REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Batna2
Faculté de Technologie
Département de Génie Mécanique

DYNAMIQUE DES FLUIDES

« Cours pour Masters »

Dr. Dalila TITOUNA
Maitre de Conférences 'A'

Table des matières

Chapitre I : GÉNÉRALITÉS

1 - Définitions

1.1 Fluide : C’est un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler c.à.d. subir de grandes variations de forme sous l’action de force même très faibles, il peut être considéré comme étant formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. Parmi les fluides, on distingue les liquides et les gaz.

1.2 Mécanique des fluides : C’est la partie des sciences physiques qui étudie le comportement des fluides au repos ou en mouvement. C’est l’étude de l’équilibre et des mouvements des fluides c.à.d. de leurs déplacements et de leurs déformations en fonction du temps, ainsi que les conditions qui les entraînent.

2 – Propriétés.

2.1 Isotropie: Les fluides habituellement étudiés sont isotropes, leurs propriétés sont identiques dans toutes les directions de l'espace.

2.2 Mobilité: Les fluides sont mobiles, ils n'ont pas de forme propre, ils prennent la forme du récipient qui les contient.

2.3 Viscosité : En se déformant les fluides qui ne résistent pas sont parfaits, non visqueux (idéaux), ceux qui résistent sont visqueux (réels).

2.4 Compressibilité: C’est la résistance des fluides au changement de volume, les liquides occupent un volume déterminé et sont considères incompressibles, les gaz occupent le volume maximal qui leur est offert et sont considérés compressibles.

3 - Force de surface et force de volume.

Comme tout problème de mécanique, la résolution d'un problème de mécanique des fluides passe par la définition du système matériel S, particules de fluide à l'intérieur d'une surface fermée limitant **S**. À ce système on applique les principes et théorèmes généraux de mécanique et thermodynamique :

- Principe de la conservation de la masse.

- Principe fondamental de la dynamique.
- Principe de la conservation de l'énergie.

Les forces extérieures qui agissent sur les particules situés à l'intérieur de **S** sont :

- Les forces de surface (proportionnelles aux éléments de surface) appliquées uniquement sur les particules de la surface **S** (Forces de pression) ;

- Les forces de volume (proportionnelles aux éléments de volume) exercent des actions à distance (Forces de pesanteur).

4 - Application de la mécanique des fluides:

La mécanique des fluides est d'une grande importance dans de nombreux domaines, en plus des problèmes de statique dont les principaux : l'étude des instruments de mesure de pression et des corps flottants. Elle s'intéresse généralement à deux types d'écoulements : les écoulements externes utiles dans la conception des profils aérodynamiques et les écoulements internes utiles dans la conception des systèmes de combustion, de refroidissement, d'hydraulique…..Ainsi elle intègre plusieurs branches délimitant des champs d'application distincts telles que:

- En hydraulique on traite les lois d'équilibre dont les courants sont dirigés et limités par des parois solides ;

- En gazodynamique on trouve des applications dans l'aviation moderne, les fusés ou les tubes à choc ;

- En aérodynamique on s'intéresse au mouvement d'un corps solide dans l'air.

5- Définitions relatives aux écoulements.

5.1. Ecoulements permanents ou stationnaires : Un écoulement est stationnaire ou permanents si toutes les variables de l'écoulement en chaque point sont indépendantes du temps, dans le cas contraire l'écoulement est instationnaire ou non permanents.

5.2. Ecoulements bidimensionnels : C'est un écoulement qui dépend de deux variables tels que les écoulements plans ou les écoulements de révolution.

5.3. Source ou puits : Une source est un point de l'espace d'où le fluide sort avec un débit constant.

Un puits est un point dans lequel le fluide rentre avec un débit constant (source négative).

5.4. Débits massiques et débits volumiques :

Le débit massique à travers une surface S est défini par la quantité :

$$\boldsymbol{q_m = \iint_s \rho\, (\vec{V}.\vec{n})\, ds = \iint_s \rho\, V_n\, ds}$$

Où : $\boldsymbol{\rho}$ est la masse volumique.

$\boldsymbol{V_n}$ est la projection de la vitesse sur la normale à dS

Le débit volumique à travers une surface S la quantité :

$$\boldsymbol{q_v = \iint_s (\vec{V}.\vec{n})\, ds \iint_s V_n\, ds}$$

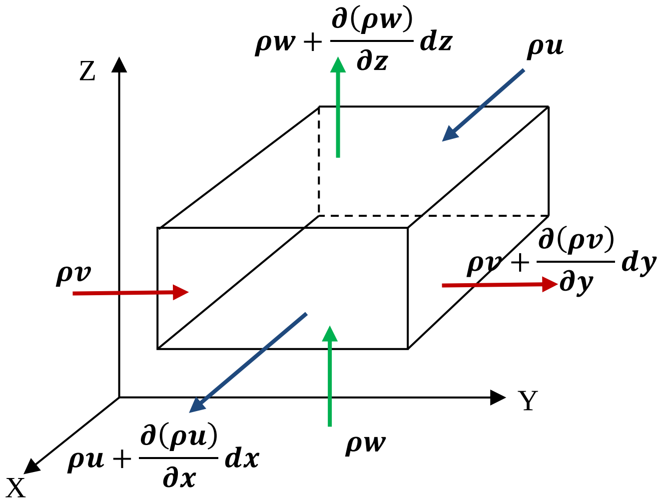
5.5. Dérivée particulaire : En suivant une particule de fluide dans son mouvement et en tenant compte de la variation spatiale et temporelle, on utilise ce type de dérivée :

