

# CHAPITRE I CALCUL VECTORIEL

2eme année ST Option (B) Mécanique Rationnelle (MR) 2020

## Résumé Calcul vectoriel

Soit un vecteur  $\vec{V}$ :

- Composantes:  $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- module  $\|\vec{V}\| = V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

- vecteur unitaire  $\vec{\mu}_V$  (vecteur de direction)

$$\vec{\mu}_V = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} = \frac{x}{V}\vec{i} + \frac{y}{V}\vec{j} + \frac{z}{V}\vec{k}; \vec{V} = V \cdot \vec{\mu}_V$$

$$\vec{\mu}_V = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$$

$$(\alpha: (\vec{V}, ox); \beta: (\vec{V}, oy); \gamma: (\vec{V}, oz))$$

$$\vec{V}_1 \parallel \vec{V}_2 \Leftrightarrow \vec{\mu}_1 = \vec{\mu}_2$$

||: vecteurs parallèles,

⊥: vecteurs perpendiculaires

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

### Opération sur les vecteurs

#### 1- Somme de vecteurs( Résultante)

$$\vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \dots = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + \dots \\ y_1 + y_2 + y_3 + \dots \\ z_1 + z_2 + z_3 + \dots \end{pmatrix}$$

#### 2- Produit scalaire

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = V_1 \cdot V_2 \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

- produit scalaire commutatif:  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$

#### 3- produit vectoriel

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i}(y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2) - \vec{j}(x_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot x_2) + \vec{k}(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1)$$

- produit vectoriel **non** commutatif

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \times \vec{V}_1$$

#### Propriétés

$$\checkmark \vec{V}_1 = \vec{V}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \vec{V}_1 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = 0 \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \Leftrightarrow \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$$

( une équation:  $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$  )

$$\checkmark \vec{V}_1 \parallel \vec{V}_2 \Leftrightarrow \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \vec{0} \text{ (3 equations:}$$

$$y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2 = 0 \dots (1)$$

$$x_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot x_2 = 0 \dots (2)$$

$$x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 = 0 \dots (3)$$

$$\checkmark \vec{V}_1 \parallel \vec{V}_2 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = cste$$

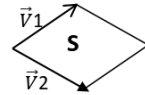
$$\checkmark \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

$$\checkmark \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\checkmark \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\checkmark \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

$$\checkmark \|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\| = \text{Surface } S$$



#### Produit vectoriel dans le cas plan

$$\vec{V}_1(x_1, y_1); \vec{V}_2(x_2, y_2);$$

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) \vec{k}$$

#### Produit mixte:

$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \times \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \text{ (détermine les}$$

volumes créés par ces vecteurs.

#### Les lois sinus cosinus dans un triangle

En trigonométrie, la loi des sinus et des cosinus est une relation de proportionnalité entre les longueurs des côtés d'un triangle et les sinus (cosinus) des angles respectivement opposés. Elle permet, connaissant deux angles et un côté, de calculer la longueur des autres côtés.

##### ✓ Loi des sinus

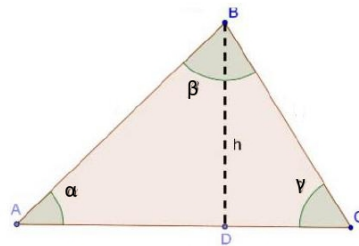
$$\frac{\sin\alpha}{BC} = \frac{\sin\beta}{AC} = \frac{\sin\gamma}{AB}$$

##### ✓ Loi des cosinus

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\gamma}$$

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos\alpha}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\beta}$$



#### Dérivée d'un vecteur

Dans un repère fixe (i, j, k):

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

## CHAPITRE II LA STATIQUE

### 1.6.1 Définition d'une force

Une force est une grandeur vectorielle qui se note "F". Elle est caractérisée par :

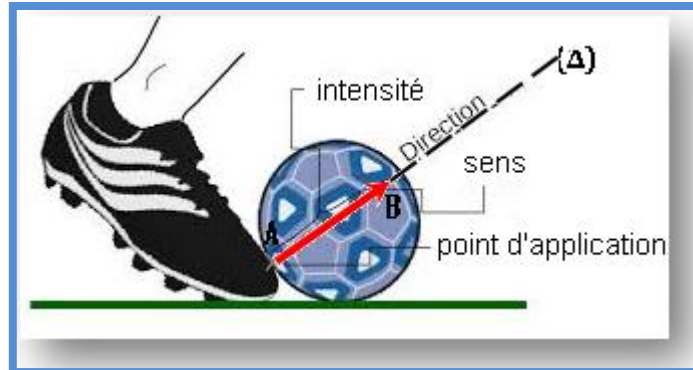


Figure 1.5

- ➔ son point d'application (son origine),
- ➔ sa direction (son support),
- ➔ son sens,
- ➔ son module ou sa valeur.

#### -Composantes d'un vecteur force

- Dans un plan Oxy

On peut écrire:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

Si le vecteur force effectue un angle  $\theta$  avec l'axe horizontal, alors on peut exprimer ses composantes  $F_x$  et  $F_y$  de la façon suivante :

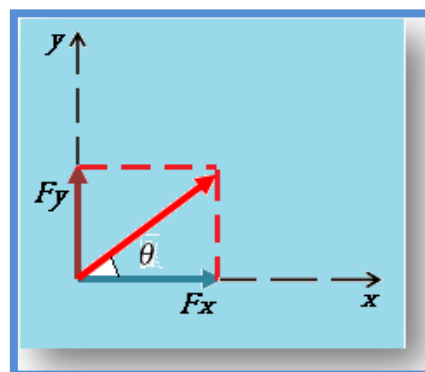


Figure 1.6

$$F_x = F \cos \theta$$

$$F_y = F \sin \Theta$$

Donc :

$$\vec{F} = F \cos \Theta \vec{i} + F \sin \Theta \vec{j}$$

- Dans l'espace Oxyz

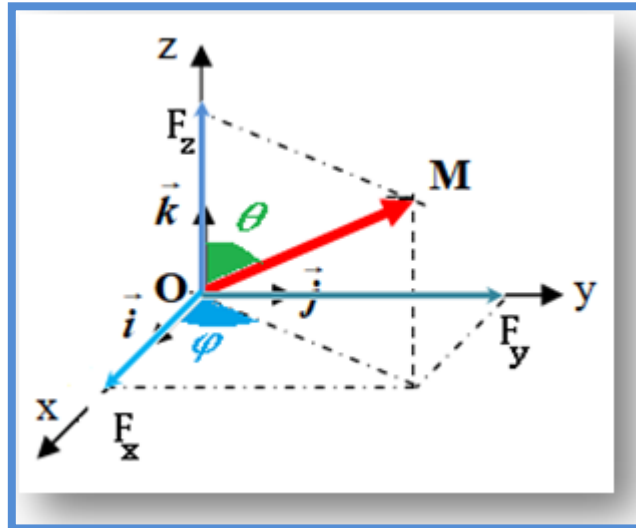


Figure 1.7

On peut écrire:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

Si le vecteur force effectue un angle  $\theta$  et sa projection sur le plan Oxy fait un angle  $\varphi$  l'axe Ox, alors on peut exprimer ses composantes  $F_x$  et  $F_y$  et  $F_z$  de la façon suivante :

$$F_x = F \sin \Theta \cos \varphi$$

$$F_y = F \sin \Theta \sin \varphi$$

$$F_z = F \cos \Theta$$

Donc :

$$\vec{F} = F \sin \Theta \cos \varphi \vec{i} + F \sin \Theta \sin \varphi \vec{j} + F \cos \Theta \vec{k}$$

### 1.6.2 Moment d une force par rapport à un point

Le moment d'une force  $\vec{F}$  par rapport à un point P, est égal au produit vectoriel des deux vecteurs  $\vec{PA}$   $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{F}$   $\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$ .

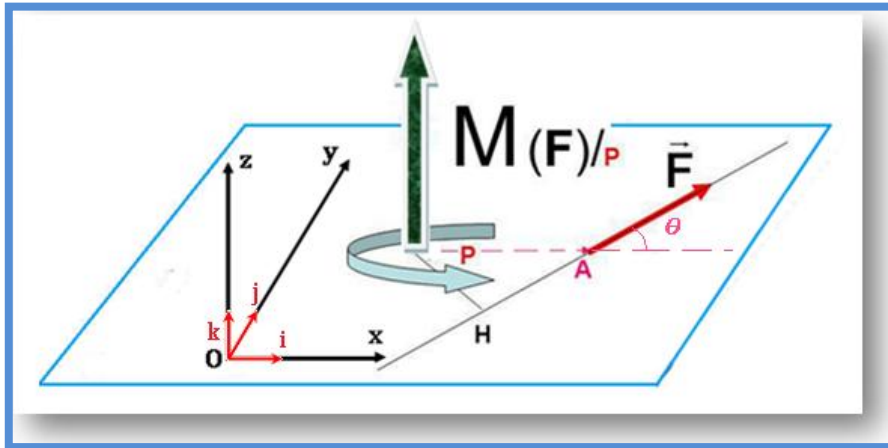


Figure 1.8

Il s'écrit :

$$\vec{M}(\vec{F})/P = \vec{PA} \wedge \vec{F}$$

Ce moment  $\vec{M}(\vec{F})/P$  est un vecteur qui est perpendiculaire au plan qui contient les deux vecteurs  $\vec{PA}$  et  $\vec{F}$ .

-Méthode géométrique

$$\vec{M}(\vec{F})/P = \vec{PA} \wedge \vec{F} = \|\vec{PA}\| \|\vec{F}\| \cos \theta \vec{u}$$

-Méthode analytique

$$\vec{M}(\vec{F})/P = \vec{PA} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{i} - (xF_z - zF_x)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

d'où :

$$M_{Px} = yF_z - zF_y$$

$$M_{Py} = xF_z - zF_x$$

$$M_{Pz} = xF_y - yF_x$$

Méthode directe

Le moment d'une force  $\vec{F}$ , par rapport à un point P, est égal au produit du module F de la force par le bras de levier d (distance entre le point A et la direction de la force  $\vec{F}$ :  $d = PH$ ).

