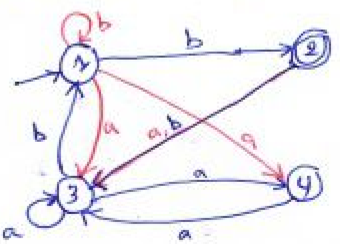
①

Exo 1

1) pour obtenir un AEF simple équivalent à l'AEF partiellement généralisé, on élimine les ε-transitions

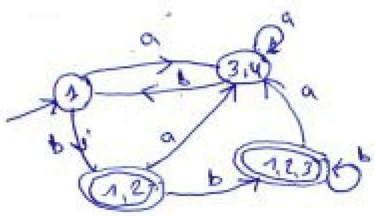
pour cela :

- on crée un nouveau automate avec toutes les transitions étiquetées par un symbole
- on ajoute dans cet AEF des nouvelles transitions afin de compenser ces suppressions (puisque le langage reconnu doit rester inchangé).



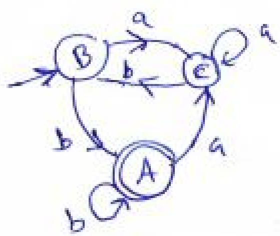
2) l'AEF simple obtenu n'est pas déterministe

- on détermine maintenant cet automate.



état	a	b
→ {1}	{3,4}	{1,2}
{3,4}	{3,4}	{1}
{1,2}	{3,4}	{1,2,3}
{1,2,3}	{3,4}	{1,2,3}

si on veut minimiser, on trouve :

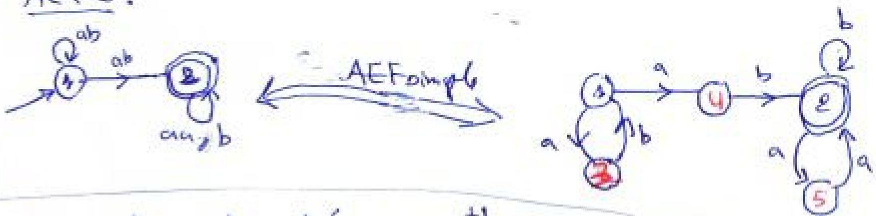


② Exo2

proposer un AEF simple pour chacun des langages et expressions ci-dessous.

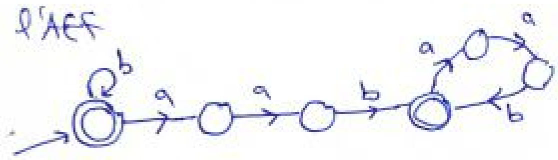
$$E_1 = (ab)^+ (aa+b)^* = (ab)^* ab (aa+b)^*$$

AEFG :

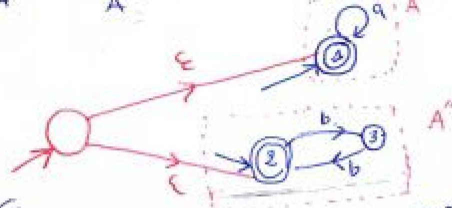


$$E_2 = b^*(aab)^* = b^*(\varepsilon + (aab)^+)$$
$$= b^* + b^*(aab)^+$$
$$= b^* + b^*(aab)(aab)^*$$

donc l'AEF



$$E_3 = \underbrace{a^*}_{A'} + \underbrace{(bb)^*}_{A''} \qquad A_3 = A' \cup A''$$

