# TD N 01

# LES VECTEURS

## Exercice 01 :

*Deux points A et B dont les coordonnées sont données par : A(2,3,-3) ; B(5,7,-3).*

*- Déterminer le module, les composantes, la direction (les cosinus directeurs) et le sens du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ;*

*- Déterminer les composantes du vecteur $\vec{V}$ perpendiculaire $\overrightarrow{AB}$ à appartenant au plan (0, x, y).*

## Corrigé :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A).\vec{i} + (y_B - y_A).\vec{j} + (z_B - z_A).\vec{k} = (5-2).\vec{i} + (7-3).\vec{j} + (-3+3).\vec{k} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$$

1. Caractéristiques du vecteur $\overrightarrow{AB}$ :

a. Module : $\overrightarrow{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

b. Les composantes : $x_{AB} = 3$, $y_{AB} = 4$

c. La direction (le support) : Obtenu en déterminant les cosinus directeurs :

$$\cos(\vec{i}, \overrightarrow{AB}) = \cos\left(\frac{x_{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) = \cos\left(\frac{3}{5}\right) = 0{,}6 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(0{,}6) = 53{,}13°$$

$$\cos(\vec{j}, \overrightarrow{AB}) = \cos\left(\frac{y_{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) = \cos\left(\frac{4}{5}\right) = 0{,}8 \Rightarrow \beta = \cos^{-1}(0{,}8) = 36;87°$$

$$\cos(\vec{k}, \overrightarrow{AB}) = \cos\left(\frac{z_{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) = \cos\left(\frac{0}{5}\right) = 0 \Rightarrow \gamma = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$$

Le support se trouve dans le plan $(0, x, y)$.

c. Le sens :

Toutes les composantes sont positives, alors $\overrightarrow{AB}$ est orienté positivement suivant les deux axes $Ox$ et $Oy$.

2. Les composantes du vecteur perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$ :

Soit le vecteur $\vec{V}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et appartenant au plan $(0, x, y)$. Donc :

$$\vec{V}.\overrightarrow{AB} = 0 \ : \ (x.\vec{i} + y.\vec{j}) \bullet (3.\vec{i} + 4.\vec{j}) = 3x + 4y = 0, \text{ soit } y = \frac{3}{4}x.$$

Tout vecteur dont le support est la droite $y = \frac{3}{4}x$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et appartenant au plan $(0, x, y)$.

$$\vec{V} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0} \ : \ \begin{cases} x.i \\ y.j \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0} \\ z.k \end{cases}$$

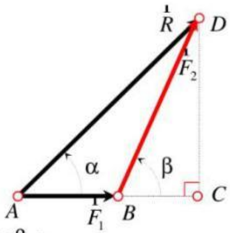
## Exercice 02 :

*La résultante $\vec{R}$ de deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$, de module égal à 50 N et fait un angle 30° par rapport à $\vec{F}_1$, de module égal à 15 N.*

*- Déterminer le module de la force $\vec{F}_2$ et la l'angle entre les deux vecteurs $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$.*

**Corrigé :**

Nous devons former deux équations à deux inconnues $\vec{F}_2$ et $\beta$ à partir de la figure ci-dessous.
D'une part, selon le théorème de Pythagore :
Pour simplifier l'écriture, posons $\|\vec{F}_1\| = F_1$, $\|\vec{F}_2\| = F_2$ et $\|\vec{R}\| = R$.




$R^2 = \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$,

Avec $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = F_1 + F_2.\cos\beta$ ; $\overline{CD} = F_2.\sin\alpha$

D'où :

$R^2 = (F_1 + F_2.\cos\beta)^2 + F_2{}^2.\sin^2\beta$

$R^2 = F_1{}^2 + F_2{}^2.\cos^2\beta + F_2{}^2.\sin^2\beta + 2F_1.F_2.\cos\beta$

$R^2 = F_1{}^2 + F_2{}^2 + 2F_1.F_2.\cos\beta$ (1)

D'autre part, nous cherchons une équation différente qui contient $\cos\beta$ :

$\overline{AC} = R.\cos\alpha = \overline{AB} + \overline{BC} = F_1 + F_2.\cos\beta$

d'où :

$F_2.\cos\beta = R.\cos\alpha - F_1$ (2)

Substituons $F_2.\cos\beta$ de (2) dans (1) :

$R^2 = F_1{}^2 + F_2{}^2 + 2F_1.(R.\cos\alpha - F_1)$

Soit :

$F_2 = \sqrt{R^2 + F_1{}^2 + 2F_1.R.\cos\alpha} = \sqrt{50^2 + 15^2 - 2.15.50.\cos 30} = 37{,}76$ N

Et,

$$\cos\beta = \frac{R.\cos\alpha - F_1}{F_2} = \frac{50.\cos 30 - 15}{44{,}44} = 0{,}7495 \Rightarrow \beta = \cos^{-1}(0{,}7495) = 41{,}45°$$

**Exercice 03 :**

*Pour les vecteurs* $\vec{V}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ ; $\vec{V}_2 = -3\vec{i} + 1{,}5\vec{j} - 7{,}5\vec{k}$ ; $\vec{V}_3 = -5\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$, Calculer : $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2$, $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_1$ ; $\vec{V}_2 \bullet \vec{V}_2$, $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$, $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$, $\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_2$, $\vec{V}_1 \bullet (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ et $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$.

