4.1-Introduction

Pour comprendre et décrire les critères de résistance, de rigidité ou de stabilité des différentes élément du système mécanique(pièces) ou d'une structure (poutre) de différentes formes des sections transversales des éléments utilisés dans les constructions, il est indispensable de connaitre un certain nombre de données sur la répartition des masses des systèmes, notamment la localisation du centre de masses et la détermination des moments d'inertie et produits d'inertie

4.2-Masse

La notion de masse La masse d'un corps est la quantité de matière contenue dans ce corps. La masse caractérise l'inertie du corps c'est-à-dire la plus au moins grande difficulté de mettre ce corps au mouvement

4.2.1- Masse d un système matériel

On appelle système matériel tout ensemble de points matériels.

4.2.1.1-Système discret

Un système matériel a une masse : la masse du système est la somme des masses des points matériels qui le constituent :

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

La masse d'un système ne dépend pas du repère d'observation. L'unité internationale de masse est le kilogramme (symbole : kg).

4.2.1.2- Système continu

4.2.1.2.1-Masse volumique ρ

La masse d'un système constitué d'un ensemble continu de masses s'écrit sous la forme :

$$m = \iiint_m dm = \iiint_V \rho dV$$

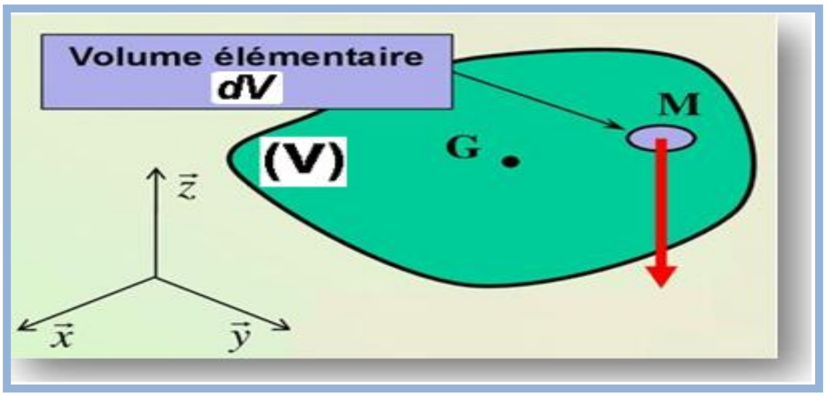

Figure 3.1

-Distribution homogène

Dans ce cas, on a :

$\rho_1 = \rho_2 = \cdots \rho_n = cte$

Donc :

$$\boxed{m = \rho \iiint_V dV = \rho V}$$

-Distribution non-homogène

Dans ce cas, on a :

$\rho_1 \neq \rho_2 \neq \cdots \neq \rho_n = \rho(x, y, z)$Donc :

$$m = \iiint_V \rho dV$$

4.2.1.2.2-Masse surfacique σ

La masse d'un système constitué d'un ensemble continu de masses s'écrit sous la forme :

$$m = \iint_m \mathrm{dm} = \iint_S \sigma \mathrm{dS}$$

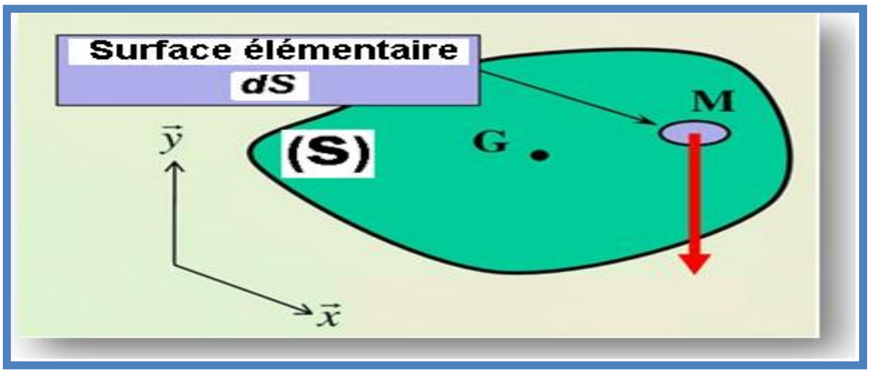

Figure 3.2

-Distribution homogène

Dans ce cas, on a :

$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots \sigma_n = cte$

Donc :

$$m = \sigma \iint_S \mathrm{dS} = \sigma S$$

-Distribution non-homogène

Dans ce cas, on a :

$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \cdots \neq \sigma_n = \sigma(x, y)$

Donc :

$$\boxed{m = \iint_S \sigma \mathrm{dS}}$$

4.2.1.2.3-Masse linéique σ

La masse d'un système constitué d'un ensemble continu de masses s'écrit sous la forme :

$$m = \int_m dm = \int_L \lambda \, \mathrm{dL}$$

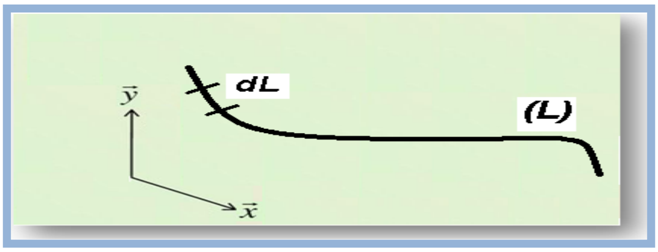

Figure 3.3

-Distribution homogène

Dans ce cas, on a :