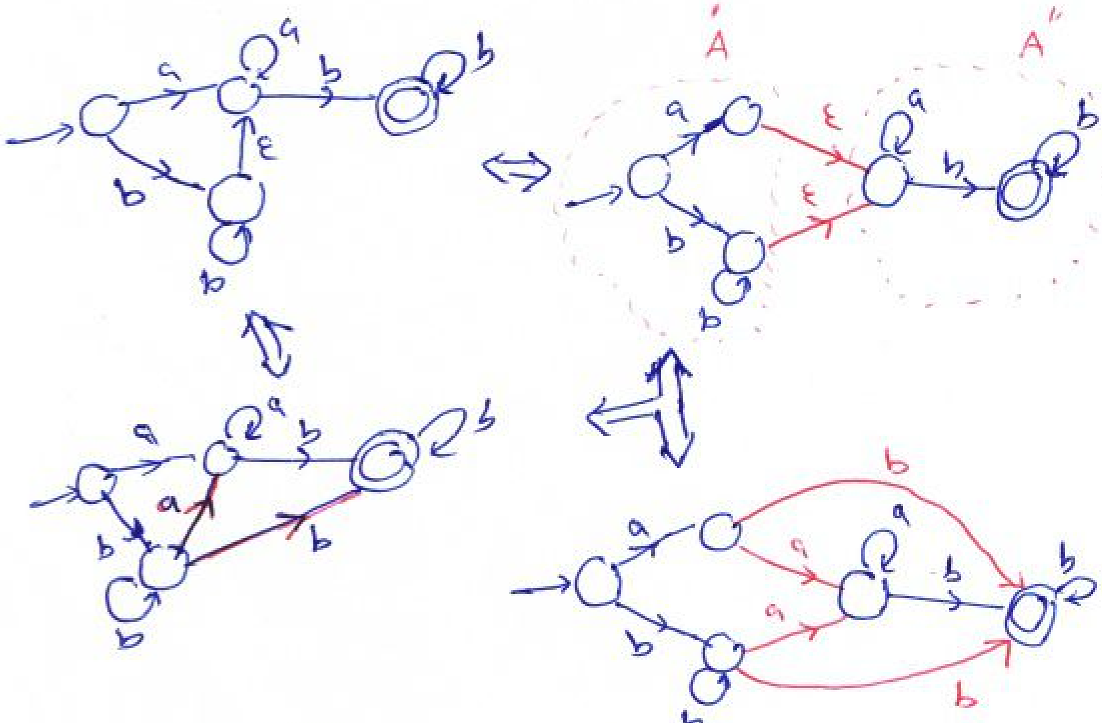


après la suppression des ε-transitions on trouve

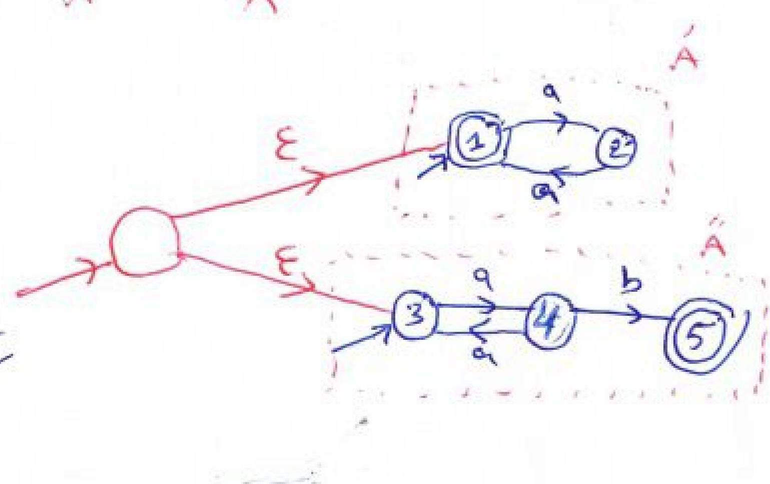
(3)

$E_4 = \underbrace{(a+b^+)}_{A'} \cdot \underbrace{a^* b^+}_{A''} = aa^*b^+ + b^+a^*b^+$

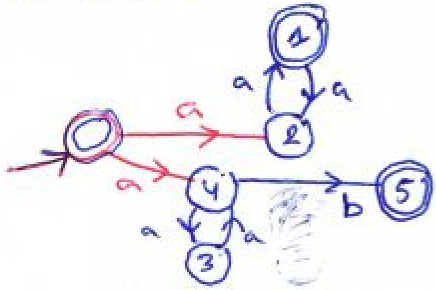
$= aa^*bb^* + bb^*a^*bb^*$



L_1 : $L_1 = \underbrace{a^{2n}}_{A'} \cup \underbrace{a^{2m+1}\,b}_{A''}$



après la suppression des ε_transitions on trouve



④

puisque avec $L_1 = \underbrace{L'_1}_{A'} \cup \underbrace{L''_1}_{A''}$

~~en fait~~

on trouve que A' et A'' sont tous les deux déterministe, donc on peut utiliser une autre méthode pour faire l'union et qui donne un AEF déterministe

cette méthode est basé sur δ_3

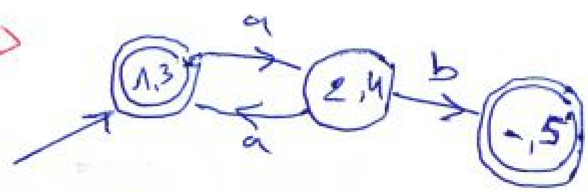
$$\delta_3((q',q''),x) = (\underbrace{\delta(q',x)}, \underbrace{\delta(q'',x)})$$

