Année universitaire : 2015/2016
Université de Batna
Département d'informatique
2ème année licence informatique
Module : Théorie des langages

TD N° 01 : correction
Les mots et les langages

Exercice 01 :

1) ε
2) $\{\varepsilon\}$, $\varnothing$

Exercice 02 :

$L_1.L_2 = \{01^n0^m1 \ / \ n, m \in N\}$

$L_1 \cap L_2 = \{01\}$

$L_1^2 = \{ 01^n01^m \ / \ n, m \in N\}$

Exercice 03 :

$L^*L \cup \{\varepsilon\} = L^* = LL^* \cup \{\varepsilon\}$?

$$\begin{aligned} L^* &= L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup L^4 + \ldots \\ &= \{\varepsilon\} \cup L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup L^4 + \ldots \\ &= \{\varepsilon\} \cup L(L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup L^4 \cup \ldots) \\ &= \{\varepsilon\} \cup L(L^*) \\ &= \{\varepsilon\} \cup LL^* \\ &= \boxed{LL^* \cup \{\varepsilon\}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^* &= L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup L^4 \cup \ldots \\ &= \{\varepsilon\} \cup L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup L^4 \cup \ldots \\ &= \{\varepsilon\} \cup (L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup L^4 \cup \ldots) L \\ &= \{\varepsilon\} \cup (L^*)L \\ &= \boxed{L^*L \cup \{\varepsilon\}} \end{aligned}$$

$(L^*)^* = L^* \Leftrightarrow L^* \subseteq (L^*)^*$ et $(L^*)^* \subseteq L^*$

1) $L^* \subseteq (L^*)^*$: on a $L \subseteq L^*$ donc $L^* \subseteq (L^*)^*$
2) $(L^*)^* \subseteq L^*$: soit $w \in (L^*)^*$

$$w \in (L^*)^* \Rightarrow w \in \bigcup_{i\geq 0} (L^*)^i \Rightarrow \exists i \geq 0 \text{ tel que } w \in (L^*)^i \Rightarrow$$

$$w = w_1 \ldots\ldots w_i \text{ avec } w_m \in L^* \text{ pour } 1 \leq m \leq i \Rightarrow w_m \in \bigcup_{j\geq 0} L^j \Rightarrow w \in \bigcup_{k\geq 0} L^k \Rightarrow w \in L^*$$

$L^*L^* = L^* \Leftrightarrow L^*L^* \subseteq L^*$ et $L^* \subseteq L^*L^*$

1) $L^*L^* \subseteq L^*$: soit $w \in L^*L^* \Leftrightarrow w \in (L^*)^2 \Rightarrow w \in (L^*)^*$ et d'après la démonstration précédente $w \in L^*$
2) $L^* \subseteq L^*L^*$ est immédiat d'après la définition de L^*.

   C'est-à-dire : $L^* L^* = L^* (\{\varepsilon\} \cup L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup L^4 \cup \ldots) = (L^* \cup L^+ \cup \ldots) \supseteq L^*$

Exercice 04 :

1) Les mots w1 et w3 ne sont pas générés par G.

   Les mots w2 et w4 sont générés par G.

   $S \Rightarrow aS \Rightarrow aaS \Rightarrow aabA \Rightarrow aabcA \Rightarrow aabccA \Rightarrow aabcccA \Rightarrow w_2$

   $S \Rightarrow aS \Rightarrow abA \Rightarrow w_4$

2)

   Mot minimal : $S \Rightarrow bA \Rightarrow \boxed{b}$

$$S \xRightarrow{n\geq 0\,(\text{règle }1)} a^nS \xRightarrow{(\text{règle }2)} a^nbA \xRightarrow{m\geq 0\,(\text{règle }3)} a^nb\,c^mA \xRightarrow{(\text{règle }4)} a^nb\,c^m$$

$L(G)= \{a^nbc^m / n,m\geq 0\}$

3)