$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots \lambda_n = cte$

Donc :

$$\boxed{m = \lambda \int_L \mathrm{dL} = \lambda L}$$

-Distribution non-homogène

Dans ce cas, on a :

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n = \lambda(x, y)$

Donc :

$$m = \int_L \lambda \, \mathrm{dL}$$

4.3-Centre de masse

4.3.1- Définition du centre de masse

Soit (S) un système de points matériels A_i de masse $\boldsymbol{m_i}$ définit dans un repère ***(O, x, y, z).*** Ces points matériels A_i sont repérées par les vecteurs positions : $\overrightarrow{OA_i} = \vec{r}_i\,(x_{i,}y_i, z_i)$

La masse totale du système

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

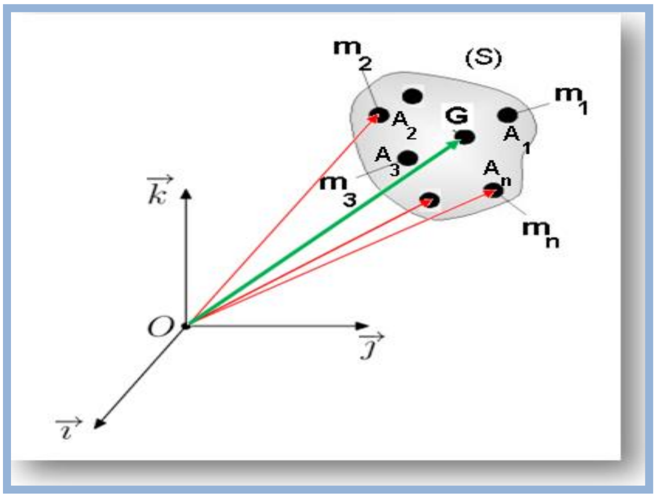

Figure 3.4

Définition : Le centre d'inertie ***G*** (appelé aussi centre de masse ou centre de gravité) de l'ensemble des points $\boldsymbol{M_i}$ est le barycentre définit par :

$$\overrightarrow{OG} \sum m_i = \sum m_i \vec{r}_i$$

$$\overrightarrow{OG} = \vec{r}_G = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

Le point G (X_G, Y_G, Z_G) est appelé centre de masse, ou encore centre d'inertie, ou barycentre.

Dans un système d'axes (Oxyz), l'équation précédente donne :

$$X_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

$$Y_G = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$$

$$Z_G = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

4.3.1.1- Système continu (solide)

Pour un système continu, on a :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OA}(x, y, z)$$

Donc :

$$\vec{r_G} = \overrightarrow{OM} = \frac{\int_m \vec{r} dm}{\int_m dm}$$

4.3.1.1.1- Masse volumique ρ

La masse d'un système constitué d'un ensemble continu de masses s'écrit sous la forme :

$$m = \iiint_m dm = \iiint_V \rho dV$$

-Distribution homogène

Dans ce cas, on a :

$\rho_1 = \rho_2 = \cdots \rho_n = cte$

Donc :

$$m = \rho \iiint_V dV = \rho V$$

Donc :

$$\overrightarrow{r_G} = \overrightarrow{OG} = \frac{\iiint_V \vec{r}dV}{\iiint_V dV}$$

Dans un système d'axes (Oxyz), l'équation précédente donne :

$$X_G = \frac{\iiint_V xdV}{\iiint_V dV}$$

$$Y_G = \frac{\iiint_V ydV}{\iiint_V dV}$$

$$Z_G = \frac{\iiint_V zdV}{\iiint_V dV}$$

-Distribution non-homogène

Dans ce cas, on a :

$\rho_1 \neq \rho_2 \neq \cdots \neq \rho_n = \rho(x, y, z)$

Donc :

$$m = \iiint_V \rho dV$$

Donc :

$$\overrightarrow{r_G} = \overrightarrow{OM} = \frac{\iiint_V \rho\vec{r}dV}{\iiint_V \rho dV}$$

Dans un système d'axes (Oxyz), l'équation précédente donne :

$$X_G = \frac{\iiint_V \rho x dV}{\iiint_V \rho dV}$$

$$Y_G = \frac{\iiint_V \rho y dV}{\iiint_V \rho dV}$$

$$Z_G = \frac{\iiint_V \rho z dV}{\iiint_V \rho dV}$$

4.3.1.1.2- Masse surfacique σ

La masse d'un système constitué d'un ensemble continu de masses s'écrit sous la forme :

$$m = \iint_m \mathrm{dm} = \iint_S \sigma \mathrm{dS}$$

$$\overrightarrow{r_G} = \overrightarrow{OG} = \frac{\iint_S r\sigma \mathrm{dS}}{\iint_S \sigma \mathrm{dS}}$$

-Distribution homogène

Dans ce cas, on a :

$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots \sigma_n = cte$

alors :

$$m = \sigma \iint_S \mathrm{dS}$$

Donc :

$$\overrightarrow{r_G} = \overrightarrow{OG} = \frac{\iint_S r\mathrm{dS}}{\iint_S \mathrm{dS}}$$