l'état initial, est le couple (q'_0, q''_0)

l'état final est tout couple contient au moins un état final

	a	b
→ (1,3)	(2,4)	—
(2,4)	(1,3)	(−,5)
(−,5)	—	—

⇔



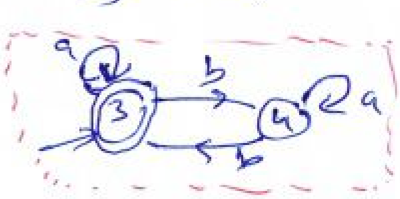
$L_2 = \underbrace{\{w \in \{a,b\}^* / \text{w contient un nombre d'occurrences paire de a}\}}_{A'} \cap \underbrace{\{w \in \{a,b\}^* / \text{w contient un nombre d'occurrences paire de b}\}}_{A''}$

puisque le "et" dans ce contexte se traduit par l'intersection

- on applique la deuxième méthode qui est utilisée aussi avec l'intersection, la seule différence, c'est l'état final $= (q'_F, q''_F)$, ce sont les couples qui contiennent deux états finaux.

on a :

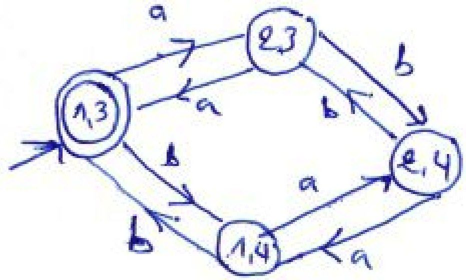
A'



A''

5

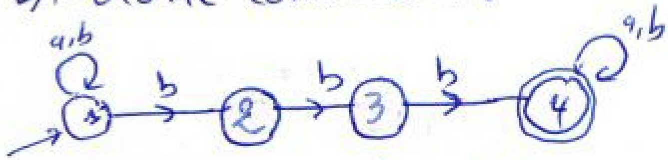
	a	b
→ (1,3)	(2,3)	(1,4)
(2,3)	(1,3)	(2,4)
(1,4)	(2,4)	(1,3)
(2,4)	(1,4)	(2,3)



$\underbrace{L_3}_{A} = \overline{L'_3}$ tel que $L'_3 = \underbrace{\{ w \in \{a,b\}^* \, / \, w \text{ contient 3 b consécutifs} \}}_{A'}$

donc $A = \overline{A'}$

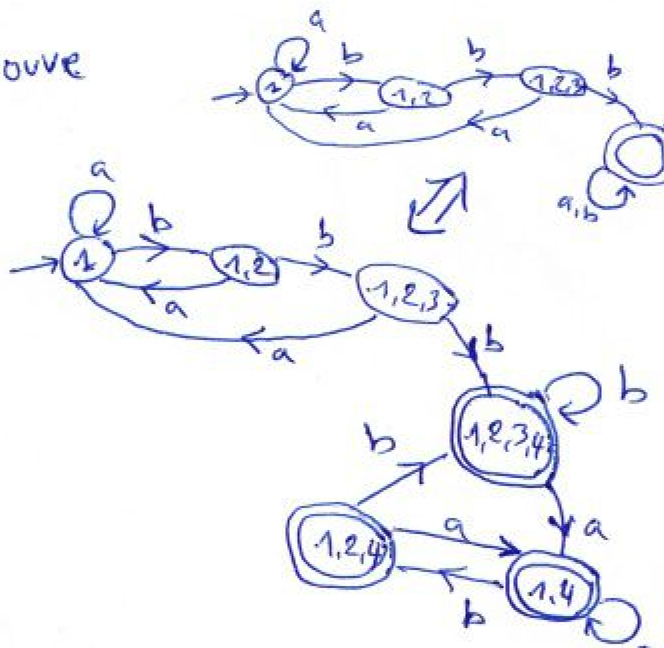
A' est donné comme suit :



pour complémenter A', il faut s'assurer qu'il est déterministe et complet tout d'abord.