$L(G_1)= \{ a^k b^2 / k\geq 1 \}$

Puisque :

$$\text{mot minimal} : S \xRightarrow{\text{règle }(2)} aA \xRightarrow{\text{règle }(4)} abB \xRightarrow{\text{règle }(5)} abb = ab^2$$

$$S \xRightarrow{n\geq 0\,(\text{règle }1)} a^nS \xRightarrow{(\text{règle }2)} a^naA \xRightarrow{m\geq 0\,(\text{règle }3)} a^na\,a^mA \xRightarrow{(\text{règle }4)} a^{n+1+m}bB \xRightarrow{(\text{règle }5)} a^{n+1+m}bb$$

Donc : $n+1+m \geq 1$

$L(G_2)= \varnothing$

Puisque :

$$\text{mot minimal} : S \xRightarrow{\text{règle }(1)} aA \xRightarrow{\text{règle }(2)} aAa$$

Il y a un blocage (donc, il n'existe même pas un mot minimal)

$L(G_3)= \{\varepsilon\}$

Puisque :

$$\text{mot minimal} : S \xRightarrow{(\text{règle }2)} \varepsilon$$

$$S \xRightarrow{(\text{règle }1)} aA \xRightarrow{n\geq 0\,(\text{règle }3)} aAa^n$$

Il y a un blocage.

$L(G_4)= \{ a^{2n+1} / n\geq 0 \}$

Puisque :

$$\text{mot minimal} : S \xRightarrow{(\text{règle }1)} a$$

$$\underset{\substack{\Downarrow\\ a}}{S} \xRightarrow{(\text{règle }2)} aE \xRightarrow{(\text{règle }3)} aa\underset{\substack{\Downarrow\\ aaa}}{S} \xRightarrow{(\text{règle }2)} aaaE \xRightarrow{(\text{règle }3)} aaaa\underset{\substack{\Downarrow\\ aaaaa}}{S} \xRightarrow{(\text{règle }2)} aaaaaE \xRightarrow{(\text{règle }3)} \ldots..$$

Pour générer les mots de ce langage, On applique n fois les règles (2 et 3 dans cet ordre) tel que $n\geq 0$ et on finalise toujours par la règle (1).

$L(G_5)= \{ w / w\in\{a,b\}^* \}$

Puisque :

$$\text{mot minimal} : S \xRightarrow{(\text{règle }3)} \varepsilon$$

On peut générer toutes les combinaisons possibles de T*

$L(G_6)= \{ ww^R / w\in\{a,b\}^* \}$

Puisque :

$$\text{mot minimal} : S \xRightarrow{(\text{règle }3)} \varepsilon$$

On peut générer toutes les combinaisons possibles de T*. Chacune des combinaisons est concaténée avec son miroir.

$L(G_7)=\{\ 0^i 1^j \ /\ i\geq 1,\ j\geq 0,\ i>j\ \}$
Puisque :

$$\text{mot minimal}: S \overset{(\text{règle }3)}{\Longrightarrow} 0$$

$$S \overset{n\geq 0\,(\text{règle }1)}{\Longrightarrow} 0^n S 1^n \overset{m\geq 0\,(\text{règle }2)}{\Longrightarrow} 0^n 0^m S 1^n \overset{(\text{règle }3)}{\Longrightarrow} 0^n 0^m 0 1^n = 0^{n+m+1}1^n$$

.

$$S \overset{m\geq 0\,(\text{règle }2)}{\Longrightarrow} 0^m S \overset{n\geq 0\,(\text{règle }1)}{\Longrightarrow} 0^m 0^n S 1^n \overset{(\text{règle }3)}{\Longrightarrow} 0^m 0^n 0 1^n = 0^{m+n+1}1^n$$

On remarque que
$n\geq 0$
$m\geq 0$
Si on met $k=n+1+m$, on trouve que $k\geq 1$
On peut constater aussi que : $k>n$
Maintenant, on renomme les exposants de 0 et 1 respectivement par i et j