$$\frac{D.}{Dt} = \frac{\partial.}{\partial t} + u\frac{\partial.}{\partial x} + v\frac{\partial.}{\partial y} + w\frac{\partial.}{\partial z} = \frac{\partial.}{\partial t} + \vec{V}.\vec{\nabla}..$$

5.6. Volume de contrôle : c'est une région dans l'écoulement perméable où le fluide passe librement à travers sa surface.

6. Equation de continuité :

Elle traduit le principe de **conservation de la masse**. L'augmentation de la masse pendant un certain temps, du fluide contenu dans un volume donné, doit être égale à la somme des masses du fluide qui y entrent, diminuée de celles qui y sortent.



6.1 Forme différentielle :

Pour deux faces du parallélépipède on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, dx\, dy\, dz)\, dt = (\rho u\, dy\, dz\, dt)_x - (\rho u\, dy\, dz\, dt)_{x+dx} + \sum \rho q_v\, dx\, dy\, dz\, dt$$

Soit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx\, dy\, dz\, dt = \rho u\, dy\, dz\, dt - \left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx\right) dy\, dz\, dt + dx\, dy\, dz\, dt \sum \rho q_v$$

La même démonstration sera refaite pour les autres faces, après simplification on obtient l'équation de continuité :

$$\boldsymbol{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \sum \rho q_v}$$

où

$$\boldsymbol{\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{V}) = \sum \rho q_v}$$

où

$$\boldsymbol{\frac{D\rho}{\partial t} + \rho \vec{\nabla}.\vec{V} = \sum \rho q_v}$$

$\boldsymbol{q_v}$ étant le débit de source ou du puits par unité de volume.

Cas particuliers :

- Si l'écoulement est permanent l'équation de continuité devient :

$$\boldsymbol{\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \sum \rho q_v}$$

- Si le fluide est incompressible, écoulement permanent ou non l'équation devient :

- $$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \sum q_v}$$

- Si l'écoulement est conservatif (ni apparition, ni disparition du fluide), permanent, et le fluide est incompressible, l'équation devient :

$$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}$$

6.2 Forme intégrale :

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\rho\vec{V}\right) dv = 0$$

D'après le théorème de Green-Ostrogradsky, on a :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \iint_S \rho\left(\vec{V}.\vec{n}\right) ds = 0$$

L'équation de continuité sous forme intégrale devient :

$$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho\, dv + \iint_S \rho\left(\vec{V}.\vec{n}\right) ds = 0}$$

7. Application :

Un jet d'eau de diamètre d (S_1) sort d'un réservoir percé en bas de diamètre D (S_2). Si on suppose que la vitesse d'écoulement dans le jet est donnée par : $\boldsymbol{V_2 = \sqrt{2gh}}$
La masse volumique et la vitesse sont uniformes à travers les surfaces. Déterminer le temps de vidange du réservoir.

<u>Solution</u> :

L'équation de continuité sous forme intégrale est :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho\, dv + \int_S \rho\left(\vec{V}.\vec{n}\right) ds = 0$$

Le premier terme de cette équation est :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho\, dv = \rho \cdot S_1 \cdot \frac{dh}{dt}$$

Le deuxième terme de cette équation est :

$$\int_{S_1} \rho(\vec{V}_1 \cdot \vec{n})ds + \int_{S_2} \rho(\vec{V}_2 \cdot \vec{n})ds = -\rho \cdot V_1 \cdot S_1 + \rho \cdot V_2 \cdot S_2 = \rho \cdot \sqrt{2gh} \cdot S_2$$

D'où : $$\rho \cdot S_1 \cdot \frac{dh}{dt} + \rho \cdot \sqrt{2gh} \cdot S_2 = 0$$

$$\int_0^t dt = \frac{S_1}{S_2\sqrt{2g}} \int_h^0 \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

Le temps de vidange du réservoir sera donc : $\boldsymbol{t = \frac{2.S_1.h}{S_2.\sqrt{2gh}}}$

Chapitre II : DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS

1. Définition.

C'est l'étude de mouvement des fluides parfaits (sans frottements, fluides non visqueux ou fluides idéaux).

2. Equations de quantité de mouvement :

Le taux de variation de quantité de mouvement par rapport au temps d'une particule, est égal à la résultante de toutes les forces extérieures qui s'exercent sur la particule de fluide.

