 1$, dòu la prévision

$$\hat{X}_T(h) = \hat{a}(T) + h\hat{b}(T) + \hat{S}_{T+h-s}, \text{ si } 1 \leq h \leq s \tag{1.1}$$

$$= \hat{a}(T) + h\hat{b}(T) + \hat{S}_{T+h-2s}, \text{ si } s < h \leq 2s. \tag{1.2}$$

les valeurs initiales sont choisies comme suit

pour s=4

$$
\begin{aligned}
\hat{a}(3) &= \frac{1}{8}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3 + \frac{1}{4}X_4 + \frac{1}{8}X_5 \\
\hat{a}(4) &= \frac{1}{8}X_2 + \frac{1}{4}X_3 + \frac{1}{4}X_4 + \frac{1}{4}X_5 + \frac{1}{8}X_6 \\
\hat{b}(4) &= \hat{a}(4) - \hat{a}(3) \\
\hat{S}_4 &= X_4 - \hat{a}(4) \\
\hat{S}_3 &= X_3 - \hat{a}(3) \\
\hat{S}_2 &= X_2 - \hat{a}(3) + \hat{b}(4) \\
\hat{S}_1 &= X_1 - \hat{a}(3) + 2b(4).
\end{aligned}
$$

1.6.3 Méthode saisonnière multiplicative

On cherche à approximer X_t par une tendance de la forme $[a + (t - T)b]S_t$.

***Les formule de mise à jour**

Les formules de mise à joursont :

$$
\begin{aligned}
\hat{a}(T) &= (1-\alpha)\frac{X_t}{\hat{S}_{T-s}} + \alpha\left[\hat{a}(T-1) + \hat{b}(T-1)\right] \\
\hat{b}(T) &= (1-\gamma)\left[\hat{a}(T) - \hat{a}(T-1)\right] + \gamma\hat{b}(T-1) \\
\hat{S}_T &= (1-\delta)\frac{X_T}{\hat{a}(T)} + \delta\hat{S}_{T-s}.
\end{aligned}
$$

où $0 < \alpha < 1, 0 < \gamma < 1 et 0 < \delta < 1$, dòu la prévision

$$
\begin{aligned}
\hat{X}_T(h) &= \left[\hat{a}(T) + h\hat{b}(T)\right]\hat{S}_{T+h-s}, \text{ si } 1 \leq h \leq s \\
&= \left[\hat{a}(T) + h\hat{b}(T)\right]\hat{S}_{T+h-2s}, \text{ si } s < h \leq 2s.
\end{aligned}
$$