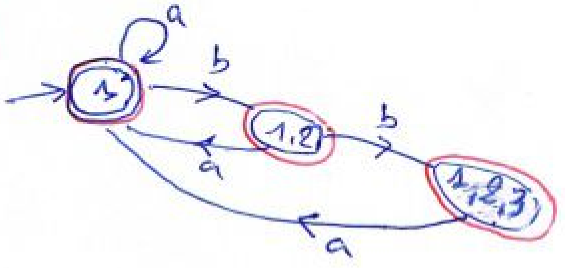
- on déterminise A', on trouve

	a	b
→ {1}	{1}	{1,2}
{1,2}	{1}	{1,2,3}
{1,2,3}	{1}	{1,2,3,4}
{1,2,3,4}	{1,4}	{1,2,3,4}
{1,4}	{1,4}	{1,2,4}
{1,2,4}	{1,4}	{1,2,4,3}



- il est déjà complet
- maintenant on le complète en inversant le statut final / non final des états et on trouve $\overline{A'} = A$

6

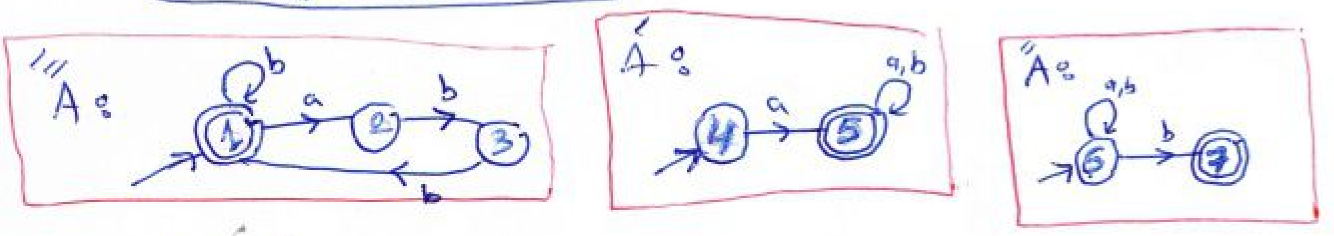


<u>Remarque</u> : les états (1,2,3,4), (1,2,4) et (1,4) sont non co-accessibles, c'est pour ça on a les éliminé. (c'est à dire des états qui ne nous mènent pas à aucun état final)

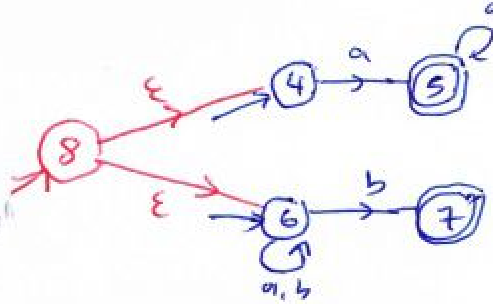
$$L_4 = \{ w \in \{a,b\}^* \,/\, (\underbrace{w \text{ commence par } a}_{A'} \underset{\cup}{\text{ou}} \underbrace{\text{finit par } b}_{A''}) \underset{\cap}{\text{et}} \underbrace{\text{tout } a \text{ est suivi d'au moins deux } b}_{A'''} \}$$

A : l'automate qui représente L_4

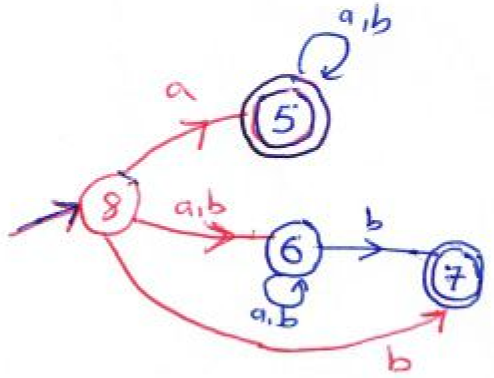
$$\boxed{A = (A' \cup A'') \cap A'''}$$



• $A' \cup A''$



devient après l'élimination des ε-transition et les états qui deviennent inaccessibles



• pour calculer l'intersection avec la deuxième méthode des couples il faut s'assurer tout d'abord que les paramettres de cette opération sont déterministes.