**Corrigé :**

a. $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = (2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}) \bullet (-3\vec{i} + 1{,}5\vec{j} - 7{,}5\vec{k}) = 2.(-3) + (-).1{,}5 + 5.(-7{,}5) =$

b. $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_1 = (2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}) \bullet (2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}) = 2^2 + (-1)^2 + 5^2 =$

c. $\vec{V}_2 \bullet \vec{V}_2 = (-3\vec{i} + 1{,}5\vec{j} - 7{,}5\vec{k}) \bullet (-3\vec{i} + 1{,}5\vec{j} - 7{,}5\vec{k}) = (-3)^2 + (1{,}5)^2 + (-7{,}5)^2 =$

d. $$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{cases} 2\vec{i} \\ -\vec{j} \\ 5\vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} -3\vec{i} \\ 1{,}5\vec{j} \\ -7{,}5\vec{k} \end{cases} = \begin{cases} ((-1).(-7{,}5) - 5.1{,}5)\vec{i} = 0\vec{i} \\ -(2.(-7{,}5) - 5.(-3))\vec{j} = 0\vec{j} \\ (2.1{,}5 - (-1).(-3))\vec{k} = 0\vec{k} \end{cases}$$

$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = 0 \Rightarrow \vec{V}_1 // \vec{V}_2$
Les deux vecteurs sont colinéaires.

e. $$\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = \begin{cases} -3\vec{i} \\ 1{,}5\vec{j} \\ -7{,}5\vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} -5\vec{i} \\ 4\vec{j} \\ \vec{k} \end{cases} = \begin{cases} (1{,}5.1 - (-7{,}5).(4))\vec{i} = 31{,}5\vec{i} \\ -((-3).1 - (-7{,}5).(-5))\vec{j} = 40{,}5\vec{j} \\ ((-3).4 - 1{,}5.(-5))\vec{k} = -4{,}5\vec{k} \end{cases}$$

f. $\overrightarrow{V_3} \wedge \overrightarrow{V_2} = \begin{cases} -5\vec{i} \\ 4\vec{j} \\ \vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} -3\vec{i} \\ 1{,}5\vec{j} \\ -7{,}5\vec{k} \end{cases} = \begin{cases} -\big(1{,}5.1-(-7{,}5).(4)\big)\vec{i} = -31{,}5\vec{i} \\ \big((-3).1-(-7{,}5).(-5)\big)\vec{j} = -40{,}5\vec{j} = -\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3} \\ -\big((-3).4-1{,}5.(-5)\big)\vec{k} = 4{,}5\vec{k} \end{cases}$

> $\overrightarrow{V_3} \wedge \overrightarrow{V_2} = -\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}$
> Le produit vectoriel n'est pas commutatif.

**Application** : La norme produit vectoriel $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$ fournit une mesure de la surface du parallélogramme dont les côtés sont les vecteurs $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}$ . $\left\|\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}\right\| = S_{12}$

> . Le produit mixte $\overrightarrow{V_1} \bullet \left(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}\right) = 0$ .
> $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_3}$ se trouvent dans un même plan.

g. $\overrightarrow{V_1} \bullet \left(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}\right) = \begin{cases} 2\vec{i} \\ -\vec{j} \\ 5\vec{k} \end{cases} \bullet \begin{cases} -3\vec{i} \\ 1{,}5\vec{j} \\ -7{,}5\vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} -5\vec{i} \\ 4\vec{j} \\ \vec{k} \end{cases} = \begin{cases} 2\vec{i} \\ -\vec{j} \\ 5\vec{k} \end{cases} \bullet \begin{cases} 31{,}5\vec{i} \\ 40{,}5\vec{j} \\ -4{,}5\vec{k} \end{cases} = 2.31{,}5 - 1.40{,}5 - 5.4{,}5 = 0$

**Application** : Le produit mixte donne une mesure du volume d'un parallélépipède dont les côtés sont les vecteurs $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_3}$ .

h. $\overrightarrow{V_1} \wedge \left(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}\right) = \begin{cases} 2\vec{i} \\ -\vec{j} \\ 5\vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} -3\vec{i} \\ 1{,}5\vec{j} \\ -7{,}5\vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} -5\vec{i} \\ 4\vec{j} \\ \vec{k} \end{cases} = \begin{cases} 2\vec{i} \\ -\vec{j} \\ 5\vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} 31{,}5\vec{i} \\ 40{,}5\vec{j} \\ -4{,}5\vec{k} \end{cases} = \begin{cases} -198\vec{i} \\ -166{,}5\vec{j} \\ 112{,}5\vec{k} \end{cases}$

> $\overrightarrow{V_1} \wedge \left(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}\right) \neq \left(\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}\right) \wedge \overrightarrow{V_3}$
> Le produit double vectoriel n'est pas associatif.