$L(G_8)=\{\ 0^i 1^j \ /\ j\geq 1,\ i\geq 0,\ j>i\ \}$
Puisque :

$$\text{mot minimal}: S \overset{(\text{règle }3)}{\Longrightarrow} 1$$

$$S \overset{n\geq 0\,(\text{règle }1)}{\Longrightarrow} 0^n S 1^n \overset{m\geq 0\,(\text{règle }1)}{\Longrightarrow} 0^n S 1^m 1^n \overset{(\text{règle }3)}{\Longrightarrow} 0^n 1 1^m 1^n = 0^n 1^{n+m+1}$$

$$S \overset{m\geq 0\,(\text{règle }2)}{\Longrightarrow} S 1^m \overset{n\geq 0\,(\text{règle }1)}{\Longrightarrow} 0^n S 1^n 1^m \overset{(\text{règle }3)}{\Longrightarrow} 0^n 1 1^n 1^m = 0^n 1^{n+m+1}$$

On remarque que
$n\geq 0$
$m\geq 0$
Si on met $k=n+1+m$, on trouve que $k\geq 1$
On peut constater aussi que : $k>n$
Maintenant, on renomme les exposants de 0 et 1 respectivement par i et j

$\boxed{L(G)=\{0^i 1^j \ /\ j\geq 0,\ i\geq 0,\ i\neq j\ \}}$

Exercice 05 :

$$\text{mot minimal}: S \overset{(\text{règle }2)}{\Longrightarrow} abC \overset{(\text{règle }5)}{\Longrightarrow} abc$$

$$S \overset{n\geq 0\,(\text{règle }1)}{\Longrightarrow} a^n S (BC)^n \overset{(\text{règle }2)}{\Longrightarrow} a^n abC(BC)^n = a^{n+1}bC(BC)^n = a^{n+1}b(CB)^n C \overset{(\text{règle }3)}{\Longrightarrow} ?$$

Démonstration par récurrence :
Pour n=1 :

$$(CB)C \xRightarrow{\text{(règle 3)}} BCC = BC^2$$

Pour n=2 :

$$(CB)^2 C \xRightarrow{\text{(on applique "2+1" fois)(règle 3)}} B^2C^3$$

Pour n=3 :

$$(CB)^3 C \xRightarrow{\text{(on applique "3+2+1" fois)(règle 3)}} B^3C^4$$

L'hypothèse de la récurrence : on suppose que la propriété, elle est vraie pour l'ordre « n » et on la démontre pour l'ordre « n +1».

On a pour n :

$$(CB)^n C \xRightarrow{\text{(on applique "n+.....+3+2+1" fois)(règle 3)}} B^nC^{n+1}$$

On cherche à démontrer que :

$$(CB)^{n+1} C \xRightarrow{\text{(on applique "(n+1)+n+.....+3+2+1" fois)(règle 3)}} B^{n+1}C^{n+2}$$

On a :

$$(CB)^{n+1}C = (CB)(CB)^n C \xRightarrow{\text{par hypothèse "n+.....+3+2+1" fois (règle 3)}} (CB)B^nC^{n+1} \xRightarrow{\text{on applique "n+1" fois (règle 3)}} B^{n+1}C^{n+2}$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{(CB)^{n+1} C \xRightarrow{\text{on applique "(n+1)+n+.....+3+2+1" fois (règle 3)}} B^{n+1}C^{n+2}}$$

Maintenant, on complète la génération de langage :

$$a^{n+1}b(CB)^n C \xRightarrow{\text{on applique "n+.....+3+2+1" fois (règle 3)}} a^{n+1}bB^nC^{n+1} \xRightarrow{\text{n fois (règle 4)}} a^{n+1}b^nbC^{n+1} \xRightarrow{\text{(règle 5)}} a^{n+1}b^nbcC^n \xRightarrow{\text{n fois(règle 6)}} a^{n+1}b^{n+1}c^{n+1}$$

On remarque que

$n \geq 0$

Si on met m=n+1, on trouve que $m \geq 1$

Donc : $L(G)= \{a^m b^m c^m / m \geq 1\}$

Bonne suite