Dans sytemes d'axes Oxy, on obtient :

$$X_G = \frac{\iint_S x\mathrm{dS}}{\iint_S \mathrm{dS}}$$

$$Y_G = \frac{\iint_S y\mathrm{dS}}{\iint_S \mathrm{dS}}$$

-Distribution non-homogène

Dans ce cas, on a :

$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \cdots \neq \sigma_n = \sigma(x,y)$

Donc :

$$m = \iint_S \sigma \mathrm{dS}$$

Dans sytemes d'axes Oxy, on obtient :

$$X_G = \frac{\iint_S x\sigma \mathrm{dS}}{\iint_S \sigma \mathrm{dS}}$$

$$Y_G = \frac{\iint_S y\sigma \mathrm{dS}}{\iint_S \sigma \mathrm{dS}}$$

4.3.1.1.3- Masse lineique λ

La masse d'un système constitué d'un ensemble continu de masses s'écrit sous la forme :

$$m = \int_m dm = \int_L \lambda\, \mathrm{dL}$$

$$\overrightarrow{r_G} = \overrightarrow{OG} = \frac{\int_L r \lambda\, dL}{\int_L \lambda\, dL}$$

-Distribution homogène

Dans ce cas, on a :

$\curlywedge_1 = \curlywedge_2 = \cdots \curlywedge_n = cte$

Donc :

$$m = \curlywedge \int_L \mathrm{dL}$$

$$\overrightarrow{r_G} = \overrightarrow{OG} = \frac{\int_L rdL}{\int_L dL}$$

Dans un syteme d'axe Oxy, on btient :

$$X_G = \frac{\int_L xdL}{\int_L dL}$$

$$Y_G = \frac{\int_L ydL}{\int_L dL}$$

-Distribution non-homogène

Dans ce cas, on a :

$\curlywedge_1 \neq \curlywedge_2 \neq \cdots \neq \curlywedge_n = \curlywedge(x, y)$

Donc :

$$m = \int_L \curlywedge \mathrm{dL}$$

$$X_G = \frac{\int_L x \curlywedge dL}{\int_L \curlywedge dL}$$

$$Y_G = \frac{\int_L y \curlywedge dL}{\int_L dL}$$

4.3.2- Théorèmes de Guldin

Les deux théorèmes de Guldin facilitent parfois la recherche des centres de gravité des surfaces et lignes planes, ou permettent le calcul des surfaces et des volumes de différents corps de révolution.

4.3.2.1- 1er théorème de Guldin

L'aire d'une surface de révolution d'axe (Oy) engendrée par la rotation autour de (Oy) d'une courbe (L) contenue dans le plan (xOz) est égale au produit de la longueur de la courbe par la longueur du cercle décrit par son centre de gravité.

$$X_G = \frac{S_y}{2\pi L}$$

$$Y_G = \frac{S_x}{2\pi L}$$

(X_G, Y_G): cordonnées du centre de gravité de la courbe (L)

S_y S_x : aires de surface de révolution de la courbe (L) autour de l'axe Oy et Ox respectivement

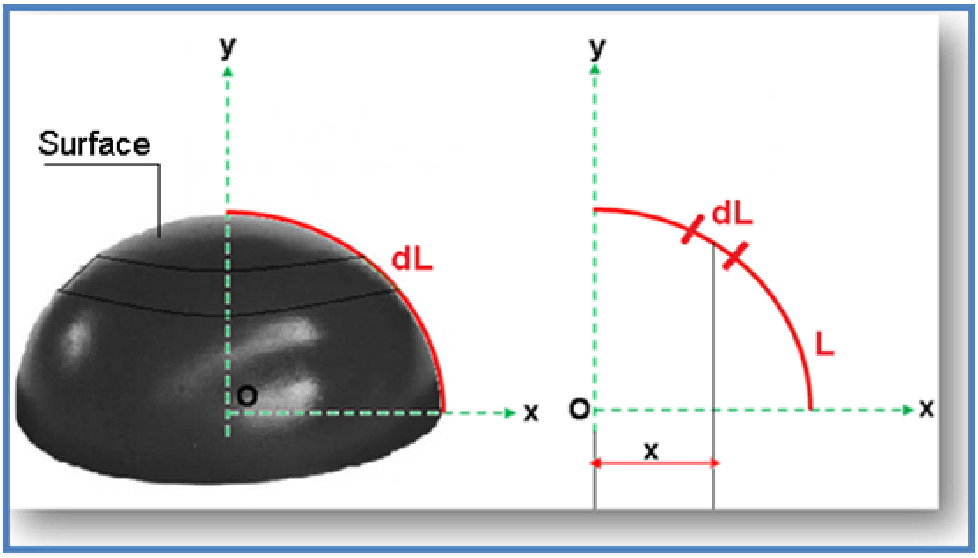

Figure 3.5

Demontrons que :

$$X_G = \frac{S_y}{2\pi L}$$

$$Y_G = \frac{S_x}{2\pi L}$$

1/-$pour\ X_G$: rotation de la courbe (L) autour de l axe Oy

Soit une courbe (L) tournant autour de l'axe Oy , ne le coupant pas. L'élément dL engendre une surface dS telle que:

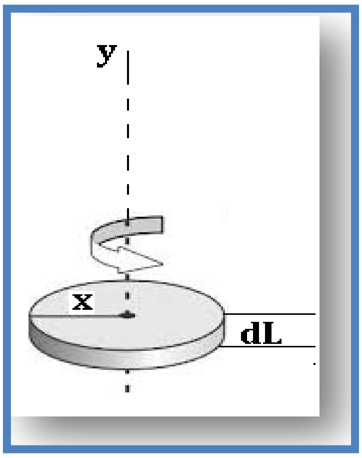

Figure 3.6

$$dS = 2\pi x dL$$

La surface totale engendrée sera :

$$S_y = \iint_S \mathrm{dS} = \int_L 2\pi x dL$$

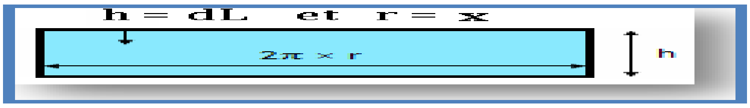

Figure 3.7

$$S_y = 2\pi \int_L xdL \dots\dots\dots (a)$$

D'autre par on sait que :

$$X_G = \frac{\int_L xdL}{\int_L dL}$$

$$\rightarrow X_G \int_L dL = \int_L xdL \dots\dots\dots (b)$$

(b) dans (a) donne :

$$S_y = 2\pi X_G \int_L dL$$

$$\rightarrow S_y = 2\pi X_G L$$

Donc :

$$X_G = \frac{S_y}{2\pi L}$$

Avec :

X_G : cordonnée du centre de gravité de la courbe (L)

S_y : aire surface de révolution de la courbe (L) autour de l'axe Oy

2/-$pour\ Y_G$: rotation de la courbe (L) autour de l axe Ox

Soit une courbe (L) tournant autour de l'axe Ox , ne le coupant pas. L'élément dL engendre une surface dS telle que:

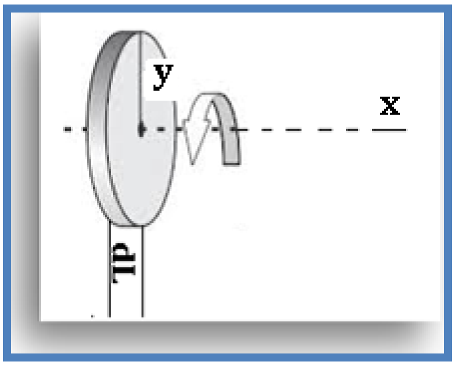

Figure 3.8

$$S_x = \iint_S \mathrm{dS} = \int_L 2\pi y dL$$

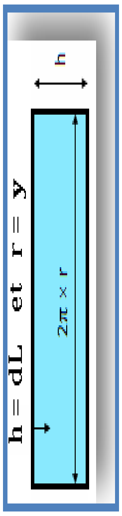

Figure 3.9

$$S_x = 2\pi \int_L ydL \ldots\ldots\ldots (c)$$

D'autre par on sait que :

$$Y_G = \frac{\int_L ydL}{\int_L dL}$$

$$\rightarrow Y_G \int_L dL = \int_L ydL \ldots\ldots\ldots (d)$$

(d) dans (c) donne :

$$S_x = 2\pi Y_G \int_L dL$$

$$\rightarrow S_y = 2\pi Y_G L$$

Donc :

$$Y_G = \frac{S_x}{2\pi L}$$

Avec :

Y_G : cordonnée du centre de gravité de la courbe (L)

S_x : aire surface de révolution de la courbe (L) autour de l'axe Ox

4.3.2.1- 2eme théorème de Guldin

Le volume engendré par la rotation d'une surface (S) plane homogène autour d'un axe (Oy) situé dans son plan (Oxy) et qui ne la traverse pas est égal au produit de l'aire de la surface par la longueur de circonférence décrite par le centre de gravité de la surface.

$$X_G = \frac{V_y}{2\pi S}$$

$$Y_G = \frac{V_x}{2\pi S}$$

(X_G, Y_G) : cordonnées du centre de gravité de la surface (S)

V_y et V_x : volumes de révolution de la courbe (S) autour de l'axe Oy et Ox respectivement