2.1. Forme différentielle :

Afin d'obtenir les équations de dynamique des fluides parfaits, on divise tous les termes des équations de la statique des fluides vues précédemment par ρ, et on ajoute le terme accélération on obtient :

$$\begin{cases} f_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} = \gamma_x \\ f_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} = \gamma_y \\ f_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} = \gamma_z \end{cases}$$

Sous forme vetorielle $\vec{\gamma} = \vec{F} - \dfrac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}\,P$

or $\vec{\gamma} = \dfrac{D\vec{V}}{Dt}$

Ces équations peuvent être ecrites :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + f_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + f_y$$

Sous forme vetorielle $\dfrac{D\vec{V}}{Dt} = -\dfrac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \vec{F}$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + f_z$$

Ces équations sont appelées : **Equations d'Euler**

2.2. Forme Intégrale :

On définie la quantité de mouvement d'un élément de fluide compris dans un volume par :

$$I_v = \int_v \rho\vec{V}\,dv$$

D'après la seconde loi de Newton on a :

$$\frac{DI_v}{Dt} = \sum F_{ext}$$

On obtient ainsi les équations sous forme intégrale :

$$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial t}\int_v \rho\vec{V}\,dv + \int_s \rho\vec{V}\left(\vec{V}.\vec{n}\right)ds = \int_s P ds + \int_v \rho\vec{f}\,dv}$$

3. Equation de Bernoulli :

D'apres les équations d'Euler :

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \vec{F}$$

Or $\dfrac{D\vec{V}}{Dt} = \dfrac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\vec{\nabla}V^2 + \vec{\nabla}\Lambda\overrightarrow{V\Lambda V}$

On etudie uniqement les ecoulements dans le champ de pesanteur

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P - \vec{\nabla}(gz)$$

d'où $\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\vec{\nabla}V^2 + \vec{\nabla}\Lambda\overrightarrow{V\Lambda V} = -\vec{\nabla}(gz) - \dfrac{1}{\rho}\vec{\nabla}P$

Si le fluide est incompressible $\boldsymbol{\rho = Cte}$

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla}\Lambda\overrightarrow{V\Lambda V} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\left(P + \rho\,g\,Z + \frac{\rho V^2}{2}\right)$$

Si l'écoulement est permanent $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$ et irrotationnel $\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = 0$, on obtient l'équation de Bernoulli :

$$P + \rho\, g\, Z + \frac{\rho V^2}{2} = Cte$$

Ce théoreme exprime la conservation de l'énergie mécanique totale.

4. Interprétations du théorème de Bernoulli

4.1. Bilan énergétique :

On peut écrire ce théorème ainsi :

$$\frac{P_1}{\rho} + g\, Z_1 + \frac{V_1^2}{2} = \frac{P_2}{\rho} + g\, Z_2 + \frac{V_2^2}{2} \qquad [\mathrm{J/Kg}]$$

Les termes présents sous cette forme peuvent bien être interprétés en énergie :

- Le terme $\frac{V^2}{2}$ est un terme d'énergie cinétique par kg de fluide.
- Le terme gZ est un terme d'énergie potentielle de position par kg de fluide.
- Le terme $\frac{P}{\rho}$ est aussi un terme d'énergie potentielle de pression par kg de fluide.

4.2. Bilan des pressions :

C'est la présentation du théorème telle qu'obtenue dans la démonstration :

$$P_1 + \rho\, g\, Z_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} = P_2 + \rho\, g\, Z_2 + \frac{\rho V_2^2}{2} \qquad [\mathrm{J/m^3}]$$

En particulier, on appelle :

- Le terme $P + \rho\, g\, Z$ **pression statique** ou énergie potentielle par m^3 de fluide.
- Le terme $\frac{\rho V^2}{2}$ **pression dynamique** ou énergie cinétique par m^3 de fluide.

4.3. Bilan des hauteurs :

La dernière forme de ce théorème est :

$$\frac{P_1}{\rho g} + Z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 + \frac{V_2^2}{2g} \qquad [\mathbf{J/N} \text{ ou } \mathbf{m}]$$

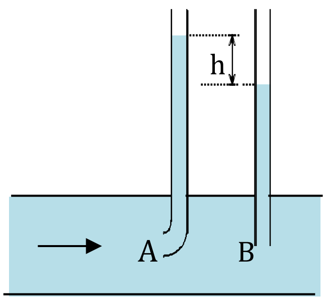
- Le terme $\frac{P}{\rho g}$ est une **hauteur manometrique**.
- Le terme $\frac{P}{\rho g} + Z$ est une **hauteur piézométrique**
- Le terme Z est une altitude.
- Le terme $\frac{\rho V^2}{2}$ est une **hauteur capable**.
- La somme des trois termes est **la charge totale**, ou encore **la hauteur manométrique équivalente.**

5. Application du Théorème de Bernoulli :

5.1. Tube de Pitot :

On considère un liquide en écoulement permanent dans une canalisation et deux tubes plongeant dans un liquide, l'un débouchant en A face au courant, et l'autre en B est le long des lignes de courant, les deux extrémités étant à la même hauteur. Au point B, le liquide a la même vitesse V que dans la canalisation et la pression est la même que celle du liquide $P_B = P$.

En A, point d'arrêt, la vitesse est nulle et la pression totale est P_A.



