Année universitaire : 2015/2016
Université de Batna
Département d'informatique
$2^{ème}$ année licence académique
Module : Théorie des langages

TD N° 02 : Les types des langages, les langages réguliers et expressions régulières

---

Exercice 01 :

Quel est le type de chacune des grammaires suivantes $G_i = (\{S, A, R, T, F\}, \{a, b, c\}, P_i, S)$, $(i=1,..,12)$

1) $P_1 = \{S \rightarrow aS \mid bA \mid \varepsilon \ ;\ A \rightarrow aA \mid bS\}$ type 3
2) $P_2 = \{S \rightarrow aS \mid SbSbS \mid \varepsilon\}$ type 2
3) $P_3 = \{S \rightarrow \varepsilon \mid aRbc \mid abc \ ;\ R \rightarrow aRTb \mid aTb \ ;\ Tb \rightarrow bT \ ;\ Tc \rightarrow cc\}$ type 1
4) $P_4 = \{S \rightarrow aAb \mid \varepsilon \ ;\ A \rightarrow aSb \ ;\ Ab \rightarrow \varepsilon\}$ type 0
5) $P_5 = \{S \rightarrow aAS \mid SA \ ;\ aA \rightarrow a\}$ type 0
6) $P_6 = \{S \rightarrow TF \ ;\ T \rightarrow aTA \mid bTR \mid \varepsilon \ ;\ AF \rightarrow aF \ ;\ RF \rightarrow bF \ ;\ Aa \rightarrow aA \ ;$
   $Ab \rightarrow bA \ ;\ Ra \rightarrow aR \ ;\ Rb \rightarrow bR \ ;\ F \rightarrow \varepsilon\}$ type 0
7) $P_7 = \{S \rightarrow aSc \mid A \ ;\ A \rightarrow \varepsilon \mid bAc\}$ type 2 généralisé
8) $P_8 = \{S \rightarrow bA \ ;\ A \rightarrow \varepsilon \mid aA\}$ type 3 généralisé
9) $P_9 = \{S \rightarrow \varepsilon \mid aSb\}$ type 2
10) $P_{10} = \{S \rightarrow \varepsilon \mid A \ ;\ A \rightarrow aA \mid a\}$ type 3
11) $P_{11} = \{S \rightarrow \varepsilon \ /aS\}$ type 3
12) $P_{12} = \{S \rightarrow Sb \mid Ab \ ;\ A \rightarrow aA \mid a\}$ type 2

Exercice 02 :

1) Soit le langage L défini comme suit :
   $L = \{a^{2n}\, b\, c^{2m+1} \ /\ n, m \geq 0\}$

☞ Montrer que L est de type 3 en trouvant une grammaire de type 3 qui l'engendre.

$G = (\{S, A\}, \{a, b, c\}, P, S)$ tel que $P = \{S \rightarrow aaS \mid bA \ ;\ A \rightarrow ccA \mid c\}$

☞ Trouver une grammaire de type 2 généralisé qui engendre L.

$G' = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P', S)$ tel que $P' = \{S \rightarrow AbB \ ;\ A \rightarrow aaA \mid \varepsilon \ ;\ B \rightarrow ccB \mid c\}$

2) Trouver une grammaire de type 2 pour le langage $L_1 = \{a^{2n}(bc)^{3n} \ /\ n \geq 0\}$.

En inspirant du langage $\{a^n b^n \ /\ n \geq 0\}$.engendré par la grammaire type 2 $\{S \rightarrow \varepsilon \mid aSb\}$, on peut trouver la grammaire demendée.

$G_1 = (\{S\}, \{a, b, c\}, P_1, S)$ tel que $P_1 = \{S \rightarrow \varepsilon \mid aaSbcbcbc\}$

3) Trouver une grammaire de type 2 généralisé pour le langage $L_2 = \{a^n b^m c^q / \ n+m=q \text{ et } n, m \geq 0\}$.

