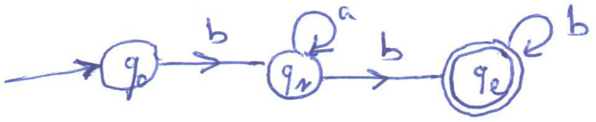
3.15) les expression régulières et les AEF

Théorème : pour tout AEF A, il existe une expression régulière E qui représente le langage reconnu par cet automate.

exemple :



le langage reconnu par cet AEF est représenté par l'expression régulière ba^*bb^*

Remarque : il existe plusieurs méthodes qui permettent de trouver l'expression régulière qui représente le langage reconnu par un AEF.

3.15.1 la méthode basée sur le théorème d'ARDEN

* Définition :

- le langage reconnu à partir d'un état q d'un AEF est donné par l'expression régulière qui représente l'ensemble des mots générés à partir de cet état.

on écrit :

$$L(q) = \left\{ w \in X^* / (q, w) \vdash^* (q_F, \varepsilon) \right\}$$

exemple : selon l'AEF ci-dessus, on a :

$$L(q_2) = b^*$$

$$L(q_1) = a^* b b^*$$

$$L(q_0) = b a^* b b^*$$

Remarques :

1/ le langage reconnu par un AEF A est le langage reconnu par ses états initiaux $q_i \in I$

donc : $L(A) = \sum L(q_i)$

tel que I est l'ensemble des états initiaux

2/ Soit q un état non co-accessible $\Rightarrow L(q) = \phi$

* la détermination de l'expression régulière du langage à partir d'un AEF se fait par la résolution du système d'équations associé

associé à l'AEF.

- <u>le système d'équations associé à un AEF</u>

on associe à un AEF, un système d'équations comme suit :

Soit $w \in X^*$: <u>si</u> $\delta(q_i, w) = q_j$ <u>alors</u> on écrit $L(q_i) = w.L(q_j)$

<u>si</u> $q_i \in F$ <u>alors</u> on écrit $L(q_i) = \varepsilon$

<u>si</u> $L(q_i) = \alpha$ et $L(q_i) = \beta$ <u>alors</u> on écrit $L(q_i) = \alpha + \beta$

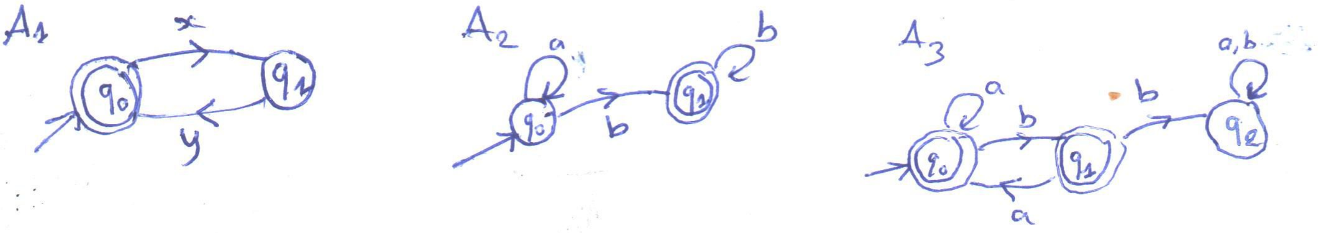
- <u>la résolution d'un système d'équations</u>

cette résolution <u>se base</u> sur les substitutions et <u>fait intervenir</u> le théorème ~~suivant~~ de Arden

l'équation $\boxed{L(q_i) = A.L(q_i) + B}$

la solution de cette équation est : $\boxed{L(q_i) = A^*B}$

<u>exemple</u> : trouver l'expression régulière de chacun des langages reconnus par ces AEF.



* le système d'équations de A_1 :

$$\begin{cases} L(q_0) = x.L(q_1) + \varepsilon & \rightarrow (1) \\ L(q_1) = y\,L(q_0) & \rightarrow (2) \end{cases}$$

- l'expression régulière est donnée par $L(q_0)$
- pour appliquer le théorème d'ARden, on remplace (2) dans (1) on trouve : $L(q_0) = x.y\,L(q_0) + \varepsilon$

- En appliquant le théorème de Arden, on trouve $L(q_0) = (xy)^*.\varepsilon$
$= (xy)^*$

* le système d'équations de A_2 :
$$\begin{cases} L(q_0) = a.L(q_0) + b.L(q_1) \longrightarrow ① \\ L(q_1) = b.L(q_1) + \varepsilon \longrightarrow ② \end{cases}$$

- à partir de ② : on trouve $L(q_1) = b^*.\varepsilon = b^*$
- ① devient $L(q_0) = aL(q_0) + bb^*$
- l'expression régulière est donnée par $L(q_0) = a^*bb^*$
$= a^*b^+$