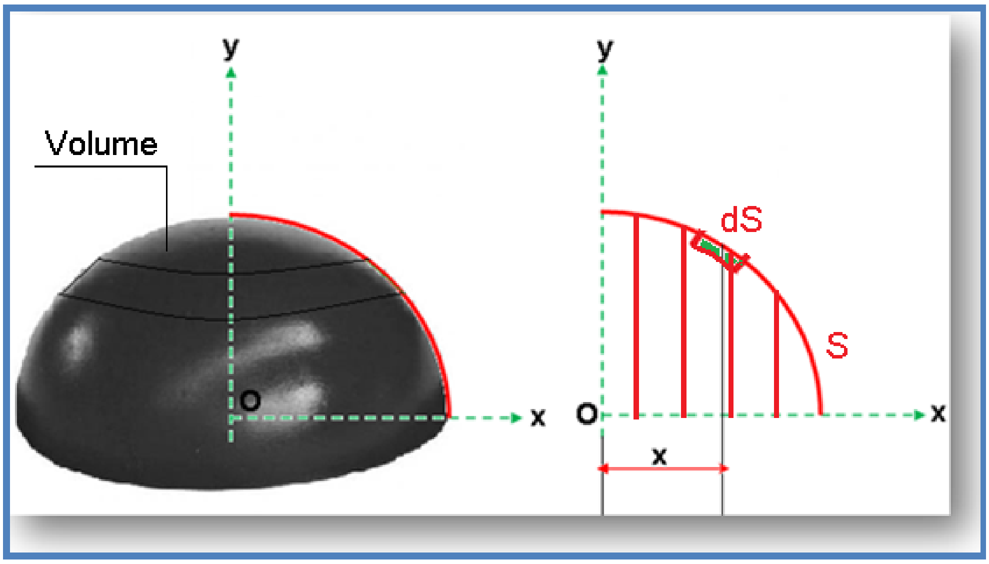

Figure 3.10

Demontrons que :

$$X_G = \frac{V_y}{2\pi S}$$

$$Y_G = \frac{V_x}{2\pi S}$$

1/-$pour\ X_G$: rotation de la surface (S) autour de l axe Oy

Soit une surface plane (S) tournant autour de l'axe Oy , ne le coupant pas. L'élément dS engendre un volume dV tel que:

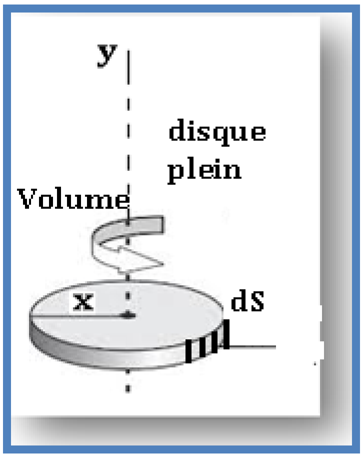

Figure 3.11

$$dV = 2\pi x dS$$

La surface totale engendrée sera :

$$V_y = \iiint dV = \iiint 2\pi x dS$$

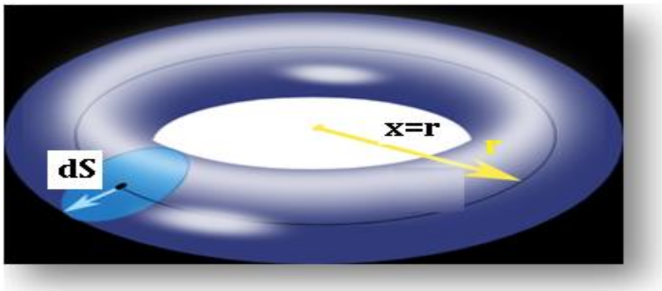

Figure 3.12

$$V_y = 2\pi \int_L \iint x dS \ldots \ldots \ldots (e)$$

D'autre par on sait que :

$$X_G = \frac{\iint_S xdS}{\iint_S dS}$$

$$\rightarrow X_G \iint_S dS = \iint_S xdS \ldots\ldots\ldots (f)$$

(f) dans (e) donne :

$$V_y = 2\pi X_G \iint_S dS$$

$$\rightarrow V_y = 2\pi X_G S$$

Donc :

$$X_G = \frac{V_y}{2\pi S}$$

Avec :

X_G : cordonnée du centre de gravité de la surface (S)

V_y : aire surface de révolution de la surface (S) autour de l'axe Oy

2/-$pour\ Y_G$: rotation de la courbe (L) autour de l axe Ox

Soit une courbe (L) tournant autour de l'axe Ox , ne le coupant pas. L'élément dL engendre une surface dS telle que:

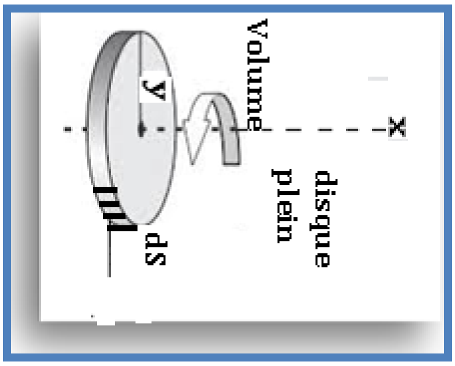

Figure 3.13

$$dV = 2\pi x dS$$

La surface totale engendrée sera :

$$V_x = \iiint dV = \iiint 2\pi y dS$$

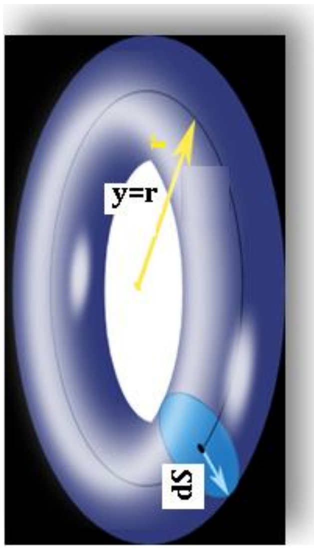

Figure 3.14

$$V_x = 2\pi \int_L \iint ydS \ldots\ldots\ldots (e)$$

D'autre par on sait que :

$$Y_G = \frac{\iint_S \ y\mathrm{dS}}{\iint_S \ \mathrm{dS}}$$

$$\rightarrow Y_G \iint_S \ \mathrm{dS} = \iint_S \ y\mathrm{dS} \ldots\ldots\ldots (f)$$