$G_2 = (\{S, A\}, \{a, b, c\}, P_2, S)$ tel que $P_2 = \{S \rightarrow aSc \mid A \ ;\ A \rightarrow bAc \mid \varepsilon\}$

Exercice 03 :

Les langages suivants sont-ils réguliers ?

$L_1 = \{a^n \ /\ n \in IN\}$

Il est régulier puisqu'il est obtenu par l'application d'une étoile de Klenne du langage régulier de base $\{a\}$. C'est-à-dire : $L_1 = \{a\}^*$

$L_2 = \{a^n\, b^n \ /\ n < 42^{51} - 1\}$

Il est régulier puisqu'il est obtenu par l'application d'un nombre fini de l'union de la concaténation des langages réguliers de base $\{a\}$, $\{b\}$ et $\{\varepsilon\}$. C'est-à-dire :

$$L_2 = \underbrace{\{\varepsilon\} \bigcup \{\{a\}\{b\}\} \bigcup \ldots \bigcup \left.\underbrace{\{a\}\{a\}\ldots\{a\}}_{(42^{51}-3)concaténations} \bullet \underbrace{\{b\}\{b\}\ldots\{b\}}_{(42^{51}-3)concaténations}\right\}}_{42^{51}\,unions}$$

Puisque $L_2 = \{\ a^0 b^0 \cup a^1 b^1 \cup a^2 b^2 \cup ..... \cup a^n b^n\ \}$

Donc le nombre de concaténations dans le dernier élément de ce langage est

$\underbrace{\{a\}\{a\}....\{a\}}_{(42^{51}-3) concaténations} \bullet \underbrace{\{b\}\{b\}....\{b\}}_{(42^{51}-3) concaténations}$ C'est-à-dire $2\,(42^{51} - 3) + 1$

$L_3 = \{a^{2n+1} / \ n \in IN\}$

Il est régulier puisqu'il est obtenu par l'application de trois concaténation et une étoile sur le langage régulier de base {a}. C'est-à-dire : $L_3 = \{a\}\{\{a\}\{a\}\}^*$

$L_4 = \{w \in \{a,b\}^* / w$ est de longueur paire$\}$

Il est régulier puisqu'il est obtenu par l'application d'une étoile de la concaténation de deux unions des langages réguliers de base {a} et {b}. C'est-à-dire : $L_4 = \{\{\{a\} \cup \{b\}\} \{\{a\} \cup \{b\}\}\}^*$

$L_5 = \{b^n a^m / n, m \in IN$ et au moins l'un des deux impair$\}$

Il est régulier puisqu'il est obtenu par l'application d'un nombre fini des opérations (l'union, concaténation et l'étoile de klenne) sur le langage régulier de base {a} et {b}.
C'est-à-dire : $L_5 = \{b\}\{\{b\}\{b\}\}^*\{a\}^* \cup \{b\}^*\{a\}\{\{a\}\{a\}\}^*$

Exercice 04 :

1) Dire si le mot donné appartient au langage représenté par l'expression régulière :
- ☞ le mot 10100010 et l'expression (0*10)* il appartient car il est obtenu par (10)(10)((0)(0)(10))
- ☞ le mot 01110110 et l'expression (0 + (11)*)* il n'appartient pas car tout bloc de 1 d'un mot de l'expression régulière (0 + (11)*)* est de longueur paire.
- ☞ le mot 000111100 et l'expression ((011 + 11)*(00)*)* il appartient car il est obtenu par (00)((011)(11))(00)

2) Trouver les expressions régulières représentant les langages suivants :

$L_1 = \{w \in \{0,1\}^* / w$ a exactement un $1\}$ $\boxed{0^*10^*}$

$L_2 = \{w \in \{0,1\}^* / w$ a au moins un $1\}$ $\boxed{(0+1)^*1(0+1)^*}$

$L_3 = \{w \in \{0,1\}^* / w$ contient la sous chaîne $001\}$ $\boxed{(0+1)^*001(0+1)^*}$

$L_4 = \{w \in \{a,b\}^* / w$ ne contient pas la sous chaîne $ab\}$ $\boxed{b^*a^*}$

Bonne suite