* le système d'équations de A_3 :
$$\begin{cases} L(q_0) = a.L(q_0) + b.L(q_1) + \varepsilon \longrightarrow ① \\ L(q_1) = a.L(q_0) + b.L(q_2) + \varepsilon \longrightarrow ② \\ L(q_2) = aL(q_2) + bL(q_2) \longrightarrow ③ \end{cases}$$

- à partir de ③, on trouve $L(q_2) = (a+b)^*.\phi = \phi$
donc l'état q_2 est non co-accessible, voir l'AEF A_3

- ② devient $L(q_1) = a.L(q_0) + b.\phi + \varepsilon$
$= aL(q_0) + \phi + \varepsilon = aL(q_0) + \varepsilon \longrightarrow ④$

- on remplace ④ dans ① ; on trouve
$$L(q_0) = a.L(q_0) + b.(aL(q_0) + \varepsilon) + \varepsilon$$
$$= a.L(q_0) + baL(q_0) + b + \varepsilon$$
$$= \underbrace{(a+ba)}L(q_0) + \underbrace{b+\varepsilon}$$

- l'expression régulière est donnée par $L(q_0) = (a+ba)^*(b+\varepsilon)$
$= (a+ba)^*b + (a+ba)^*$

Remarque : moins l'automate contient d'états, moins son système contient d'équations, d'où l'avantage de réduire les AEF.

Théorème : pour toute grammaire régulière à gauche G_1, il existe une grammaire régulière à droite G_2 qui engendre le même langage $\boxed{L(G_1) = L(G_2)}$ (voir chapitre 3)

3.16) les AEF et les grammaires régulières

pour toute grammaire régulière à droite G, il existe un AEF qui reconnait le même langage L(G) et réciproquement pour tout AEF ayant un seul état intial, il existe une grammaire régulière à droite qui engendre le même langage L(A)

- le principe de correspondance entre les AEF et les grammaires régulières à droite est donné comme suit :

- l'axiome S de la grammaire $\leftrightarrow$ l'unique état intial de l'AEF
- les symboles non terminaux de la grammaire $\leftrightarrow$ les états de l'AEF
- les règles de production de la grammaire $\leftrightarrow$ les transitions ou les états finaux

c'est à dire : $\forall\ A, B \in N,\ w \in X^*$

$$A \to wB \quad \leftrightarrow \quad (A) \xrightarrow{w} (B)$$

$$A \to \varepsilon \quad \leftrightarrow \quad ((A))$$

Remarque: on remplace toutes les règles de la forme $\boxed{A \to u}$ tel que $u \in X^+$ par $\boxed{\begin{array}{l} A \to uZ \\ Z \to \varepsilon \end{array}}$

avec Z est le nouveau symbole non terminal donc Z correspond à un état final.

exemple :

(48)

- trouver l'AEF associé à cette grammaire régulière généralisée à droite

$S \to aS \mid A$

$A \to bbA \mid aS \mid abB \mid b$

$B \to aB \mid bB \mid \varepsilon$

Correction : cette grammaire devient

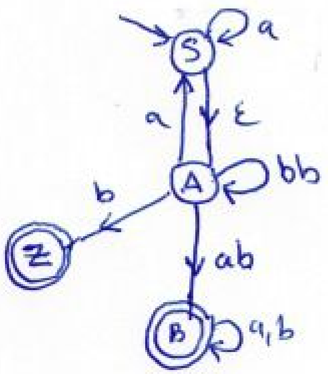
$S \to aS \mid A$

$A \to bbA \mid aS \mid abB \mid bZ$

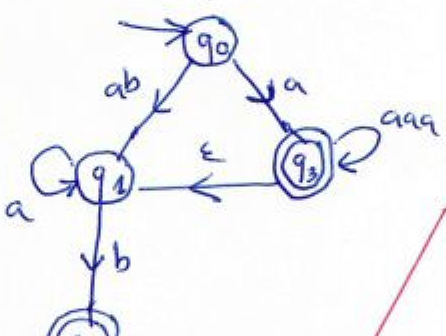
$B \to aB \mid bB \mid \varepsilon$

$Z \to \varepsilon$

donc l'automate qu'on cherche est :



- trouver la grammaire régulière à droite associée à cet AEF



Correction

$q_0 \to ab\,q_1 \mid a\,q_3$

$q_1 \to a\,q_1 \mid b\,q_2$

$q_2 \to \varepsilon$

$q_3 \to aaa\,q_3 \mid q_1 \mid \varepsilon$

avec q_0 est l'axiome de la grammaire