(f) dans (e) donne :

$$V_x = 2\pi Y_G \iint_S \ \mathrm{dS}$$

$$\rightarrow V_x = 2\pi Y_G S$$

Donc :

$$Y_G = \frac{V_x}{2\pi S}$$

Avec :

Y_G : cordonnée du centre de gravité de la surface (S)

V_x : aire surface de révolution de la surface (S) autour de l'axe Ox

4.3.3-. Principe de subdivision

Lorsqu' un système est composé d'un assemblage de systèmes élémentaires simples pour lesquels les calculs sont aisés. On procède alors en deux étapes :

- détermination du centre d'inertie de chaque système élémentaire

- détermination du centre d'inertie de l'ensemble

C'est ce qu'on appelle faire une détermination par subdivision (ou fractionnement)

D'une façon générale, les cordonnées du centre de gravité ce système d'éléments sont données par :

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{Gi} m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_{Gi} m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$Z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_{Gi} m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Remarques

- Dans le cas ou on a une densité volumique constante (ρ=cte), ces équations précédentes peuvent s'explicite selon :

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{Gi} V_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i}$$

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_{Gi} V_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i}$$

$$Z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_{Gi} V}{\sum_{i=1}^{n} V_i}$$

- Dans le cas ou on a une densité surfacique constante (σ =cte), on obtient :

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{Gi} S_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i}$$

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_{Gi} S_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i}$$

Prenons un exemple d un assemblage constitué de deux éléments (1) et (2) avec une densité surfacique constante. Les cordonnées du centre de gravité de ce système d'éléments sont données par :

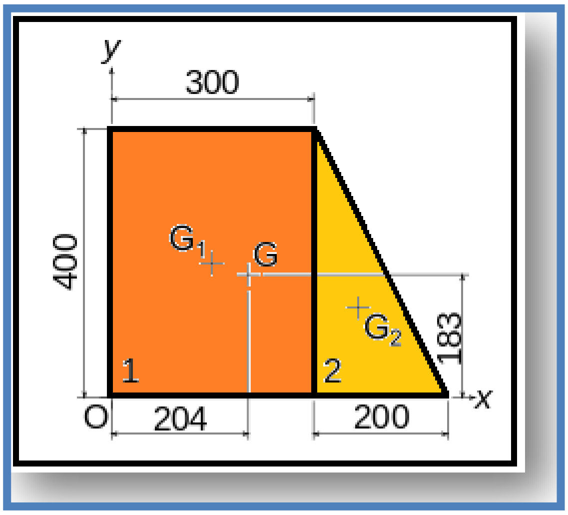

Figure 3.15

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^{2} X_{Gi} S_i}{\sum_{i=1}^{2} S_i} = \frac{X_{G1} S_1 + X_{G2} S_2}{S_1 + S_2}$$

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^{2} Y_{Gi} S_i}{\sum_{i=1}^{2} S_i} = \frac{Y_{G1} S_1 + Y_{G2} S_2}{S_1 + S_2}$$

4.4-. Moments d'inertie

Soit un solide S de masse m

Soient (Δ) un axe de ce solide S, Q un point quelconque de cet axe et **δ** un vecteur unitaire orientant cet axe.

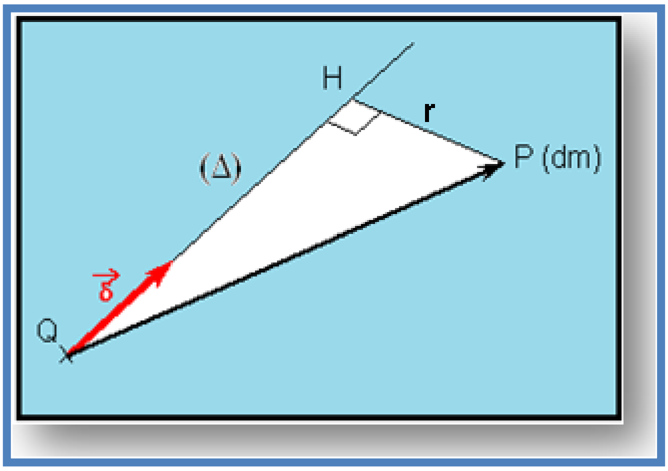

Figure 3.16

Soit P un point courant de ce solide, de masse dm situé à la distance courante ***r*** de l'axe (Δ).

Le moment d'inertie du solide S par rapport à un axe (Δ) est donné par :

$$I_{(\Delta)} = \int_S r^2 dm$$

4.4.1-Théorème de Huygens (changement d'axe de rotation)

Le ***théorème de Huygens*** (aussi appelé théorème du changement d'axe) permet de relier les ***moments*** d'inertie d'un solide par rapport à un axe et du solide par rapport à l'axe parallèle à et passant par G.

Soit $I_{(\Delta)G}$ le moment d'inertie par rapport à l' axe passant par le centre de gravité G d'un solide (S) de masse m et soit (Δ) un axe parallèle à l axe $(\Delta)_G$.