Il s'écrit :

$$M(\vec{F})/P = \pm Fd$$

### 1.6.3 Condition d'équilibre

L'équilibre d'un solide a lieu lorsque les résultantes des forces et de leurs moments sont nulles. Il est décrit par les deux équations :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \dots\dots(1.1)$$

$$\sum \vec{M}(\vec{F})/P = \vec{0} \dots\dots(1.2)$$

Avec :

·  $\sum \vec{F}$  : résultante de toutes les forces extérieures agissant sur le corps

$\sum \vec{M}(\vec{F})/P$  : résultante des moments de toutes ces forces extérieures par rapport à un point arbitraire P

Dans l'espace (Oxyz), ces deux équations précédentes donnent :

$$\sum F_x = 0 ; \quad \sum F_y = 0 ; \quad \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0 ; \quad \sum M_y = 0 ; \quad \sum M_z = 0$$

-Dans le plan (Oxy), ces deux équations donnent :

$$\sum F_x = 0 ; \quad \sum F_y = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

### Problème isostatique

On dit qu'un système d'équations est isostatique si le corps possède autant d'inconnues que d'équations ; dans ce cas, les équations suffisent à résoudre le problème.

### Problème isostatique

Si par contre système d'équations possède plus d'inconnues que d'équations d'équilibre, le problème est hyperstatique.

Le degré d'hyperstaticité n est donné par la formule suivante :

$$n = Nr - Ne$$

$N_e$  : nombre d'équations (ex pour un solide dans le plan,  $N_e=3$ )

$N_r$  : nombre de composantes de réaction

$n$  : degré d'hyperstaticité

si  $n < 0$  : le problème est hypostatique (pb instable insoluble)

si  $n=0$  : le problème est isostatique

si  $n > 0$  : le problème est hyperstatique

### 1.7 Différents types de forces

L'ensemble des forces agissant sur une poutre ou une structure s'explique par quatre types de forces :

- les forces appliquées et les charges;
- les forces d'appui ou de contact;
- les forces internes

#### 1.7.1 Forces appliquées et les charges

Les forces extérieures elles-mêmes peuvent être classées en :

- forces de concentrées
- forces linéiques [N/m] : ces forces s'appliquent le long d'une ligne

Le câble flexible d'un pont suspendu peut être considéré comme une ligne à une dimension le long de laquelle s'applique le poids de la chaussée.



Figure 1.8

– forces surfaciques [ $\text{N}/\text{m}^2$ ] : ces forces s'appliquent sur une surface  
 Dans un barrage hydraulique, la pression de l'eau s'applique sur toute la surface du mur. Cette pression est proportionnelle à la profondeur.

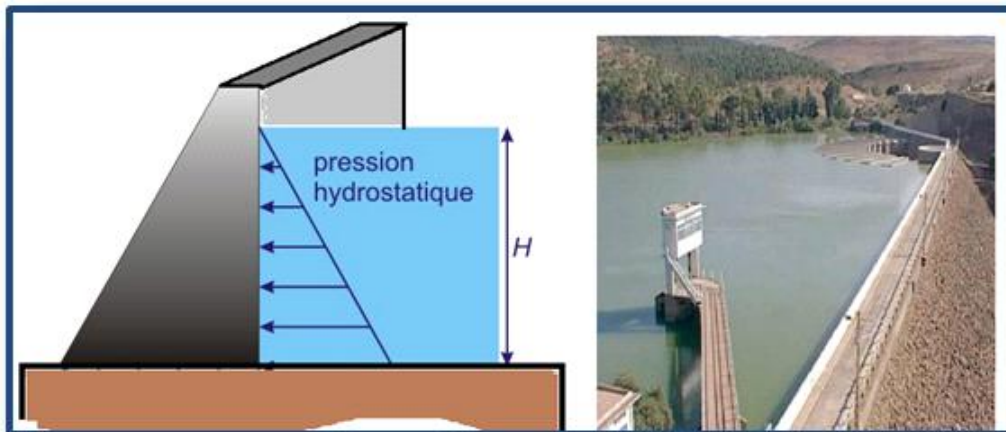


Figure 1.9

– forces volumique [ $\text{N}/\text{m}^3$ ] : ces forces s'appliquent sur un volume  
 La force de pesanteur est une force volumique, car elle s'exerce sur les éléments de volume.

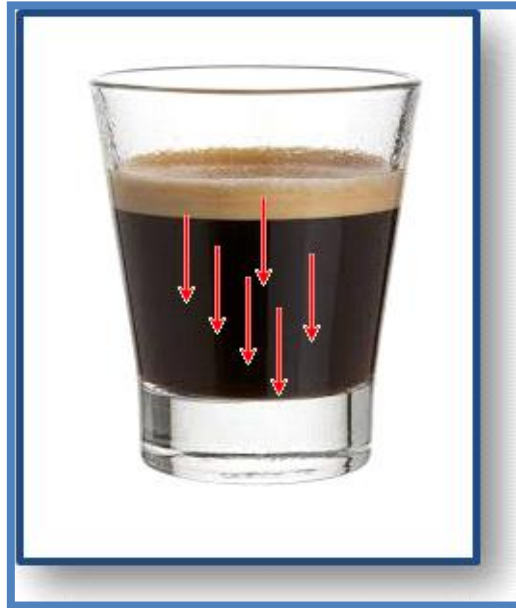


Figure 1.10

### 1.7.2 Forces de contact et réactions

Elles ne peuvent s'exercer qu'entre des corps en contact. Ex : le cahier sur la table (l'action mécanique exercée par la table sur le cahier empêche celui-ci de tomber).

La détermination des réactions d'appuis est nécessaire avant de faire une étude en RDM ; on doit chercher leurs points d'applications, leurs directions et leurs intensités.

Il existe trois types d'appuis:

**Appuis simples** : appuis ponctuels, de direction de réaction normale (Autour d'un tel appui, la poutre possède deux degrés de libertés : en rotation ( $Oz$ ) et translation ( $Ox$ ). Un seul inconnu  $R=R_y$ )





Figure 1.11

**Appuis doubles ou articulations** : malgré que le point d'application est connu mais la direction et l'intensité de la force de réaction sont les deux inconnues (Autour d'un tel appui, la poutre possède un seul degré de liberté : en rotation ( $Oz$ ). Dans ce cas, la réaction d'appui  $\mathbf{R}$  constituée de deux composantes ( $R_x$  et  $R_y$ )).

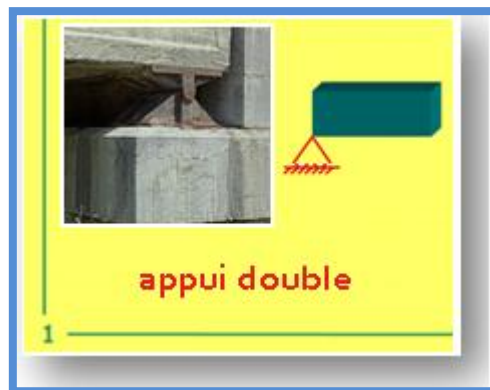


Figure 1.12

**Appuis triples ou encastrement** : Aucun degré de liberté n'existe pour la poutre dans ce type d'appui (Les inconnues sont d'une part le moment d'encastrement  $\mathbf{M}$  et d'autre part la réaction d'appui  $\mathbf{R}$  constituée de deux composantes ( $R_x$  et  $R_y$ )).



Figure 1.13

Ces deux appuis ainsi que l'encastrement sont schématisés comme suit :

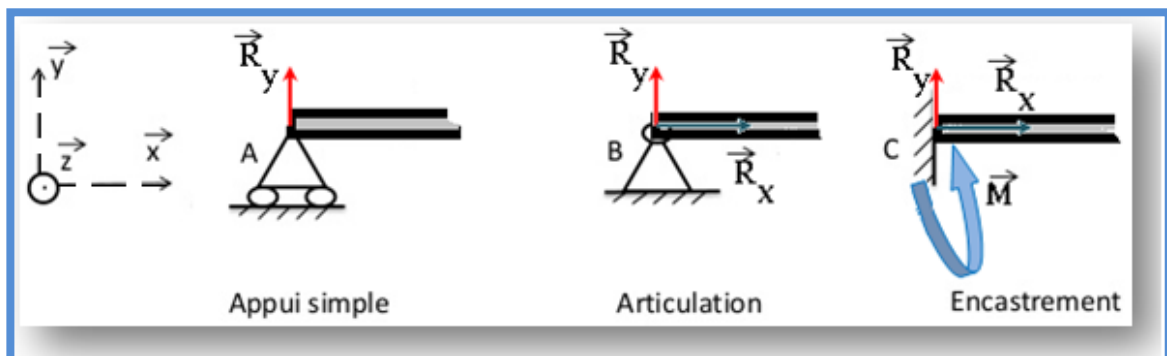


Figure 1.14

### 1.7.3 Forces internes

La résistance des matériaux suppose la maîtrise du principe de la statique. En statique, l'idéalisation d'un corps réel en corps rigide permet de déterminer en plus des forces externes les forces internes s'exerçant sur les structures porteuses uniquement à l'aide des conditions d'équilibre.

Les forces internes agissent entre différentes parties d'une même structure.

## **CHAPITRE III GEOMETRIE DE MASSE**

### **4.1-Introduction**

Pour comprendre et décrire les critères de résistance, de rigidité ou de stabilité des différents éléments du système mécanique (pièces) ou d'une structure (poutre) de différentes formes des sections transversales des éléments utilisés dans les constructions, il est indispensable de connaître un certain nombre de données sur la répartition des masses des systèmes, notamment la localisation du centre de masses et la détermination des moments d'inertie et produits d'inertie

### **4.2-Masse**

La notion de masse La masse d'un corps est la quantité de matière contenue dans ce corps. La masse caractérise l'inertie du corps c'est-à-dire la plus au moins grande difficulté de mettre ce corps au mouvement

#### **4.2.1- Masse d un système matériel**

On appelle système matériel tout ensemble de points matériels.

##### **4.2.1.1-Système discret**

Un système matériel a une masse : la masse du système est la somme des masses des points matériels qui le constituent :

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n = \sum_{i=1}^n m_i$$

La masse d'un système ne dépend pas du repère d'observation. L'unité internationale de masse est le kilogramme (symbole : kg).