## Exercice 04 :

*Pour les deux vecteurs de l'exercice 01, dont O est l'origine des axes de coordonnées, calculer :.*

a. *Les produits scalaires :* $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB}$ , $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{OB}$ ;

b. *Les produits vectoriels :* $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ *et* $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OA}$. *En déduire la surface du triangle OAB ;*

c. *Déterminer le vecteur* $\overrightarrow{AC}$ *de module égal à 5 et normal au plan formé par OA et OB ;*

d. *Le double produit vectoriel :* $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{AB}$ ;

e. *Le produit mixte :* $\overrightarrow{OA} \bullet \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)$. En déduire le volume du parallélépipède dont les cotés sont les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ .

## Corrigé :

$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$ ; $\overrightarrow{OB} = 5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}$

a. $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = \left(2\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}\right) \bullet \left(5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}\right) = 2.5 + (-3).7 + (-3).(-3) = -2$

$\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OA} = \left(2\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}\right) \bullet \left(2\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}\right) = 2^2 + (-3)^2 + (-3)^2 = 22$

$\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = \left(5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}\right) \bullet \left(5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}\right) = 5^2 + 7^2 + (-3)^2 = 83$

b. $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{cases} 2\vec{i} \\ -3\vec{j} \\ -3\vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} 5\vec{i} \\ 7\vec{j} \\ -3\vec{k} \end{cases} = \begin{cases} 9+21 \\ -(-6+15) \\ 14+15 \end{cases} = \begin{cases} 30\vec{i} \\ -9\vec{j} \\ 19\vec{k} \end{cases} = -\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OA}$

Surface du triangle :

La surface du triangle formé par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ est la moitié de la quantité $\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|$ :

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}S_{OAOB}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{30^2+(-9)^2+(19)^2}=\frac{36{,}63}{2}=18{,}31\ \textit{Unités de surface}.$$

c . Vecteur $\overrightarrow{AC}$ :

D'une part, $\overrightarrow{AC}$ est perpendiculaire au plan $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\Rightarrow\overrightarrow{AC}=\lambda.\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)$ tel que $\lambda\in\mathbb{R}$.

D'autre part, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=5$.

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\left\|\lambda.\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)\right\|=\lambda.\left\|\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)\right\|=36{,}63\lambda.\vec{k}=5\Rightarrow\lambda=\frac{5}{36{,}63}=0{,}136$$

D'où :

$$\overrightarrow{AC}=4{,}01\vec{i}-1{,}23\vec{j}+2{,}59\vec{k}$$

d . *Le double produit vectoriel :* $\overrightarrow{OA}\wedge\left(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{AB}\right)$

$$\overrightarrow{OA}\wedge\left(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{AB}\right)=\begin{cases}2\vec{i}\\-3\vec{j}\\-3\vec{k}\end{cases}\wedge\begin{cases}5\vec{i}\\7\vec{j}\\-3\vec{k}\end{cases}\wedge\begin{cases}3\vec{i}\\4\vec{j}\\0\vec{k}\end{cases}=\begin{cases}2\vec{i}\\-3\vec{j}\\-3\vec{k}\end{cases}\wedge\begin{cases}12\vec{i}\\-9\vec{j}\\-1\vec{k}\end{cases}=\begin{cases}-24\vec{i}\\-34\vec{j}\\18\vec{k}\end{cases}$$

e . *Le produit mixte :* $\overrightarrow{OA}\bullet\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$

$$\overrightarrow{OA}\bullet\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=\left(2\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}\right)\bullet\begin{cases}3\vec{i}\\4\vec{j}\\0\vec{k}\end{cases}\wedge\begin{cases}4{,}01\vec{i}\\-1{,}23\vec{j}\\2{,}59\vec{k}\end{cases}=\left(2\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}\right)\bullet\left(10{,}36\vec{i}-7{,}77\vec{j}-19{,}73\vec{k}\right)$$

$=20{,}72+23{,}31+59{,}19=103{,}22$ *Unités de volume* : Volume du parallélépipède dont les cotés sont les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

**Exercice 05 :**

*On donne les composantes des vecteurs* $\overrightarrow{V_1}=3\vec{i}+5\vec{k}$ ; $\overrightarrow{V_2}=5\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}$ ; $\overrightarrow{V_3}=3\vec{i}+2y.\vec{j}-2\vec{k}$ ; $\overrightarrow{V_4}=x.\vec{i}+2\vec{j}+10\vec{k}$ dans un repère orthonormé .