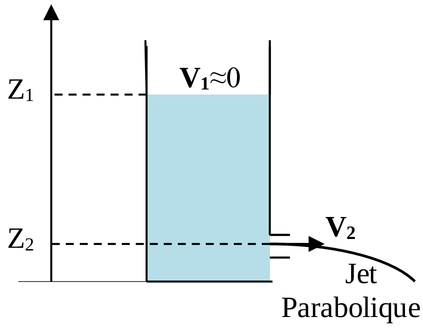
D'après le théorème de Bernoulli,

$$P_B + \frac{1}{2}\rho V^2 = P_A \qquad \text{Soit} \qquad \frac{1}{2}\rho V^2 = \rho g h$$

En mesurant la dénivellation h du liquide dans les deux tubes, on peut en déduire la vitesse V d'écoulement du fluide.

5.2. Écoulement d'un liquide contenu dans un réservoir - Théorème de Torricelli

Considérons un réservoir muni d'un petit orifice à sa base, de section s et une ligne de courant partant de la surface S au point 1 et arrivant à l'orifice au point 2. En appliquant le théorème de Bernoulli entre les points 1 et 2 :



$$P_1 + \rho\, g\, Z_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} = P_2 + \rho\, g\, Z_2 + \frac{\rho V_2^2}{2}$$

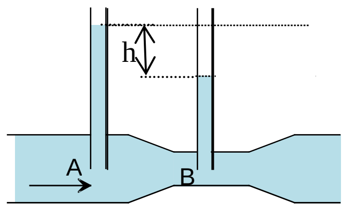
Or $P_1 = P_2 = P_{atm}$ et V_1 négligeable ($S \gg s$)

D'où $V_2 = \sqrt{2gz}$ appelé aussi vitesse de Torricelli.

5.3. Phénomène de Venturi

Un conduit de section principale S_A subit un étranglement en B où sa section est S_B. La vitesse d'un fluide augmente dans l'étranglement, donc sa pression y diminue : $V_B > V_A \Rightarrow P_B < P_A$

Le théorème de Bernoulli s'écrit : $P_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho V_B^2$



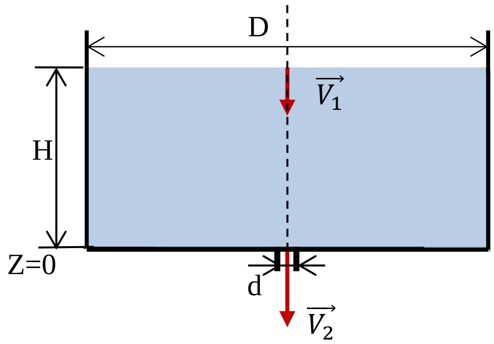
D'après l'équation de continuité : $q_v = V_A S_A = V_B S_B$

D'où : $P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{1}{S_B^2} - \frac{1}{S_A^2}\right) q_v^2$

La différence de pression aux bornes du tube de Venturi est proportionnelle au carré du débit ; application à la mesure des débits (organes déprimogènes).

6. Application :

On considère un réservoir cylindrique de diamètre intérieur D = 2 m rempli d'eau jusqu'à une hauteur H = 3 m. Le fond du réservoir est muni d'un orifice de diamètre d = 10 mm permettant d'évacuer l'eau.



Si on laisse passer un temps très petit dt, le niveau d'eau H du réservoir descend d'une quantité dH.

$V_1 = dH/dt$

1) Donner l'expression de V_1 en fonction de V_2, D et d.
2) On suppose que le fluide est parfait et incompressible, établir l'expression de la vitesse d'écoulement V_2 en fonction de g, H, D et d.
3) On suppose que le diamètre d est négligeable devant D. Calculer la vitesse V_2. En déduire le débit volumique q_v

Solution

1) Equation de continuité : $\frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot V_1 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot V_2$

Donc la vitesse $V_1 = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \cdot V_2$

2) Equation de Bernoulli **:** $P_1 + \rho\, g\, Z_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} = P_2 + \rho\, g\, Z_2 + \frac{\rho V_2^2}{2}$

Or $P_1 = P_2 = P_{atm}$

L'équation de Bernoulli devient : $\frac{(V_2^2 - V_1^2)}{2} - g\,H = 0$

En substituant l'expression de la vitesse dans cette équation on aura : $V_2 = \sqrt{\frac{2gH}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4}}$

3) Si $\left(\frac{d}{D}\right) \ll 1$ $V_2 = \sqrt{2gH}$ **A.N :** $\boldsymbol{V_2 = 7.67\, m/s}$

$q_v = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot V_2$ **A.N :** $\boldsymbol{q_v = 6 \cdot 10^{-4}\, m^3/s}$

Chapitre III : DYNAMIQUE DES FLUIDES REELS

1. Définition

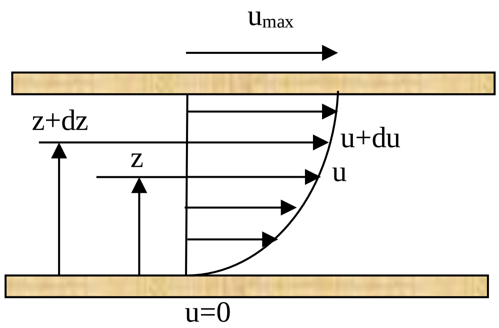
C'est l'étude de mouvement des fluides réels (fluides visqueux).