#### 4.2.1.2- Système continu

##### 4.2.1.2.1-Masse volumique $\rho$

La masse d'un système constitué d'un ensemble continu de masses s'écrit sous la forme :

$$m = \iiint_m dm = \iiint_V \rho dV$$

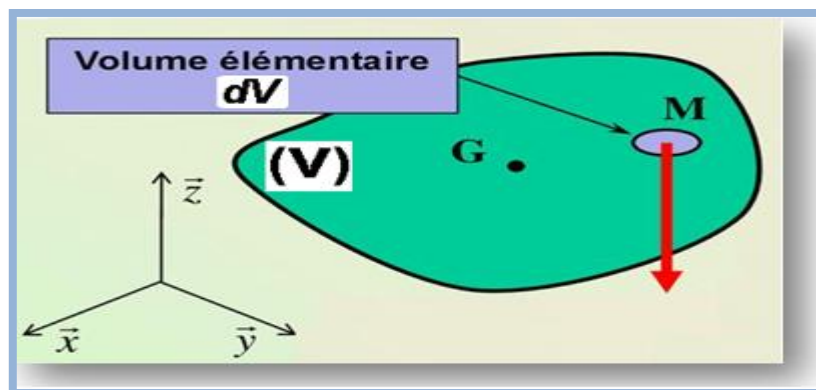


Figure 3.1

##### -Distribution homogène

Dans ce cas, on a :

$$\rho_1 = \rho_2 = \dots \rho_n = cte$$

Donc :

$$m = \rho \iiint_V dV = \rho V$$

##### -Distribution non-homogène

Dans ce cas, on a :

$$\rho_1 \neq \rho_2 \neq \dots \neq \rho_n = \rho(x, y, z) \text{ Donc :}$$

$$m = \iiint_V \rho dV$$

#### 4.2.1.2.2-Masse surfacique $\sigma$

La masse d'un système constitué d'un ensemble continu de masses s'écrit sous la forme :

$$m = \iint_m dm = \iint_S \sigma dS$$

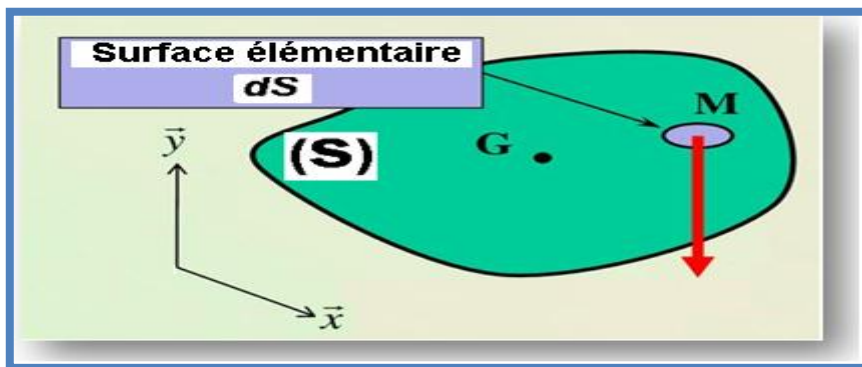


Figure 3.2

#### -Distribution homogène

Dans ce cas, on a :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots \sigma_n = cte$$

Donc :

$$m = \sigma \iint_S dS = \sigma S$$

#### -Distribution non-homogène

Dans ce cas, on a :

$$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \dots \neq \sigma_n = \sigma(x, y)$$

Donc :

$$m = \iint_S \sigma dS$$

#### 4.2.1.2.3-Masse linéique $\sigma$

La masse d'un système constitué d'un ensemble continu de masses s'écrit sous la forme :

$$m = \int_m dm = \int_L \kappa dL$$

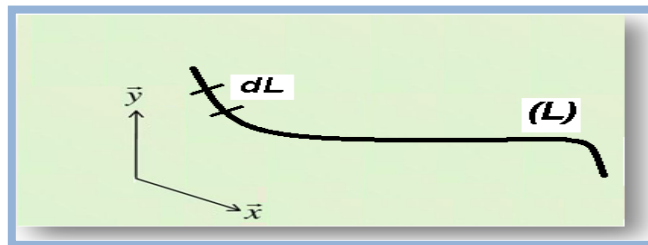


Figure 3.3

#### -Distribution homogène

Dans ce cas, on a :

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \dots \kappa_n = cte$$

Donc :

$$m = \kappa \int_L dL = \kappa L$$

#### -Distribution non-homogène

Dans ce cas, on a :

$$\kappa_1 \neq \kappa_2 \neq \dots \neq \kappa_n = \kappa(x, y)$$

Donc :

$$m = \int_L \rho \, dL$$

### 4.3-Centre de masse

#### 4.3.1- Définition du centre de masse

Soit (S) un système de points matériels  $A_i$  de masse  $m_i$  défini dans un repère ( $O$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ). Ces points matériels  $A_i$  sont repérés par les vecteurs positions :

$$\overrightarrow{OA_i} = \vec{r}_i(x_i, y_i, z_i)$$

La masse totale du système

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

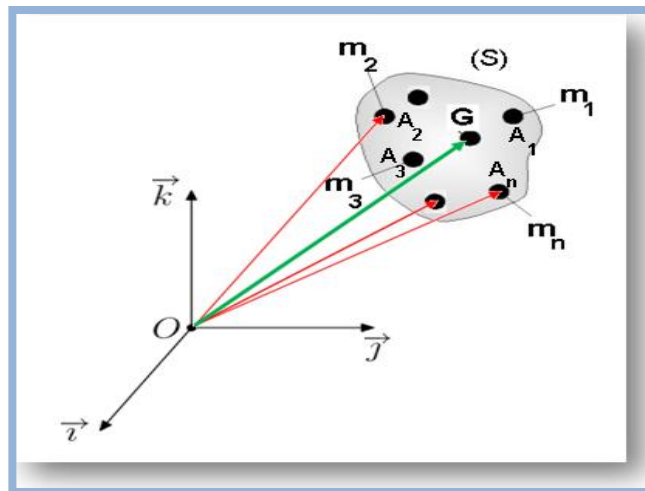


Figure 3.4

**Définition** : Le centre d'inertie  $G$  (appelé aussi centre de masse ou centre de gravité) de l'ensemble des points  $M_i$  est le barycentre défini par :

$$\overrightarrow{OG} \sum m_i = \sum m_i \vec{r}_i$$

$$\overrightarrow{OG} = \vec{r}_G = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

Le point G ( $X_G, Y_G, Z_G$ ) est appelé centre de masse, ou encore centre d'inertie, ou barycentre.

Dans un système d'axes (Oxyz), l'équation précédente donne :

$$X_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

$$Y_G = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$$

$$Z_G = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

#### 4.3.1.1- Système continu (solide)

Pour un système continu, on a :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OA}(x, y, z)$$

Donc :

$$\vec{r}_G = \overrightarrow{OM} = \frac{\int_m \vec{r} dm}{\int_m dm}$$

##### 4.3.1.1.1- Masse volumique $\rho$

La masse d'un système constitué d'un ensemble continu de masses s'écrit sous la forme :

$$m = \iiint_m dm = \iiint_V \rho dV$$

##### -Distribution homogène

Dans ce cas, on a :



$$\rho_1 = \rho_2 = \dots \rho_n = cte$$

Donc :

$$m = \rho \iiint_V dV = \rho V$$

Donc :

$$\vec{r}_G = \overrightarrow{OG} = \frac{\iiint_V \vec{r} dV}{\iiint_V dV}$$

Dans un système d'axes (Oxyz), l'équation précédente donne :

$$X_G = \frac{\iiint_V x dV}{\iiint_V dV}$$

$$Y_G = \frac{\iiint_V y dV}{\iiint_V dV}$$

$$Z_G = \frac{\iiint_V z dV}{\iiint_V dV}$$

**-Distribution non-homogène**

Dans ce cas, on a :

$$\rho_1 \neq \rho_2 \neq \dots \neq \rho_n = \rho(x, y, z)$$

Donc :

$$m = \iiint_V \rho dV$$

Donc :

$$\vec{r}_G = \overrightarrow{OM} = \frac{\iiint_V \rho \vec{r} dV}{\iiint_V \rho dV}$$

Dans un système d'axes (Oxyz), l'équation précédente donne :

$$X_G = \frac{\iiint_V \rho x dV}{\iiint_V \rho dV}$$

$$Y_G = \frac{\iiint_V \rho y dV}{\iiint_V \rho dV}$$

$$Z_G = \frac{\iiint_V \rho z dV}{\iiint_V \rho dV}$$

#### 4.3.1.1.2- Masse surfacique $\sigma$

La masse d'un système constitué d'un ensemble continu de masses s'écrit sous la forme :

$$m = \iint_m dm = \iint_S \sigma dS$$

$$\vec{r}_G = \overrightarrow{OG} = \frac{\iint_S r \sigma dS}{\iint_S \sigma dS}$$

-Distribution homogène

Dans ce cas, on a :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots \sigma_n = cte$$

alors :

$$m = \sigma \iint_S dS$$

Donc :

$$\vec{r}_G = \overrightarrow{OG} = \frac{\iint_S r dS}{\iint_S dS}$$

Dans sytemes d'axes Oxy, on obtient :

$$X_G = \frac{\iint_S x dS}{\iint_S dS}$$

$$Y_G = \frac{\iint_S y dS}{\iint_S dS}$$

### **-Distribution non-homogène**

Dans ce cas, on a :

$$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \dots \neq \sigma_n = \sigma(x, y)$$

Donc :

$$m = \iint_S \sigma dS$$

Dans systèmes d'axes Oxy, on obtient :

$$X_G = \frac{\iint_S x \sigma dS}{\iint_S \sigma dS}$$

$$Y_G = \frac{\iint_S y \sigma dS}{\iint_S \sigma dS}$$

#### 4.3.1.1.3- Masse lineique $\lambda$

La masse d'un système constitué d'un ensemble continu de masses s'écrit sous la forme :

$$m = \int_m dm = \int_L \lambda dL$$

$$\vec{r}_G = \overrightarrow{OG} = \frac{\int_L r \lambda dL}{\int_L \lambda dL}$$

#### -Distribution homogène

Dans ce cas, on a :

$$\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_n = \text{cte}$$

Donc :

$$m = \rho \int_L dL$$

$$\vec{r}_G = \overline{OG} = \frac{\int_L r dL}{\int_L dL}$$

Dans un système d'axe Oxy, on obtient :

$$X_G = \frac{\int_L x dL}{\int_L dL}$$

$$Y_G = \frac{\int_L y dL}{\int_L dL}$$

### -Distribution non-homogène

Dans ce cas, on a :

$$\rho_1 \neq \rho_2 \neq \dots \neq \rho_n = \rho(x, y)$$

Donc :

$$m = \int_L \rho dL$$

$$X_G = \frac{\int_L x \times dL}{\int_L \times dL}$$

$$Y_G = \frac{\int_L y \times dL}{\int_L dL}$$

### 4.3.2- Théorèmes de Guldin

Les deux théorèmes de Guldin facilitent parfois la recherche des centres de gravité des surfaces et lignes planes, ou permettent le calcul des surfaces et des volumes de différents corps de révolution.