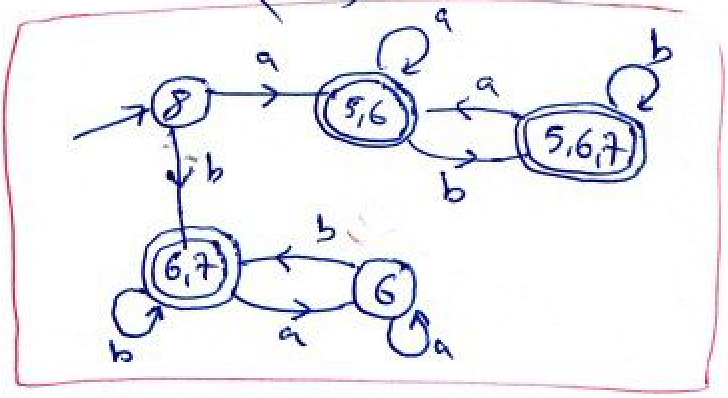
7

on a calculé $A' \cup A''$, mais le résultat n'est pas ~~déterministe~~ déterministe

on le déterminise, et on trouve :

	a	b
→ {8}	{5,6}	{6,7}
{5,6}	{5,6}	{5,6,7}
{6,7}	{6}	{6,7}
{5,6,7}	{5,6}	{5,6,7}
{6}	{6}	{6,7}

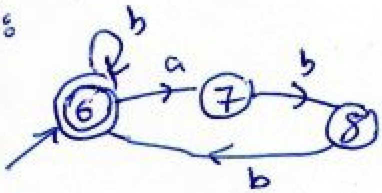
$(A' \cup A'')$ déterministe



maintenant on peut appliquer la méthode entre le dernier automate et l'automate A''' (A''' est déterministe)

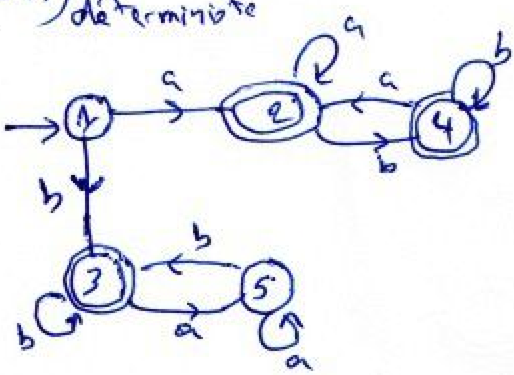
c'est à dire : $A''' \cap (A' \cup A'')_{\text{version déterministe}}$

A''' :



et

$(A' \cup A'')$ déterministe



on trouve l'AEF de L_4 :

	a	b
(1,6)	(2,7)	(3,6)
(2,7)	(2,-)	(4,8)
(3,6)	(5,7)	(3,6)
(2,-)	(2,-)	(4,-)
(4,8)	(2,-)	(4,6)
(5,7)	(5,-)	(3,8)
(4,-)	(2,-)	(4,-)
(4,6)	(2,7)	(4,6)
(5,-)	(5,-)	(3,-)
(3,8)	(5,-)	(3,6)
(3,-)	(5,-)	(3,-)

on peut → trouver le graphe

donc l'état initial de l'automate de L_4 est le couple $(1,6)$

les états finaux de l'automate de L_4 sont les couples $(3,6)$ et $(4,6)$

2) indiquer, si possible, les opérations sur les AEF pour obtenir chacun des langages suivants:

$$L_5 = \underbrace{\{w \in \{a,b\}^* / w \text{ contient aa}\}}_{A'} \cap \underbrace{\{w \in \{a,b\}^* / w \text{ contient un nombre pair de a}\}}_{A''}$$

$$L_6 = A' \cup A''$$

$$L_7 = \underbrace{\{w \in \{a,b\}^* / w \text{ contient un nombre de a multiple de } 3\}}_{A'} \cap \{w \in \{a,b\}^* / w \text{ contient } \underbrace{\text{un nombre de a multiple de } 2\}}_{A''}$$

$$= \{w \in \{a,b\}^* / w \text{ contient un nombre de a multiple de } 6\}$$

$$L_8 = A'' \cap \overline{A'}$$

$$L_9 = \{w \in \{a,b\}^* / w \text{ ne contient pas le facteur aba}\} \cap \{w \in \{a,b\}^* / w \text{ ne contient pas le facteur bca}\}$$

$$= \overline{\{w \in \{a,b\}^* / w \text{ contient le facteur aba}\}} \cap \overline{\{w \in \{a,b\}^* / w \text{ contient le facteur bca}\}}$$

$$= \overline{A'} \cap \overline{A''} = \overline{A' \cup A''}$$

tel que A' l'automate qui représente $\{w \in \{a,b\}^* / w \text{ contient le facteur aba}\}$

et tel que A'' l'automate qui représente $\{w \in \{a,b\}^* / w \text{ contient le facteur bca}\}$