2. Viscosité

Sous l'effet des forces d'interaction entre les molécules de fluide et celles de la paroi, chaque molécule de fluide ne s'écoule pas à la même vitesse.

On dit qu'il existe un **profil de vitesse :**

Si on représente par un vecteur, la vitesse de chaque particule située dans une section droite perpendiculaire à l'écoulement d'ensemble, la courbe lieu des extrémités de ces vecteurs représente le profil de vitesse.



Le mouvement du fluide peut être considéré comme résultant du glissement des couches de fluide les unes sur les autres. La vitesse de chaque couche est une fonction de la distance z de cette courbe au plan fixe : v = v(z).

2.1 Viscosité dynamique

Considérons 2 couches contiguës distantes de dz.

La force de frottement F qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre. Elle est proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit du, à leur surface S et inversement proportionnelle à dz :

$$\boldsymbol{F = -\mu\, S\, \frac{du}{dz}}$$

Le facteur de proportionnalité **μ est le coefficient de viscosité dynamique** du fluide.

Dimensions de la viscosité dynamique :

Dans le système international (**SI**) est : Le **Pa·s** ou **Poiseuille** (Pl) : $1\ Pl = 1\ kg{\cdot}m^{-1}{\cdot}s^{-1}$

Dans le système d'unités (**CGS**) : Le **Poise** (Po) ;   1 Pl = 10 Po

On est conduit à considérer deux types de fluides:

1. D'une part **les fluides newtoniens** qui satisfont à la loi de Newton, ce qui implique une relation linéaire entre force de viscosité et gradient de vitesses. C'est le cas des gaz, des vapeurs, des liquides purs de faible masse molaire.

2. D'autre part **les fluides non-newtoniens**. Ce sont les solutions de polymères, les purées, les gels, les boues, le sang, la plupart des peintures, etc … L'étude de ces fluides relève de la rhéologie : fluides pseudo plastiques, rhéoplastiques, thixotropiques, rhéopectiques.

2.2 Viscosité cinématique :

Dans de nombreuses formules apparaît le rapport de la viscosité dynamique η et de la masse volumique ρ.Ce rapport est appelé **viscosité cinématique ν** : $\boldsymbol{\nu = \frac{\mu}{\rho}}$

Dimensions de la viscosité cinématique :

Dans le système international (SI), l'unité est :   (m^2/s).

Dans le système CGS, l'unité est le Stokes (St) : 1 $m^2/s = 10^4$ St.

La viscosité des liquides diminue lorsque la température augmente. Contrairement à celle des liquides, la viscosité des gaz augmente avec la température.

3. Fluide réel

Un fluide est dit réel si, pendant son mouvement, les forces de contact ne sont pas perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquelles elles s'exercent (elles possèdent donc des composantes tangentielles qui s'opposent au glissement des couches fluides les unes sur les autres). Cette résistance est caractérisée par la viscosité.

4. Equations de Navier Stokes

Les équations qui régissent les écoulements des fluides visqueux sont issues des équations d'Euler, appliquées à un fluide réel dont la viscosité n'est pas nulle, appelées les **équations de Navier Stokes.**

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \nu\nabla^2\vec{V}$$

Pour un fluide newtonien et incompressible on a :

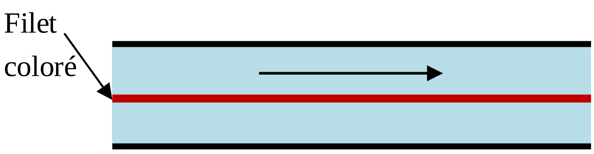
Ou bien :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} = f_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} = f_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} = f_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \end{cases}$$

5. Regime d’ecoulement et nombre de Reynolds

Les expériences réalisées par Reynolds en1883 lors de l'écoulement d'un liquide dans une conduite cylindrique rectiligne dans laquelle arrive également un filet de liquide coloré, ont montré l'existence de deux régimes d'écoulement : régime laminaire et régime turbulent :

- **Régime laminaire :**

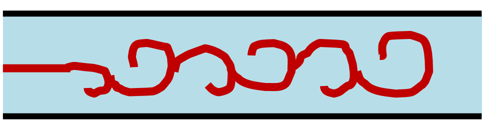
Les filets fluides sont des lignes régulières, sensiblement parallèles entre elles.



Ecoulement laminaire

- **Régime turbulent :**

Les filets fluides s’enroulent sur eux-mêmes.



Ecoulement turbulent
Vue instantanée

Ecoulement turbulent
Vue en pose

En utilisant divers fluides à viscosités différentes, en faisant varier le débit et le diamètre de la canalisation, Reynolds a montré que le paramètre qui permettait de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds donné par l'expression suivante :

$$\boldsymbol{Re = \frac{V.D}{\nu} = \frac{\rho.V.D}{\mu}}$$

$\boldsymbol{V}$: Vitesse moyenne d'écoulement à travers la section considérée en (m/s).