#### 4.3.2.1- 1<sup>er</sup> théorème de Guldin

L'aire d'une surface de révolution d'axe (Oy) engendrée par la rotation autour de (Oy) d'une courbe (L) contenue dans le plan (xOz) est égale au produit de la longueur de la courbe par la longueur du cercle décrit par son centre de gravité.

$$X_G = \frac{S_y}{2\pi L}$$

$$Y_G = \frac{S_x}{2\pi L}$$

$(X_G, Y_G)$ : coordonnées du centre de gravité de la courbe (L)

$S_y, S_x$  : aires de surface de révolution de la courbe (L) autour de l'axe Oy et Ox respectivement

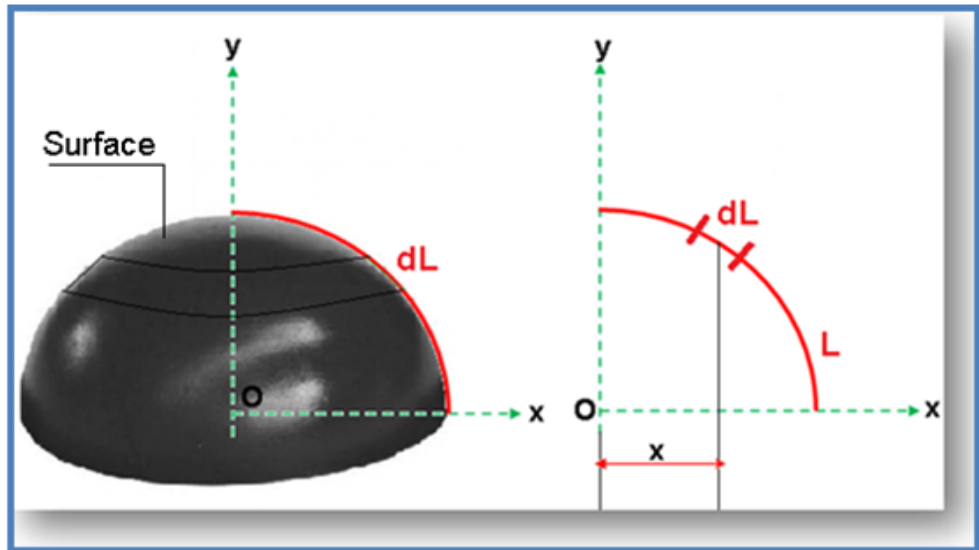


Figure 3.5

Demonstrons que :

$$X_G = \frac{S_y}{2\pi L}$$

$$Y_G = \frac{S_x}{2\pi L}$$

1/-pour  $X_G$  : rotation de la courbe (L) autour de l'axe Oy

Soit une courbe (L) tournant autour de l'axe Oy , ne le coupant pas.

L'élément dL engendre une surface dS telle que:

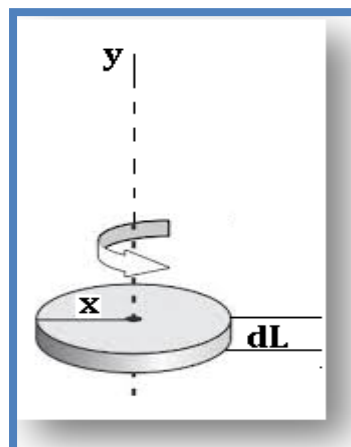


Figure 3.6

$$dS = 2\pi x dL$$

La surface totale engendrée sera :

$$S_y = \iint_S dS = \int_L 2\pi x dL$$

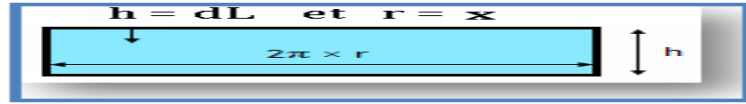


Figure 3.7



$$S_y = 2\pi \int_L x dL \dots \dots \dots (a)$$

D'autre par on sait que :

$$X_G = \frac{\int_L x dL}{\int_L dL}$$

$$\rightarrow X_G \int_L dL = \int_L x dL \dots \dots \dots (b)$$

(b) dans (a) donne :

$$S_y = 2\pi X_G \int_L dL$$

$$\rightarrow S_y = 2\pi X_G L$$

Donc :

$$X_G = \frac{S_y}{2\pi L}$$

Avec :

$X_G$  : cordonnée du centre de gravité de la courbe (L)

$S_y$  : aire surface de révolution de la courbe (L) autour de l'axe Oy

$2l$ -pour  $Y_G$ : rotation de la courbe (L) autour de l'axe Ox

Soit une courbe (L) tournant autour de l'axe Ox , ne le coupant pas. L'élément dL engendre une surface dS telle que:

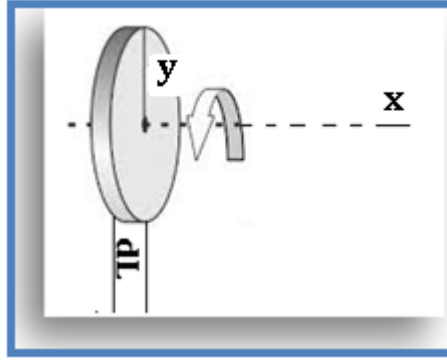


Figure 3.8

$$S_x = \iint_S dS = \int_L 2\pi y dL$$

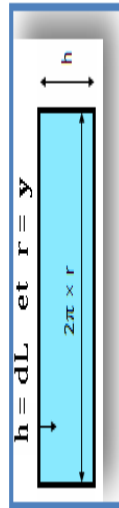


Figure 3.9

$$S_x = 2\pi \int_L y dL \dots \dots \dots (c)$$

D'autre par on sait que :

$$Y_G = \frac{\int_L y dL}{\int_L dL}$$

$$\rightarrow Y_G \int_L dL = \int_L y dL \dots \dots \dots (d)$$

(d) dans (c) donne :

$$S_x = 2\pi Y_G \int_L dL$$

$$\rightarrow S_x = 2\pi Y_G L$$

Donc :

$$Y_G = \frac{S_x}{2\pi L}$$

Avec :

$Y_G$  : cordonnée du centre de gravité de la courbe (L)

$S_x$  : aire surface de révolution de la courbe (L) autour de l'axe Ox

#### 4.3.2.1- 2<sup>ème</sup> théorème de Guldin

Le volume engendré par la rotation d'une surface (S) plane homogène autour d'un axe (Oy) situé dans son plan (Oxy) et qui ne la traverse pas est égal au produit de l'aire de la surface par la longueur de circonférence décrite par le centre de gravité de la surface.

$$X_G = \frac{V_y}{2\pi S}$$

$$Y_G = \frac{V_x}{2\pi S}$$

$(X_G, Y_G)$  : coordonnées du centre de gravité de la surface (S)

$V_y$  et  $V_x$  : volumes de révolution de la courbe (S) autour de l'axe Oy et Ox respectivement

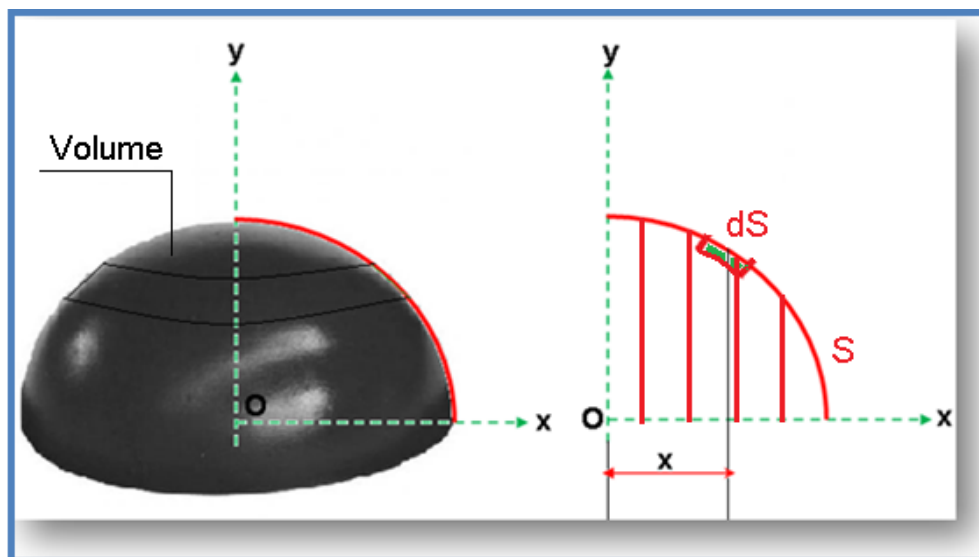


Figure 3.10

Demonstrons que :

$$X_G = \frac{V_y}{2\pi S}$$

$$Y_G = \frac{V_x}{2\pi S}$$

1/-pour  $X_G$  : rotation de la surface (S) autour de l'axe Oy

Soit une surface plane (S) tournant autour de l'axe Oy, ne le coupant pas. L'élément  $dS$  engendre un volume  $dV$  tel que:

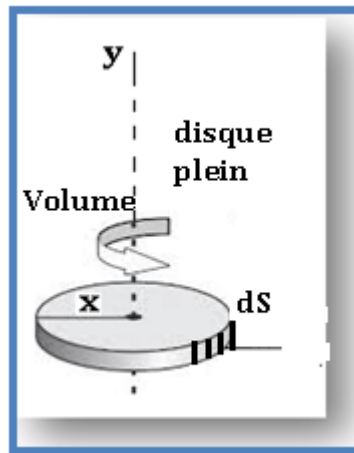


Figure 3.11

$$dV = 2\pi x dS$$

La surface totale engendrée sera :

$$V_y = \iiint dV = \iiint 2\pi x dS$$

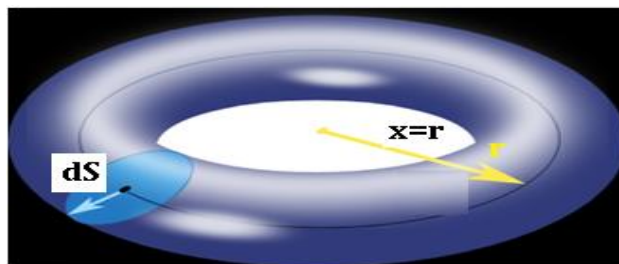


Figure 3.12

$$V_y = 2\pi \int_L \iint x dS \dots \dots (e)$$

D'autre par on sait que :

$$X_G = \frac{\iint_S x dS}{\iint_S dS}$$

$$\rightarrow X_G \iint_S dS = \iint_S x dS \dots \dots \dots (f)$$

(f) dans (e) donne :

$$V_y = 2\pi X_G \iint_S dS$$

$$\rightarrow V_y = 2\pi X_G S$$

Donc :

$$X_G = \frac{V_y}{2\pi S}$$

Avec :

$X_G$  : cordonnée du centre de gravité de la surface (S)

$V_y$  : aire surface de révolution de la surface (S) autour de l'axe Oy

2/-pour  $Y_G$ : rotation de la courbe (L) autour de l'axe Ox

Soit une courbe (L) tournant autour de l'axe Ox , ne le coupant pas. L'élément dL engendre une surface dS telle que:

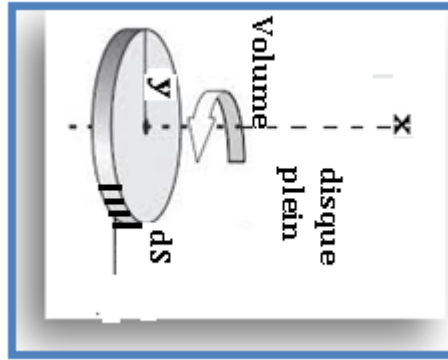


Figure 3.13  
 $dV = 2\pi x ds$

La surface totale engendrée sera :

$$V_x = \iiint dV = \iiint 2\pi y ds$$

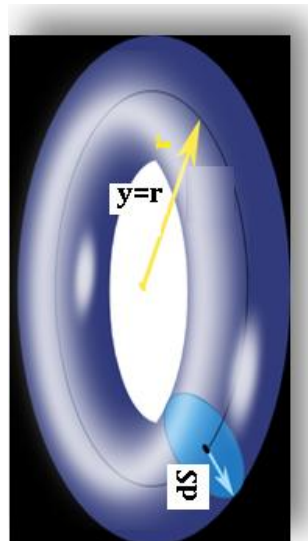


Figure 3.14

$$V_x = 2\pi \int_L \iint y dS \dots \dots (e)$$

D'autre par on sait que :

$$Y_G = \frac{\iint_S y dS}{\iint_S dS}$$

$$\rightarrow Y_G \iint_S dS = \iint_S y dS \dots \dots (f)$$

(f) dans (e) donne :

$$V_x = 2\pi Y_G \iint_S dS$$

$$\rightarrow V_x = 2\pi Y_G S$$

Donc :

$$Y_G = \frac{V_x}{2\pi S}$$

Avec :

$Y_G$  : cordonnée du centre de gravité de la surface (S)

$V_x$  : aire surface de révolution de la surface (S) autour de l'axe Ox

#### 4.3.3-. Principe de subdivision

Lorsqu' un système est composé d'un assemblage de systèmes élémentaires simples pour lesquels les calculs sont aisés. On procède alors en deux étapes :

- détermination du centre d'inertie de chaque système élémentaire
- détermination du centre d'inertie de l'ensemble



C'est ce qu'on appelle faire une détermination par subdivision (ou fractionnement)

D'une façon générale, les coordonnées du centre de gravité ce système d'éléments sont données par :

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^n X_{Gi} m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{Gi} m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$Z_G = \frac{\sum_{i=1}^n Z_{Gi} m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Remarques

- Dans le cas ou on a une densité volumique constante ( $\rho = \text{cte}$ ), ces équations précédentes peuvent s'expliciter selon :

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^n X_{Gi} V_i}{\sum_{i=1}^n V_i}$$

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{Gi} V_i}{\sum_{i=1}^n V_i}$$

$$Z_G = \frac{\sum_{i=1}^n Z_{Gi} V_i}{\sum_{i=1}^n V_i}$$

- Dans le cas ou on a une densité surfacique constante ( $\sigma = \text{cte}$ ), on obtient :

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^n X_{Gi} S_i}{\sum_{i=1}^n S_i}$$

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{Gi} S_i}{\sum_{i=1}^n S_i}$$

Prenons un exemple d'un assemblage constitué de deux éléments (1) et (2) avec une densité surfacique constante. Les coordonnées du centre de gravité de ce système d'éléments sont données par :

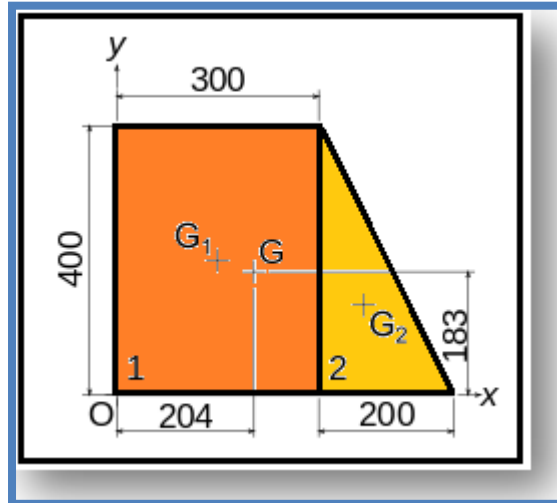


Figure 3.15

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^2 X_{Gi} S_i}{\sum_{i=1}^2 S_i} = \frac{X_{G1} S_1 + X_{G2} S_2}{S_1 + S_2}$$

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^2 Y_{Gi} S_i}{\sum_{i=1}^2 S_i} = \frac{Y_{G1} S_1 + Y_{G2} S_2}{S_1 + S_2}$$

#### 4.4- Moments d'inertie

Soit un solide S de masse m

Soient ( $\Delta$ ) un axe de ce solide S, Q un point quelconque de cet axe et  $\delta$  un vecteur unitaire orientant cet axe.

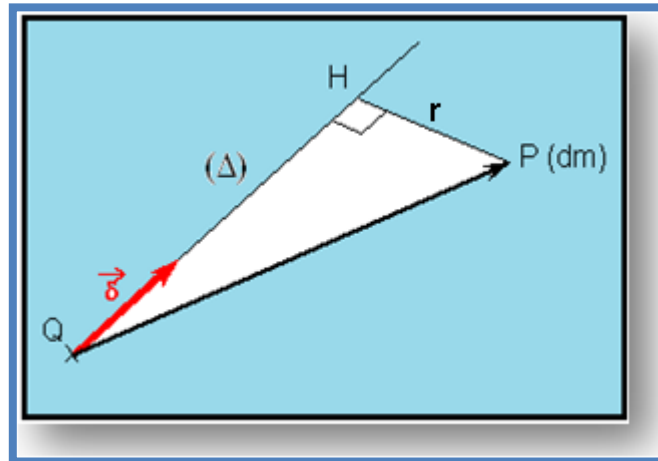


Figure 3.16

Soit P un point courant de ce solide, de masse  $dm$  situé à la distance courante  $r$  de l'axe  $(\Delta)$ .

Le moment d'inertie du solide S par rapport à un axe  $(\Delta)$  est donné par :

$$I_{(\Delta)} = \int_S r^2 dm$$

#### 4.4.1-Théorème de Huygens (changement d'axe de rotation)

Le **théorème de Huygens** (aussi appelé théorème du changement d'axe) permet de relier les **moments** d'inertie d'un solide par rapport à un axe et du solide par rapport à l'axe parallèle à et passant par G.

Soit  $I_{(\Delta)G}$  le moment d'inertie par rapport à l'axe passant par le centre de gravité G d'un solide (S) de masse  $m$  et soit  $(\Delta)$  un axe parallèle à l'axe  $(\Delta)_G$ .

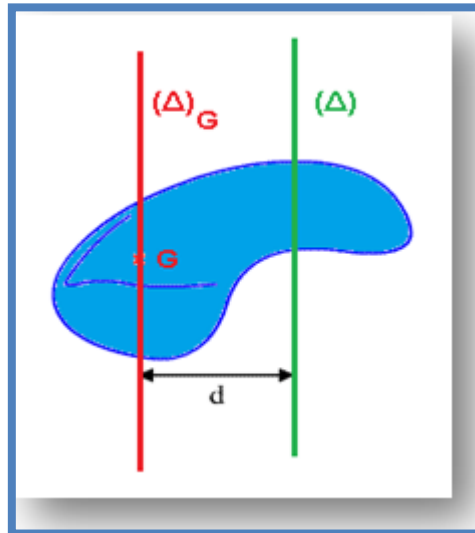


Figure 3.17

Le moment d'inertie par rapport à un axe  $(\Delta)$  s'explique selon :

$$I_{(\Delta)} = I_{(\Delta)G} + md^2$$

$d$  : distance entre les deux axes  $(\Delta)_G$  et  $(\Delta)$

#### Remarques

- Un moment d'inertie caractérise la distribution de la masse autour d'une droite.
- Le moment d'inertie  $I_{(\Delta)}$  caractérise la répartition de la masse du solide  $S$  par rapport à l'axe  $(\Delta)$ .
- L'unité d'un moment d'inertie est le kilogramme mètre carré  $[\text{kg.m}^2]$

#### 4.4.2- Operateur d'inertie d'un solide

Le moment d'inertie  $I_{(\Delta)} = \int_{P \in S} (PH)^2 dm$  peut facilement être calculé en utilisant le fait que :

$$\begin{aligned} \overline{PH} &= \overline{QP} \wedge \overline{\delta} \rightarrow \overline{PH}^2 = \|\overline{PH}\|^2 = PH^2 = \|\overline{QP} \wedge \overline{\delta}\|^2 = (\overline{QP} \wedge \overline{\delta}) \cdot (\overline{QP} \wedge \overline{\delta}) \\ &= \overline{\delta} \cdot ((\overline{QP} \wedge \overline{\delta}) \wedge \overline{QP}) \end{aligned}$$

Donc :

$$I_{(\Delta)} = \int_{P \in S} (PH)^2 dm = \int_{P \in S} \vec{\delta} \cdot ((\vec{QP} \wedge \vec{\delta}) \wedge \vec{QP}) dm = \vec{\delta} \cdot \int_{P \in S} ((\vec{QP} \wedge \vec{\delta}) \wedge \vec{QP}) dm$$

L'application linéaire qui a tout vecteur  $\vec{u}$  fait correspondre le vecteur  $\int_{P \in S} \vec{QP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{QP}) dm$  est appelé opérateur d'inertie du solide (S) au point Q.