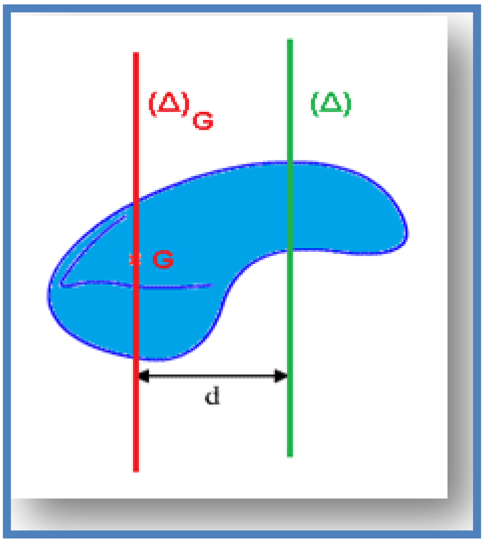

Figure 3.17

Le moment d'inertie par rapport à un axe (Δ) s'explicite selon :

$$I_{(\Delta)} = I_{(\Delta)G} + md^2$$

d : distance entre les deux axes $(\Delta)_G$ et (Δ)

Remarques

- Un moment d'inertie caractérise la distribution de la masse autour d'une droite.

-Le moment d'inertie $I_{(\Delta)}$ caractérise la répartition de la masse du solide S par rapport à l'axe (Δ).

- L'unité d'un moment d'inertie est le kilogramme mètre carré [kg.m^2]

4.4.2- Operateur d'inertie d'un solide

Le moment d'inertie $I_{(\Delta)} = \int_{P\in S} (PH)^2 dm$ peut facilement être calculé en utilisant le fait que :

$$\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{QP} \wedge \vec{\delta} \rightarrow \overrightarrow{PH}^2 = \left\|\overrightarrow{PH}\right\|^2 = PH^2 = \left\|\overrightarrow{QP} \wedge \vec{\delta}\right\|^2 = \left(\overrightarrow{QP} \wedge \vec{\delta}\right).\left(\overrightarrow{QP} \wedge \vec{\delta}\right)$$
$$= \vec{\delta}.\left(\left(\overrightarrow{QP} \wedge \vec{\delta}\right) \wedge \overrightarrow{QP}\right)$$

Donc :

$$I_{(\Delta)} = \int_{P\in S} (PH)^2 dm = \int_{P\in S} \vec{\delta}.((\overrightarrow{QP}\wedge\vec{\delta})\wedge\overrightarrow{QP})dm = \vec{\delta}.\int_{P\in S} ((\overrightarrow{QP}\wedge\vec{\delta})\wedge\overrightarrow{QP})dm$$

L'application linéaire qui a tout vecteur $\vec{u}$ fait correspondre le vecteur $\int_{P\in S} \overrightarrow{QP}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{QP})dm$ est appelé opérateur d'inertie du solide (S) au point Q.

On a la relation

$$I_{(\Delta)} = I(Q,S).\vec{\delta}$$

Cette application est linéaire (produit vectoriel + intégrales) et est représentable par une matrice symétrique dans une base donnée.

$$I(Q,S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$$

Calculons les termes de la matrice d'inertie :

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur défini dans un système d'axe $R(Oxyz)$

$$\overrightarrow{QP}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{QP}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} zb - yc \\ xc - za \\ ya - xb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2a + z^2a - xyb - xzc \\ x^2b + z^2b - yzc - xya \\ x^2c + y^2c - xza - yzb \end{pmatrix}$$

En utilisant la notation matricielle, on remarque que ce terme peut s'écrire comme le produit de deux matrices :

$$\overrightarrow{QP}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{QP}) = \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

En intégrant sur S on obtient finalement en simplifiant par $\vec{u}$:

$$I(Q,S) =$$

$$\begin{bmatrix} \int_S (y^2 + z^2)dm & -\int_S xy\,dm & -\int_S xz\,dm \\ -\int_S xy\,dm & \int_S (x^2 + z^2)dm & -\int_S yz\,dm \\ -\int_S xz\,dm & -\int_S yz\,dm & \int_S (x^2 + y^2)dm \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{Qx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{Qy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{Qz} \end{bmatrix}$$

I_{Qx}, I_{Qy} et I_{Qz} : sont appelés respectivement **moments d'inertie par rapport aux axes Qx, Qy et Qz**

I_{xy}, I_{xz} et I_{yz} : sont appelés respectivement **produits d'inertie par rapport aux plans Qxy, Qxz et Qyz**

Le moment d'inertie par rapport au point Q :

$$I_Q = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

Les moments d'inertie par rapport à l'axe Qx :

$$I_{Qx} = \int_S (y^2 + z^2) dm$$

Les moments d'inertie par rapport à l'axe Qy :

$$I_{Qx} = \int_S (x^2 + z^2) dm$$

Les moments d'inertie par rapport à l'axe Qx :

$$I_{Qx} = \int_S (x^2 + y^2) dm$$

Définitions (au point Q):

– Repère d'inertie: repère dans lequel $I(Q, S)$ est une matrice diagonale

– Axes principaux d'inertie: axes du repère d'inertie

– Moments d'inertie principaux: moments d'inertie par rapport aux axes principaux d'inertie, c-à-d éléments diagonaux de $I(Q,S)$ dans le repère d'inertie

La matrice est symétrique à valeurs réelles, il est donc possible de trouver une base orthonormée (Q, $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{y}_1, \overrightarrow{z}_1$) pour laquelle la matrice d'inertie est diagonale. Cette base est appelée base principale d'inertie du solide S.