$\boldsymbol{D}$: Diamètre de la conduite ou largeur de la veine fluide en (m).

$\boldsymbol{\nu}$: Viscosité cinématique du fluide (m^2/s).

$\boldsymbol{\mu}$: Viscosité dynamique du fluide (kg/m.s).

$\boldsymbol{\rho}$: masse volumique du fluide (kg/m^3).

Si $\boldsymbol{R_e \leq 2300}$ l'écoulement est laminaire.

Si $\boldsymbol{2300 < R_e \leq 4.10^4}$ l'écoulement est turbulent lisse.

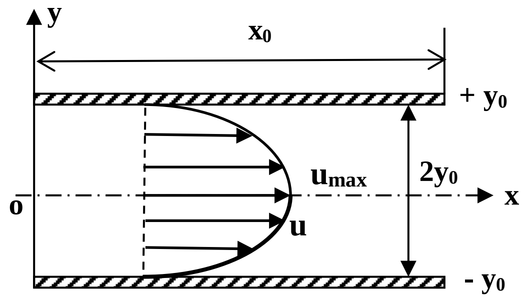
Si $\boldsymbol{R_e > 4.10^4}$ l'écoulement est turbulent rugueux.

6. Solutions des équations de Navier Stokes :

Les équations de N.S sont complexes, des solutions analytiques ne peuvent être obtenues que pour certaines configurations simples. On se propose d'etudier quelques exemples classiques :

6.1 Ecoulement entre deux plaques planes parallèles :

Avec : longueur $\mathbf{x_0}$, largeur $\mathbf{z_0}$



Considérons un fluide incompressible en écoulement permanent, le régime étant laminaire, les lignes de courant sont, par raison de symétrie parallèles à ox, donc les composantes de la vitesse v = w = 0.

L'écoulement étant horizontal, les forces de pesanteur sont négligeables.

L'équation de continuité se réduit à :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = u(y)$$

Les équations de Navier Stokes en coordonnées cartésiennes s'écrivent :

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} \\ 0 = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} \end{cases}$$

Des deux dernières équations on tire : $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial P}{\partial z} \quad \Longrightarrow \quad P = P(x)$

Les équations de N.S se réduisent à :

$$\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} = \nu\frac{d^2u}{dy^2} \qquad \Longrightarrow \qquad u(y) = \frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}y^2 + Ay + B$$

Conditions d'adhérence à la paroi pour $y = \pm y_0$; $u = 0$

Si $\Delta P = P|_{x=0} - P|_{x=x_0}$ est la différence de pression qui s'exerce aux extrémités des plaques.

La répartition de la vitesse a pour expression :

$$u(y) = \frac{y_0^2}{2\mu}\frac{\Delta P}{x_0}\left[1 - \left(\frac{y}{y_0}\right)^2\right]$$

Pour $y = 0$, $u = u_{max}$

La vitesse maximale est : $u_{max} = \dfrac{y_0^2}{2\mu}\dfrac{\Delta P}{x_0}$

Le débit volumique est donné par :

$$q_v = \int_{-y_0}^{+y_0} u\, z_0 dy = \frac{2z_0 y_0^3}{3\mu}\left(\frac{\Delta P}{x_0}\right)$$

Or

$$q_v = 2\, y_0\, z_0\, \bar{u}$$

D'où la vitesse moyenne est : $\bar{u} = \dfrac{y_0^2}{3\mu}\left(\dfrac{\Delta P}{x_0}\right) = \dfrac{2}{3}u_{max}$

$$Re = \frac{\bar{u}D_H}{\nu}$$

Le nombre de Reynolds :

Le diamètre hydraulique est donné par : $D_H = \frac{4S}{P}$

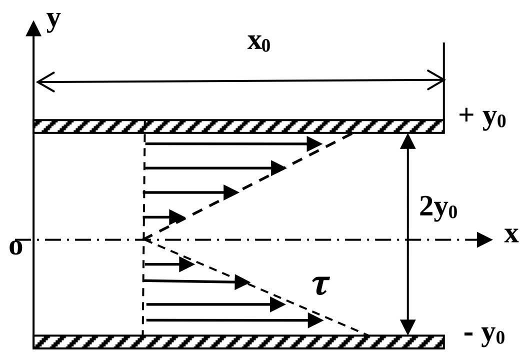
Où : S : surface de passage ; P : périmètre mouillé

Si $y_0 \ll z_0$:

$$D_H = \frac{4\, y_0\, z_0}{2y_0 + z_0} \cong 4\, y_0$$

$$Re = \frac{\bar{u} D_H}{\nu} = \frac{4\, y_0\, \bar{u}}{\nu}$$

La force de frottement par unité de surface ou contrainte est donnée par : $\tau = \mu \frac{du}{dy}$



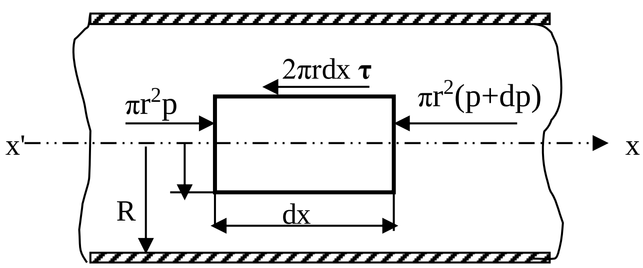
La contrainte à la paroi est :

$$\tau_p = \mu \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=y_0} = \mu \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=-y_0} = y_0 \left(\frac{\Delta P}{x_0}\right)$$

6.2 Ecoulement de Poiseuille:

C'est un écoulement laminaire dans une conduite cylindrique de section circulaire constante.