On a la relation

$$I_{(\Delta)} = I(Q, S) \cdot \vec{\delta}$$

Cette application est linéaire (produit vectoriel + intégrales) et est représentable par une matrice symétrique dans une base donnée.

$$I(Q, S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$$

Calculons les termes de la matrice d'inertie :

Soit  $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  un vecteur défini dans un système d'axe  $R(Oxyz)$

$$\vec{QP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{QP}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} zb - yc \\ xc - za \\ ya - xb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 a + z^2 a - xyb - xzc \\ x^2 b + z^2 b - yzc - xy a \\ x^2 c + y^2 c - xza - yzb \end{pmatrix}$$

En utilisant la notation matricielle, on remarque que ce terme peut s'écrire comme le produit de deux matrices :

$$\vec{QP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{QP}) = \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

En intégrant sur S on obtient finalement en simplifiant par  $\vec{u}$  :

$$I(Q, Q) =$$

$$\begin{bmatrix} \int_S (y^2 + z^2) dm & -\int_S x y z dm & -\int_S x y z dm \\ -\int_S x y z dm & \int_S (x^2 + z^2) dm & -\int_S x y z dm \\ -\int_S x y z dm & -\int_S x y z dm & \int_S (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  et  $I_{zz}$  : sont appelés respectivement **moments d'inertie par rapport aux axes Qx, Qy et Qz**

$I_{xy}$ ,  $I_{yz}$  et  $I_{xz}$  : sont appelés respectivement **produits d'inertie par rapport aux plans Qxy, Qxz et Qyz**

Le moment d'inertie par rapport au point Q :

$$I_Q = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

Les moments d'inertie par rapport à l'axe Qx :

$$I_{yy} = \int_S (y^2 + z^2) dm$$

Les moments d'inertie par rapport à l'axe Qy :

$$I_{zz} = \int_S (x^2 + z^2) dm$$

Les moments d'inertie par rapport à l'axe Qz :

$$I_{xx} = \int_S (x^2 + y^2) dm$$

**Définitions (au point Q):**

– Repère d'inertie: repère dans lequel  $I(Q, Q)$  est une matrice diagonale

– Axes principaux d'inertie: axes du repère d'inertie

– Moments d'inertie principaux: moments d'inertie par rapport aux axes principaux d'inertie, c-à-d éléments diagonaux de  $\square(\square, \square)$  dans le repère d'inertie

La matrice est symétrique à valeurs réelles, il est donc possible de trouver une base orthonormée  $(Q, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  pour laquelle la matrice d'inertie est diagonale. Cette base est appelée base principale d'inertie du solide S.

Elle s'écrit :

$$\square(\square, \square) \vec{u} = \begin{bmatrix} \square_1 & 0 & 0 \\ 0 & \square_1 & 0 \\ 0 & 0 & \square_1 \end{bmatrix} \vec{u}$$

Avec :

$\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1$ : axes principaux d'inertie.

A1, B1, C1 : moments principaux d'inertie.

Le repère dont l'origine est le centre d'inertie G du solide S et dont les axes sont parallèles à ceux de la base principale d'inertie du solide S, est appelé repère central d'inertie.

#### 4.4.2.1-.Solides présentant des plans de symétrie

- Si Oxy est un plan de symétrie

A tout point  $M_1$  de côté z, on peut associer le point  $M_2$  de côté  $-z$  :

$$\square_{xy} = 0$$

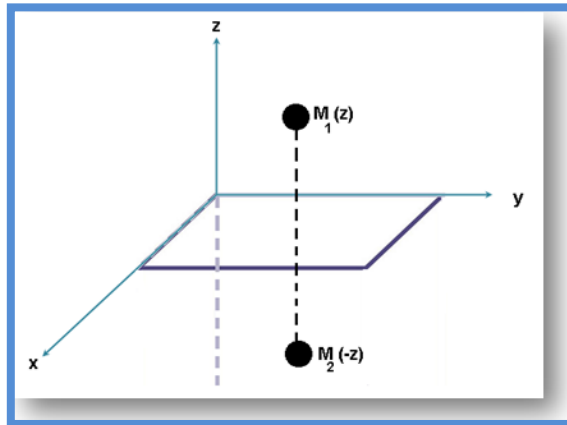


Figure 3.18

Donc :

$$\bar{x} = \int_S xz \, dm = 0 \text{ et } \bar{y} = \int_S yz \, dm = 0$$

Aors :

$$I(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{bmatrix} \bar{x} & -\bar{x} & 0 \\ -\bar{x} & \bar{x} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{x} \end{bmatrix}$$

- Si Oyz est un plan de symétrie

A tout point  $M_1$  de côté  $x$ , on peut associer le point  $M_2$  de côté  $-x$  :

$$\bar{x} = 0$$

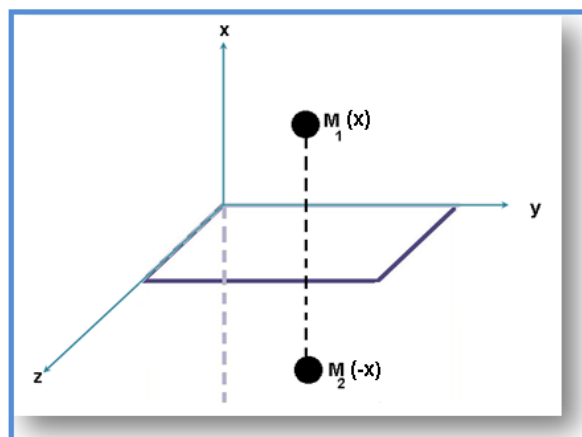




Figure 3.19

Donc :

$$\int_S xz \, dm = 0 \text{ et } \int_S xy \, dm = 0$$

Aors :

$$\mathbf{C}(\sigma, \sigma) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ 0 & -\sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

- Si Oxz est un plan de symétrie

A tout point  $M_1$  de côté  $y$ , on peut associer le point  $M_2$  de côté  $-y$  :

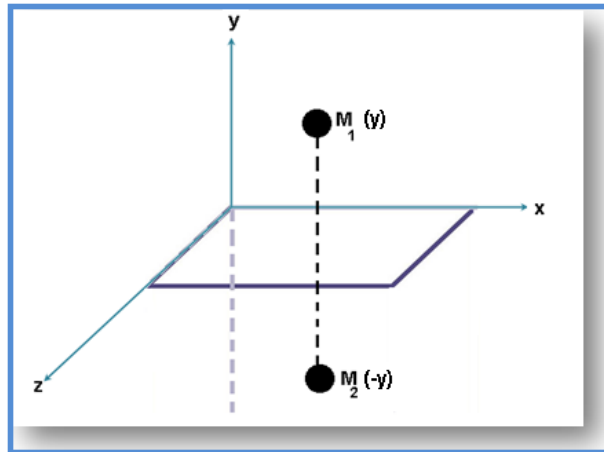


Figure 3.20

Donc :

$$\int_S \sigma_{xx} \, dm = 0 \text{ et } \int_S \sigma_{yy} \, dm = 0$$

Aors :

$$\mathbf{C}(\sigma, \sigma) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & -\sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ -\sigma_{xz} & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

### 2.1.1 Moments quadratiques (moments d'inertie des sections)

On appelle moment quadratique l'intégrale des produits des aires élémentaires par le carré de leurs distances à partir de l'axe considéré, ainsi, les moments d'inertie d'une surface (S) quelconque par rapport à OY et OZ sont les suivants:

$$I_{OY} = \int_S z^2 dS$$

Et

$$I_{OZ} = \int_S y^2 dS$$

Les moments d'inertie par rapport aux axes passant par le centre de gravité de la section sont des moments centraux.

La cinématique, (du grec *kinêma*, le mouvement), est une branche de la mécanique qui s'intéresse à l'étude des mouvements indépendamment des causes qui les produisent. A côté de la notion d'espace qui est l'objet de la géométrie, la cinématique introduit la notion de temps.

À ne pas confondre avec la cinétique, un terme plus général qui concerne la vitesse et les mécanismes d'une grande variété de processus ; en mécanique, *cinétique* est utilisé comme adjectif pour qualifier deux grandeurs impliquant aussi la masse : le moment cinétique et l'énergie cinétique.

## 1- Solide indéformable

### 1.1- Définition

On appelle solide indéformable ou plus simplement solide, un système invariable de points matériels : les distances mutuelles entre les différents points du solide restent constantes.

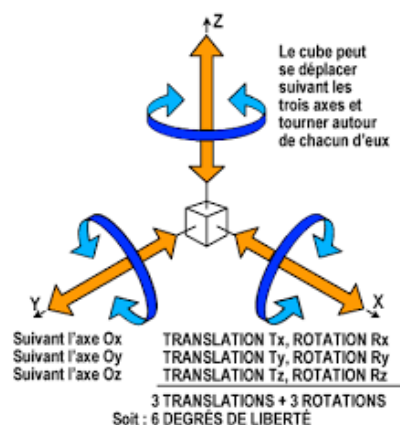
Remarque

La notion de solide indéformable et donc parfaitement rigide n'est qu'un modèle idéal, la réalité naturelle et technologique étant plus complexe...