Elle s'ecrit :

$$I(Q,S)\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix} \overrightarrow{u}$$

Avec :

$\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{y}_1, \overrightarrow{z}_1$: axes principaux d'inertie.

A1, B1, C1 : moments principaux d'inertie.

Le repère dont l'origine est le centre d'inertie G du solide S et dont les axes sont parallèles à ceux de la base principale d'inertie du solide S, est appelé repère central d'inertie.

4.4.2.1-.Solides présentant des plans de symétrie

- **Si Oxy est un plan de symétrie**

A tout point M_1 de côte z, on peut associer le point M_2 de côté –z :

$$Z_G = 0$$

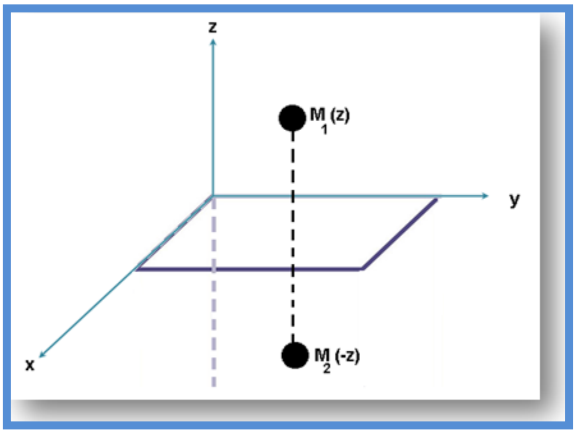

Figure 3.18

Donc :

$$I_{xz} = \int_S \text{xz dm} = 0 \text{ et } I_{yz} = \int_S \text{yz dm} = 0$$

Aors :

$$I(Q,S) = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Qz} \end{bmatrix}$$

- **Si Oyz est un plan de symétrie**

A tout point M_1 de côte x, on peut associer le point M_2 de côté –x :

$$X_G = 0$$

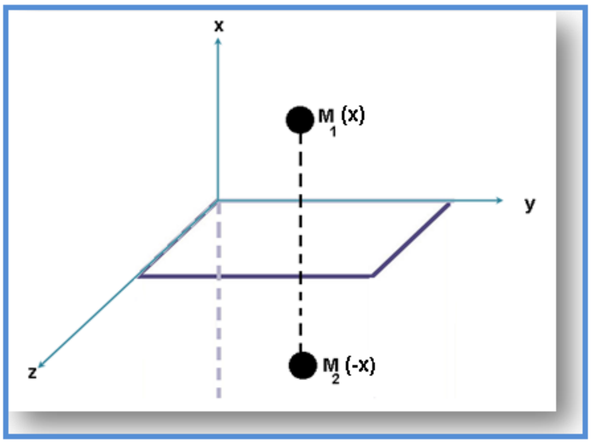

Figure 3.19

Donc :

$$I_{xz}I_{xz} = \int_S \text{xz dm} = 0 \text{ et } I_{xy}I_{xy} = \int_S \text{xy dm} = 0$$

Aors :

$$I(Q,S) = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & -I_{yz} \\ 0 & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

- **Si Oxz est un plan de symétrie**

A tout point M_1 de côte y, on peut associer le point M_2 de côté –y :

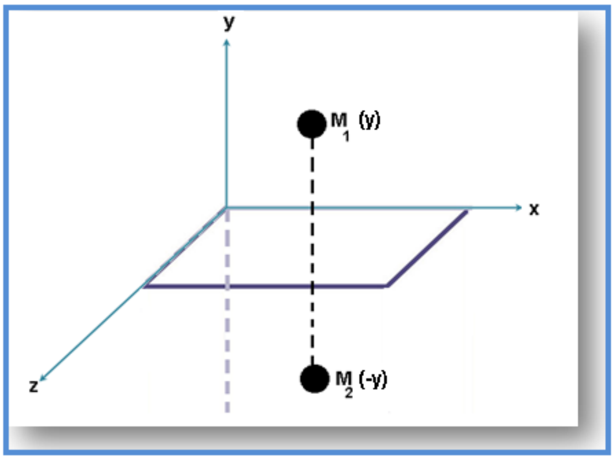

Figure 3.20

Donc :

$$I_{xy}I_{xy} = \int_S xy \text{ dm} = 0 \text{ et } I_{yz}I_{yz} = \int_S yz \text{ dm} = 0$$

Aors :

$$II(Q,S) = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

2.1.1Moments quadratiques (moments d'inertie des sections)

On appelle moment quadratique l'intégrale des produits des aires élémentaires par le carré de leurs distances à partir de l'axe considéré, ainsi, les moments d'inertie d'une surface (S) quelconque par rapport à OY et OZ sont les suivants:

$$I_{Qy} = \int_{S} z^2 dS$$

Et

$$I_{Qz} = \int_{S} y^2 dS$$

Les moments d’inertie par rapport aux axes passant par le centre de gravité de la section sont des moments centraux.