$$L_{10} = \{w \in \{a,b\}^* / w \text{ contient aaa ou contient bbb}\} \cap \overline{\{w \in \{a,b\}^* / w \text{ contient aaa et contient bbb}\}}$$

$$= \underbrace{\{w \in \{a,b\}^* / w \text{ contient aaa mais pas bbb}\}} \text{ ou } \underbrace{\{w \in \{a,b\}^* / w \text{ contient bbb mais pas aaa}\}}$$

$$= \underbrace{\{w \in \{a,b\}^* / w \text{ contient aaa}\} \cap \overline{\{w \in \{a,b\}^* / w \text{ contient bbb}\}}} \text{ ou } \underbrace{\{w \in \{a,b\}^* / w \text{ contient bbb}\} \cap \overline{\{w \in \{a,b\}^* / w \text{ contient aaa}\}}}$$

$$= (A' \cap \overline{A''}) \text{ ou } (A'' \cap \overline{A'})$$

$$= (A' \cap \overline{A''}) \cup (A'' \cap \overline{A'})$$

tel que: A', l'automate de $\{w \in \{a,b\}^* / w \text{ contient aaa}\}$

A'' l'automate de $\{w \in \{a,b\}^* / w \text{ contient bbb}\}$

9

$L_{11} = \{w \in \{a,b\}^* / w \text{ ne contient ni } bb \text{ ni } abba\} \cdot abba \cdot \{w \in \{a,b\}^* / w \text{ ne contient ni } bb \text{ ni } abba\}$

Soit A' l'automate qui reconnait le langage $\{w \in \{a,b\}^* / w \text{ contient } bb\}$

Soit A'' l'automate qui reconnait le langage $\{w \in \{a,b\}^* / w \text{ contient } abba\}$

Soit A''' l'automate qui reconnait seulement abba

donc

$$L_{11} = (\overline{A'} \cap \overline{A''}) \cdot abba \cdot (\overline{A'} \cap \overline{A''})$$

$$= \overline{(A' \cup A'')} \cdot abba \cdot \overline{(A' \cup A'')}$$

$$= \overline{(A' \cup A'')} \cdot A''' \cdot \overline{(A' \cup A'')}$$

L_{12} = l'ensemble des mots qui ont un nombre égal de 0 et de 1

ce langage L_{12} n'est pas régulier et si on suppose qu'il est régulier, donc son intersection avec un autre langage régulier est régulier

soit L le langage régulier suivant $L = a^* b^*$

selon la supposition, on

$$L_{12} \cap L = \{a^n b^n / n \geq 0\}$$

mais $\{a^n b^n / n \geq 0\}$ n'est pas régulier donc la suppositon est fausse

donc : L_{12} n'est régulier et par conséquent il n'accepte pas un AEF.

10

Exo3 :

le système d'équations de l'AEF est

$$\begin{cases} L(1) = a.L(1) + b.L(2) + \varepsilon \rightarrow (1) \\ L(2) = a.L(1) + b.L(3) + \varepsilon \rightarrow (2) \\ L(3) = a.L(3) + b.L(3) + \phi \rightarrow (3) \end{cases}$$

• à partir de (3), on trouve $L(3) = (a+b)^*.\phi = \phi$

~~puisque l'état 3~~

puisque l'état 3 n'engendre aucun mot il est donc non co-accessible. (voir l'AEF)

• (2) devient $L(2) = aL(1) + b.\phi + \varepsilon$

$$= aL(1) + \phi + \varepsilon = aL(1) + \varepsilon \rightarrow (4)$$

• On remplace (4) dans (1) ; on trouve

$$L(1) = a.L(1) + b.(aL(1) + \varepsilon) + \varepsilon$$

$$= (a+ba)L(1) + b + \varepsilon$$

l'expression régulière est donnée par $L(1) = (a+ba)^*(b+\varepsilon)$

$$= (a+ba)^*b + (a+ba)^*$$

Exo4

1/ l'AEF associé à la grammaire G, est un AEF G

$S \rightarrow aS \mid A$
$A \rightarrow bbA \mid aS \mid abB \mid b \iff$
$B \rightarrow aB \mid bB \mid \varepsilon$

$S \rightarrow aS \mid \varepsilon.A$
$A \rightarrow bbA \mid aS \mid abB \mid bZ$
$B \rightarrow aB \mid bB \mid \varepsilon$
$Z \rightarrow \varepsilon$

selon la dernière grammaire, l'AEF associé est :