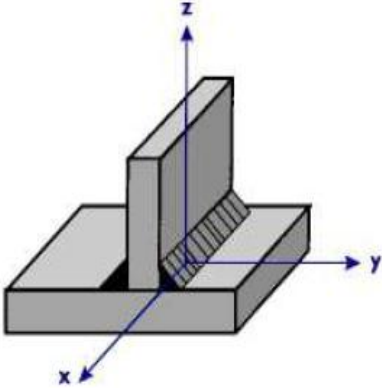
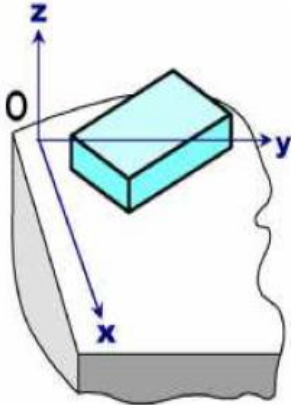
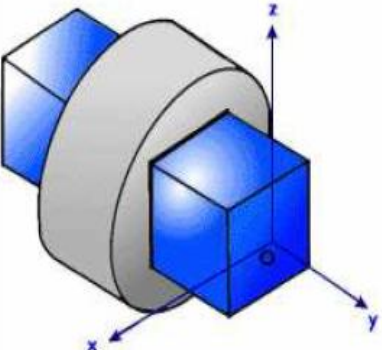
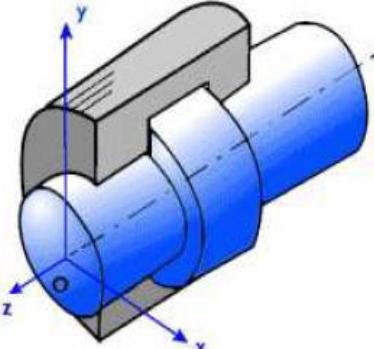
### 2.2- Différents mouvements d'un solide

Un solide (peut être une pièce ou un groupe de pièces) possède, d'une façon générale, 6 degrés de liberté cinématiquement liés.

Prenons l'exemple d'un cube en liberté totale dans, et étudions ses mouvements possibles



Le tableau ci-dessous représente les liaisons les plus utilisées en cinématiques,  
qui sont à connaître

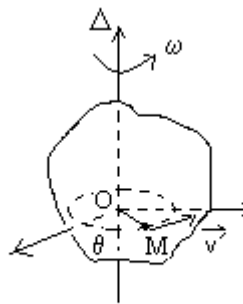
Nom de la liaison et symbole cinématique	Degrés de liberté	Exemple de mécanisme
<p><b>Liaison encastrement</b></p> <p>Symbole cinématique :</p>	<p>Translations      Rotations</p> <p><math>T_x =</math>              <math>R_x =</math></p> <p><math>T_y =</math>              <math>R_y =</math></p> <p><math>T_z =</math>              <math>R_z =</math></p> <p>Degré(s) de liberté :</p> <p>Degré(s) de liaison :</p>	
<p><b>Liaison appui plan</b></p> <p>Symbole cinématique :</p>	<p>Translations      Rotations</p> <p><math>T_x =</math>              <math>R_x =</math></p> <p><math>T_y =</math>              <math>R_y =</math></p> <p><math>T_z =</math>              <math>R_z =</math></p> <p>Degré(s) de liberté :</p> <p>Degré(s) de liaison :</p>	
<p><b>Liaison glissière</b></p> <p>Symbole cinématique :</p>	<p>Translations      Rotations</p> <p><math>T_x =</math>              <math>R_x =</math></p> <p><math>T_y =</math>              <math>R_y =</math></p> <p><math>T_z =</math>              <math>R_z =</math></p> <p>Degré(s) de liberté :</p> <p>Degré(s) de liaison :</p>	
<p><b>Liaison pivot</b></p> <p>Symbole cinématique :</p>	<p>Translations      Rotations</p> <p><math>T_x =</math>              <math>R_x =</math></p> <p><math>T_y =</math>              <math>R_y =</math></p> <p><math>T_z =</math>              <math>R_z =</math></p> <p>Degré(s) de liberté :</p> <p>Degré(s) de liaison :</p>	

## 2- Distribution des vitesses d'un solide

### 2.1. Mouvements particuliers

**Translation** : à chaque instant, tous les points d'un solide ont même vitesse.

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B \text{ quelques soient } A \text{ et } B \text{ appartenant au solide.}$$



### Rotation autour d'un axe fixe □ :

L'intensité de la vitesse du point  $M$  appartenant au solide, situé à la distance  $r = OM$  de l'axe de rotation, est

égal à  $v_M = \omega r = \dot{\theta} r$ . Sa direction est dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation, tangentiellment au cercle de rayon  $OM$ .

En introduisant un vecteur

rotation  $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{k}$  où  $\vec{k}$  est le vecteur unitaire de l'axe de rotation, on peut écrire :

$$\vec{v}_M = \vec{MO} \wedge \vec{\Omega}$$

Dans cette dernière relation, on remarquera que le point  $O$  est quelconque sur l'axe de rotation □

### 2.2-Relation de Varignon

Soient  $A$  et  $M$  deux points d'un même solide  $S$ . Leur vitesse est liée par la

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A +$$

relation de Varignon où  $\omega(t)$  est le vecteur rotation instantanée du solide que nous noterons plus

simplement  $\omega$ .

## 2.2-Mouvement instantané le plus général d'un solide

On appelle axe instantané de viration ou axe central du torseur cinématique (dit encore axe de vissage du solide) l'axe  $\Delta$  parallèle à  $\omega(t)$ . En tout point de cet axe, la vitesse est colinéaire à  $\omega(t)$ . De plus, l'axe  $\Delta$  est le lieu des points de vitesses minimum du solide.

Soit  $O$  appartenant à  $\Delta$  un point du solide  $S$  et  $M$  un point quelconque de  $S$ , la relation de

Varignon entre  $O$  et  $M$  donne  $V_M = V_O + \omega \wedge OM = V_l + \omega$ .

Le terme  $V_l$  colinéaire à  $\Delta$  est dit vitesse de glissement le long de  $\Delta$ .  $\omega \perp OM$  est un terme de

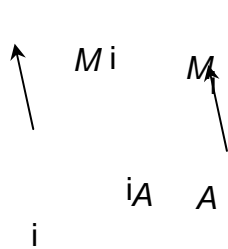
rotation autour de  $\Delta$  à la vitesse angulaire instantanée  $\omega$ .

Le mouvement instantané le plus général d'un solide est un mouvement hélicoïdal, combinaison d'une translation le long de  $\Delta$  et d'une rotation autour de  $\Delta$ .

**□ Méthode 1.2. Comment analyser le mouvement instantané d'un solide roulant sans glisser ?**

**□ Mouvement de translation**

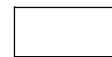
Un solide  $S$  est dit en translation dans le référentiel  $(R)$  si pour tous points  $A$  et  $M$  appartenant à  $S$ , on a  $AM = cte$ . Attention il ne s'agit pas ici de translation rectiligne mais curviligne (translation elliptique, circulaire ou suivant une courbe quelconque).



Dans ce cas,

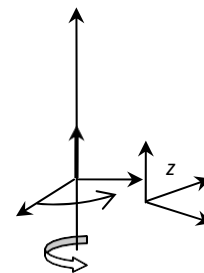
$$\frac{d}{dt} \frac{AM}{0} = V_M - V_A = 0 \quad (A, M) \in S$$

Tous les points de  $S$  ont même vitesse et même accélération et par comparaison avec la relation de Varignon, on a  $\omega(t) = 0$ .



**□ Mouvement de rotation pure autour d'un axe**

Un solide  $S$  est en rotation pure autour d'un axe  $\Delta$  fixe passant par une origine  $O$  fixe d'un référentiel  $(R)$ , lorsque tout point  $M$  de  $S$  décrit un mouvement de circulaire de rayon  $HM$  dans un plan perpendiculaire à  $\Delta$ , où  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\Delta$ . En adoptant le système de coordonnées polaires qui est le trièdre adapté aux symétries



du problème, la vitesse du point  $M$  est  $v_M = \omega \times r_{OM}$  où



$\omega \vec{e}_z$  est orienté suivant le sens de rotation positif à l'aide de la règle du tire bouchon.

### 3- Changement de référentiel pour les vitesses et les accélérations

Dans tout ce qui suit, (R) rapporté à  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  est un référentiel absolu et (R') rapporté à  $(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$  est un référentiel relatif en mouvement dans (R). On note  $\Omega_{R'/R}$  le vecteur rotation instantanée de (R') par rapport à (R).

#### □ Dérivation dans un trièdre mobile

Soit  $K = K_x \vec{e}_x + K_y \vec{e}_y + K_z \vec{e}_z$  un vecteur exprimé dans (R'), les dérivées temporelles dans (R) et (R') sont liées par

$$\left. \frac{dK}{dt} \right|_R = \left. \frac{dK}{dt} \right|_{R'} + \Omega_{R'/R} \wedge K$$

#### □ Composition des vitesses de rotation

Soient A et B deux points d'un même solide de référence S2 en rotation par rapport à S0 et S1

avec les vecteurs rotations instantanées  $\omega_{2/0}$  et  $\omega_{2/1}$ . On associe à chacune de ces respectives solides les référentiels  $(R_0)$  et  $(R_1)$  et  $(R_2)$ . On a

□ **Composition des vitesses**

Soit un point matériel  $M$  repéré à l'instant  $t$  par le vecteur  $OM$  dans  $(R)$  et par  $O' M$  dans  $(R')$ . On définit :

□ sa vitesse absolue comme sa vitesse par rapport à  $(R)$  :  $V_a(M)$  □

□ sa vitesse relative comme sa vitesse par rapport à  $(R')$  :  $V_r(M)$  □

□ sa vitesse d'entraînement de  $M$  comme la vitesse d'un point  $P$  fixe dans  $(R')$  et coïncidant à l'instant  $t$  avec  $M$  :  $V_e(M) \square V_{R'}(O') \square \Omega R'/R \square O' M$ .

On a alors  $V_a(M) \square V_r(M) \square V_e(M)$ .

□ **Composition des accélérations**

Soit un point matériel  $M$  repéré à l'instant  $t$  par le vecteur  $OM$  dans  $(R)$  et par  $O' M$  dans  $(R')$ . On définit :

□ son accélération absolue par rapport à  $(R)$  :  $a_a(M)$  □

□ son accélération relative par rapport à  $(R')$  :  $a_r(M)$  □

□ son accélération d'entraînement qui est celle d'un point  $P$  fixe dans  $(R')$  et coïncidant à l'instant  $t$  avec  $M$  :

$a_e(M) \square \Omega R'/R \square O' P \square \Omega R'/R \square a_a(P) \square a_a(O')$

$R$                        $R$

□ son accélération de Coriolis :  $a_c(M) = 2 \Omega R' / R \wedge V_r(M)$  .