Considérons un fluide incompressible en écoulement permanent.



Soit un élément cylindrique centré sur l'axe, de rayon r et de longueur dx, projetons son équation d'équilibre sur l'axe x'x :

$$\pi r^2 p - \pi r^2 (p + dp) + 2\pi r dx \cdot \tau = 0$$

D'où on tire : $$\tau = \frac{r}{2} \cdot \frac{dp}{dx}$$

Or $\tau = \mu \dfrac{du}{dr}$

$\dfrac{dp}{dx}$ est constant dans la section considérée et indépendante de r

On pose : $\dfrac{dp}{dx} = -\dfrac{\Delta P}{l}$

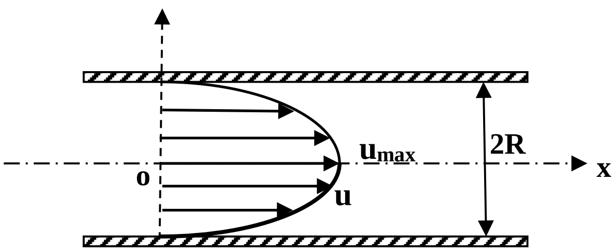
Avec l : la longueur de la conduite.
ΔP : La chute de pression ou perte de charge sur la longueur l.

D'où : $$\frac{du}{dr} = -\frac{r}{2\mu} \cdot \frac{\Delta P}{l} \Rightarrow du = -\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{\Delta P}{l}\, r dr$$

Répartition des vitesses : $$u = -\frac{1}{4\mu} \cdot \frac{\Delta P}{l}\, r^2 + A$$

La vitesse est nulle à la paroi : $r = R$, $u = 0$

D'où : $u = \dfrac{1}{4\mu} \cdot \dfrac{\Delta P}{l} (R^2 - r^2)$ représentant un paraboloïde de révolution.



Pour $r = 0$, $u = u_{max}$

La vitesse maximale est : $$u_{max} = \frac{1}{4\mu} \cdot \frac{\Delta P}{l} R^2$$

La contrainte à la paroi est : $$\tau_p = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta P}{l} r$$

Au centre : $\tau_p = 0$

A la paroi : $$\tau_p = -\frac{R}{2} \cdot \frac{\Delta P}{l}$$

Le débit volumique est :

$$q_v = \int_0^R \frac{1}{4\mu} \cdot \frac{\Delta P}{l} (R^2 - r^2) \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi}{2\mu} \cdot \frac{\Delta P}{l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr$$

$$q_v = \frac{\pi}{8\mu} \cdot \frac{\Delta P}{l} R^4 = \frac{\pi}{128\mu} \cdot \frac{\Delta P}{l} D^4$$

La vitesse moyenne est : $u_m = \frac{q_v}{\pi R^2} = \frac{1}{8\mu} \cdot \frac{\Delta P}{l} R^2 = \frac{u_{max}}{2}$

7. Pertes de charges

7.1. Pertes de charges linéaires :

Les pertes de charges linéaires sont dues au frottement du fluide sur les parois solides, elles dépendent du régime d'écoulement, laminaire ou turbulent. Pour une conduite de longueur L et de diamètre D les pertes de charges linéaires sont données par :

$$J_L = \lambda \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} \quad (m) \qquad \text{ou} \qquad \Delta P_L = \lambda \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho V^2}{2} \quad (Pa)$$

Où J_L: Pertes de charges linéaires en mètres ou joules par newton.
ΔP_L: Pertes de charges linéaires en pascales ou joules par mètre cube.
λ: Coefficient de pertes de charges linéaires (sans dimension).
V : Vitesse moyenne.
L : Longueur de la conduite.
D : Diamètre de la conduite.

a- Écoulements laminaires :

pour les regimes laminaires $\boldsymbol{R_e \leq 2300}$ dans des conduites circulaires, le coefficient de pertes de charges est donné par la formule de Poiseuille : $\boldsymbol{\lambda} = \frac{64}{\mathrm{R_e}}$

Pour les conduites non circulaires on a :

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{R_e}}$$

K dépend du type et des dimensions des conduites.

b- Écoulements turbulents :

Si $\mathbf{2300} < R_{\mathbf{e}} \leq \mathbf{4.10^4}$ l'écoulement est turbulent lisse.