On a  $a_a(M) = a_r(M) + a_e(M) + a_c(M)$  .  
alors

**4- Deux cas particuliers fréquents : (R') en translation et (R') en rotation uniforme autour d'un axe fixe**

□ **Cas de la translation**

Dans ce cas, les axes du référentiel (R') gardent une direction fixe par rapport à ceux de (R) de

sorte que  $\Omega R' / R = 0$  . Ainsi, la vitesse d'entraînement et l'accélération d'entraînement ont une

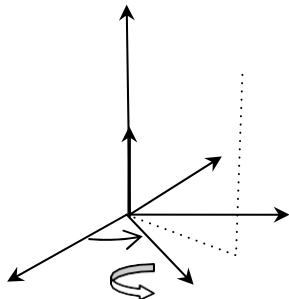
expression particulièrement simple  $v_e(M) =$  et  $c$  .

L'accélération de Coriolis est nulle puisque  $\Omega R' / R = 0$  .

Remarque

Notons que c'est seulement dans ce cas que l'accélération d'entraînement s'identifie avec la dérivée de la vitesse d'entraînement.

□ **Cas de la rotation uniforme autour d'un axe fixe dans (R)**



Considérons un référentiel (R') rapporté à  $(O', e_{x'}, e_{y'}, e_{z'})$  en

rotation autour de l'axe (Oz) du référentiel (R) rapporté à

$(O, e_x, e_y, e_z)$  avec  $O = O'$  et  $(Oz) = (Oz')$ .

Cette rotation est repérée par l'angle  $\varphi(t)$  et le vecteur  $e_x, e_{x'}$

rotation de (R') par rapport à (R) s'écrit  $\Omega_{R'/R} = \dot{\varphi} e_z$ .  
 Lorsque la rotation est uniforme :  $\Omega_{R'/R} = cte e_z$ .  
 En désignant par  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe de rotation (Oz) on a :

$$V_e(M) = \Omega_{R'/R} \wedge O'M = \Omega_{R'/R} \wedge O'H$$

Remarque

On parle dans ce cas, pour l'accélération d'entraînement, d'accélération centripète puisqu'elle pointe vers le centre  $H$  de rotation du point  $M$ .

**5- Référentiel barycentrique**

On appelle référentiel barycentrique, noté (R\*), le référentiel dont l'origine coïncide avec le centre de masse du solide et dont les axes ont des directions fixes par rapport au référentiel d'étude (R). (R\*) est donc en translation dans (R).

Remarque

Il s'agit ici de translation au sens large, curviligne, elliptique ou circulaire, et pas uniquement rectiligne : pour deux points  $G$  et  $H$  fixes dans (R\*) le vecteur  $GH$  reste constant (en norme et direction) au cours du mouvement de (R\*) dans

(R).

Le mouvement relatif du solide dans (R\*) est un mouvement de rotation autour de G de vecteur

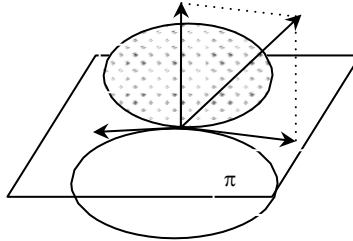
rotation instantanée

Dans la composition des vitesses et accélérations entre on a :

$$V_e(M) = \text{ (R) et }$$

## 6- Cinématique du contact entre deux solides

On s'intéresse ici au contact ponctuel, dans un référentiel (R), entre deux solides S1 et S2 indéformables, en un point de contact géométrique à l'instant  $t$  noté  $I(t)$  ou plus simplement  $I$ . La réalité physique est bien entendu plus complexe : les solides sont déformables et le contact s'effectue sur une surface. Si les surfaces en contact sont assez régulières, on peut définir un plan commun tangent aux deux solides en contact (noté  $(\pi)$  sur le schéma ci-après).



## 7- Vitesse de glissement

### □ Définition

$I$  étant le point de l'espace où le contact entre les solides se produit à l'instant  $t$ ,

$I \in S_1$  le point

appartenant à  $S_1$  coïncidant avec  $I$  à l'instant  $t$  (mais pas à un instant antérieur ou postérieur) et

le point appartenant à  $S_2$  coïncidant avec  $I$  à l'instant  $t$ , on définit la vitesse de glissement de  $S_1$  sur  $S_2$ , notée  $V_g$ .

de  $S_1$  sur  $S_2$ , notée  $V_g$ .

### □ Méthode 1.1. Comment exprimer la vitesse du centre de masse d'un solide roulant sans glisser ?

La vitesse de glissement s'écrit  $V_g = V_{I_1/S_2}$ . Les solides étant indéformables, on a  $V_g = V_{I_1/S_1} - V_{I_2/S_1}$ .

$$V_g = V_{I_1/S_2} = V_{I_1/S_1} - V_{I_2/S_1}$$

## 8- Glissement, pivotement et roulement, roulement sans glissement

La vitesse  $\vec{V}_{M/S_2}$  par rapport à  $S_2$  s'écrit  $\vec{V}_{M/S_2} = \vec{V}_g + \omega_N \times \vec{I}_1 M + \omega_T \times \vec{I}_1 M$ . Il s'agit donc

de la somme de trois termes : la vitesse de glissement  $V_g$ , la vitesse de pivotement  $\omega_N \times \vec{I}_1 M$  et la vitesse de roulement  $\omega_T \times \vec{I}_1 M$ .

On dit qu'il y a roulement sans glissement ni pivotement lorsque les deux premiers termes sont

nuls. Dans le cadre du programme on néglige le pivotement pour ne retenir que la condition de roulement sans glissement (CNG ou CRSG) :  $V_g = 0$ .

**9- Comment étudier le roulement sans glissement d'un solide sur un support fixe ?**

**□ Méthode 1.1. Comment exprimer la vitesse du centre de masse d'un solide roulant sans glisser ?**

Pour écrire la condition de non glissement entre deux solides en contact ponctuel, on utilise la nullité de la vitesse de glissement :

$V_g = V_{S1/S2} = V_{I_1/S2} = V_{I_1 \in S1/R} - V_{I_2 \in S2/R} = 0$ ,  $I_1 \in S1$  étant le point appartenant à  $S1$  coïncidant avec  $I$  à l'instant  $t$  (point de l'espace où le contact entre les solides se produit à l'instant  $t$ ), et  $I_2 \in S2$  le point appartenant à  $S2$  coïncidant avec  $I$  à l'instant

$t$ . Lorsque le solide  $S2$  est fixe dans  $(R)$ , la vitesse de glissement se réduit à

$V_g = V_{I_1 \in S1/R} = 0$ . La formule de Varignon entre  $I_1 \in S1$  et un point  $C$  de  $S1$ , choisi de façon à pouvoir écrire simplement le vecteur  $CI_1 \in S1$  s'écrit

□ Exercices 1.6, 1.7 et 1.8

*Disque roulant sur un support horizontal.*

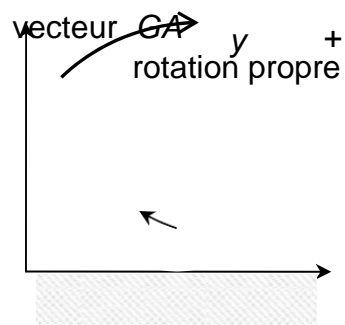
Considérons un disque  $D$  de rayon  $R$  roulant sur un support fixe horizontal (le sol par exemple)

sans glisser (ni pivoter). On appelle  $I_1$  le point du disque ou/plus simplement coïncidant à  $I$

l'instant  $t$  avec le point  $I$  de contact entre le disque et le sol et  $I_2$  le point du sol ou/plus simplement coïncidant à l'instant  $t$  avec le point  $I$  de contact entre le disque et le sol.

Soit  $A$  un point fixé de la périphérie du disque dont le centre de masse est noté  $G$ .

On note  $\theta$  l'angle que fait le rayon  $GI$  avec la verticale. Cet angle permet de paramétrer la





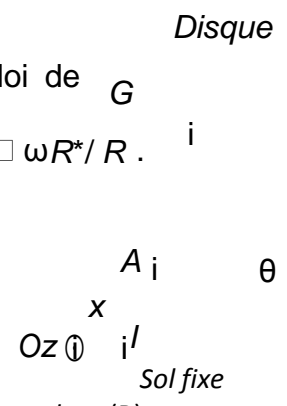
du disque dans son référentiel barycentrique. En effet,

dans  $(R^*)$ , on peut écrire  $\omega_{D/R^*} = \dot{\theta} e_z$ . D'après la loi de  $G$

composition des vitesses de rotation,

$$\omega_{D/R} = \omega_{D/R^*} + \omega_{R^*/R}$$

Or, par définition  $(R^*)$  est en translation par rapport à  $(R)$ , ainsi  $\omega_{R^*/R} = 0$  et donc  $\omega_{D/R} = \omega_{D/R^*} = \dot{\theta} e_z$  que l'on note

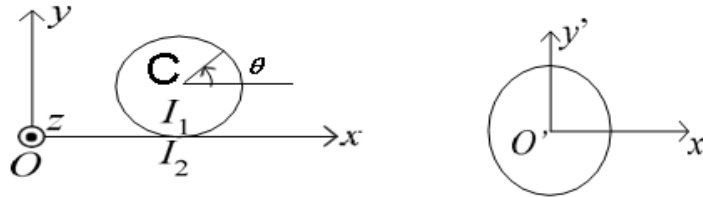


simplement  $\omega$  (orienté suivant la règle du tire bouchon).

Par définition de la vitesse de glissement on a

$$V_g = V_{I_1} \in D/R = V_{I_2} \in Sol/R, \text{ or le sol étant fixe dans } (R) : V_{I_2} \in Sol/R = 0$$

### Exemple 1



Paramétrage :

On a donc deux degrés de liberté:  $\theta, x$

Condition de roulement sans glissement :

$$v_{I_2} = 0 \quad (I \text{ est fixe})$$

On a :

$$v_{I_2} = v_C + \omega \wedge CI_2$$

$$0 = \dot{x} + \omega \wedge R$$

et

$$\omega = \dot{\theta} + \omega = \dot{\theta} + \omega$$

Donc :

$$\dot{x} = -R\dot{\theta} \text{ soit } \dot{x} = -R\dot{\theta}$$