Formule de Blasius : $\lambda = \frac{0.316}{\mathrm{R_e^{0.25}}}$

Formule de Prandtl : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\log\left(\mathrm{R_e}\sqrt{\lambda}\right) - 0.8$

Si $\mathbf{R_e > 4.10^4}$ l'écoulement est turbulent rugueux.

Relation de Karman-Nikuradse : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\log\left(\frac{\mathrm{D}}{2\varepsilon}\right) + 1.74$

Formule de Blench : $\lambda = 0.790\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mathrm{D}}}$

c- Loi générale des pertes de charge : Cette loi est valable pour le régime turbulent lisse et le régime turbulent rugueux ainsi que dans la zone de transition entre les deux régimes, elle est donnée par Colebrook-White :

$$\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{\lambda}}} = -\mathbf{2}\,\mathbf{log}\left(\frac{\mathbf{2.51}}{\mathbf{R_e}\sqrt{\boldsymbol{\lambda}}} + \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{3.71\,D}}\right)$$

7.2. Pertes de charges singulières :

Les pertes de charge singulières ou locales sont causées par la présence de singularités, sur le chemin d'un écoulement (élargissements et rétrécissements brusques et graduels, coudes, clapets, vannes, appareils de mesure de débits...) et peuvent s'exprimer par la relation :

$J_s = \xi\,\frac{V^2}{2g} \quad (m)$ ou $\Delta P_s = \xi\,\frac{\rho.V^2}{2} \quad (Pa)$

Où ξ est le coefficient de pertes de charges singulières (sans dimension), il dépend du type de singularité.

8. Théorème de Bernoulli généralisé pour un fluide réel

Lors de l'écoulement d'un fluide réel entre deux points 1 et 2, il peut y avoir des échanges d'énergie entre ce fluide et le milieu extérieur :

- Par pertes de charge dues aux frottements du fluide sur les parois et les différentes singularités.

Le théorème de Bernoulli s'écrit alors :

$$\frac{P_1}{\rho\, g}+\frac{V_1^2}{2g}+Z_1=\frac{P_2}{\rho\, g}+\frac{V_2^2}{2g}+Z_2+J_L+\sum \xi\ \frac{V^2}{2g}$$

- Par échange de l'énergie avec cette machine sous forme de travail ΔW pendant une durée Δt.

La puissance P échangée est : $P=\frac{\Delta W}{\Delta t}$

P en watt (W) ; W en joule (J) ; t en seconde (s).

- **P > 0** si l'énergie est reçue par le fluide (ex. : pompe) ;
- **P< 0** si l'énergie est fournie par le fluide (ex. : turbine).

Si le débit volumique est q_v, la relation de Bernoulli généralisée s'écrit alors :

$$\frac{1}{2}\rho\left(V_2^2-V_1^2\right)+\rho g\,(Z_2-Z_1)+(P_2-P_1)=\frac{P}{q_v}-\rho g.J_l-\sum \xi\ \frac{\rho V^2}{2}$$

9. Application :

Une pompe à essence de rendement η = 67,4% et de débit volumique q_v=0,629 l/s assure, le remplissage d'un réservoir d'automobile. La pompe aspire l'essence (ρ = 750 kg/m3 et μ = 0,0006 Pa.s) à partir d'une grande citerne dont la surface libre située à une altitude Z_1 ($V_1 \approx 0$)

La pompe refoule l'essence, à une altitude Z_2, sous forme d'un jet cylindrique, en contact avec l'atmosphère à une pression P_2 = Patm = 1 bar, se déversant dans le réservoir de l'automobile à une vitesse V_2. La différence des cotes entre la section de sortie de la conduite et la surface libre de la citerne est $H= Z_2- Z_1 = 2$m.

La conduite a une longueur L = 3,32 m et un diamètre d = 2 cm.

1) Déterminer la vitesse d'écoulement V_2 de l'essence dans la conduite.

2) Déterminer la nature de l'écoulement.

3) En déduire la perte de charge linéaire J_{12}.

4) Calculer la puissance Pa sur l'arbre de la pompe.

<u>Solution</u> :

1) Vitesse d'écoulement :

$$V_2 = \frac{4 \cdot q_v}{\pi \cdot d^4}$$ **A.N :** $\boldsymbol{V_2 = 2\, m/s}$

2) Nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho . V . D}{\mu}$$ **A.N :** $\boldsymbol{Re = 50000}$

3) $\boldsymbol{2300 < R_e \leq 4.10^4}$ donc il s'agit d'un écoulement turbulent lisse

Formule de Blasius : $\boldsymbol{\lambda} = 0.316 \cdot \mathrm{R_e^{-0.25}}$ **AN :** $\boldsymbol{\lambda} = 0.0211$

Perte de charge linéaire :

$$J_{12} = \lambda \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$$ AN : $J_{12} = 0.71m$

4) Equation de Bernoulli :

$$\frac{1}{2}\rho(V_2^2 - V_1^2) + \rho g\,(Z_2 - Z_1) + (P_2 - P_1) = \frac{\eta \cdot P_a}{q_v} - \rho g . J_l$$

Or $V_1 = 0$ et $Z_2 - Z_1 = H$

A.N : $\mathrm{P_a} = 20\mathrm{W}$