*- Déterminer y et z pour que les vecteurs  et* $\overrightarrow{V_2}$ *soient colinéaires.*

*- Déterminer x pour que les vecteurs* $\overrightarrow{V_3}$ *et* $\overrightarrow{V_4}$ *soient perpendiculaires.*

**Corrigé :**

1. $\overrightarrow{V_1}//\overrightarrow{V_2}\Rightarrow\overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2}=\vec{0}$ : $\overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2}=\begin{cases}3\vec{i}\\5\vec{j}\\0\vec{k}\end{cases}\wedge\begin{cases}5\vec{i}\\y.\vec{j}\\z.\vec{k}\end{cases}=\begin{cases}(5z-0y).\vec{i}=0.\vec{i}\Rightarrow z=0\\-(3z-0.5).\vec{j}=0.\vec{j}\Rightarrow z=0\\(3y-5.5).\vec{k}=0.\vec{k}\Rightarrow y=\dfrac{25}{3}\end{cases}$

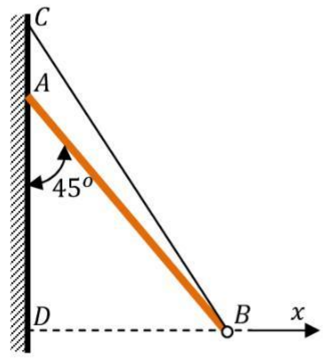
2. $\overrightarrow{V_1}\perp\overrightarrow{V_2}\Rightarrow\overrightarrow{V_1}\bullet\overrightarrow{V_2}=0$ :

$$\overrightarrow{V_1}\bullet\overrightarrow{V_2}=\left(3\vec{i}+2y.\vec{j}-2\vec{k}\right)\bullet\left(x.\vec{i}+2\vec{j}+10\vec{k}\right)=3x+4y-20=0\Rightarrow x=\frac{40}{3}.$$

# TD N 02
# LA STATIQUE

**Exercice N° 1**:

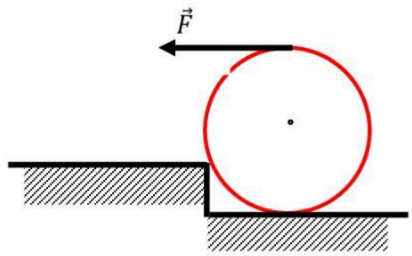
L'extrémité supérieure $A$ d'une barre homogène $AB$ pesant 5 $daN$ et longue de 2 $m$ s'appuie sur un mur vertical lisse. Un filin $BC$ est attaché à son extrémité inferieur $B$.




1) Trouver la distance AC a laquelle il faut fixer le filin au mur pour que la barre soit en équilibre en formant un angle de $45^o$o avec la verticale.
2) Trouver la tension du filin $T$ et la réaction $R$ du mur.

**Exercice N° 2**:

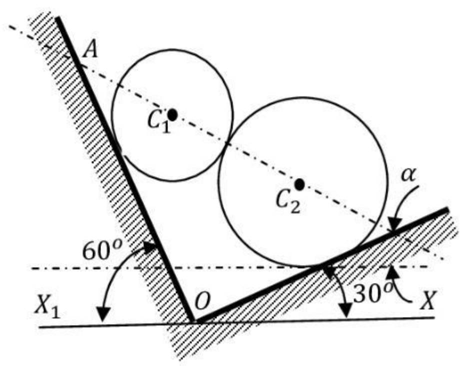
Trouver la force minimale F nécessaire pour élever un cylindre de 150 $daN$ et de 2 $m$ de diamètre au-dessus d'une marche de 40 cm de hauteur au moyen d'un câble enroulé autour du cylindre sur lequel on tire horizontalement.



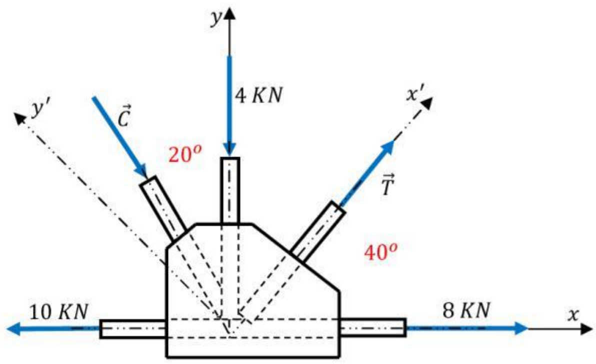

**Exercice N° 3**:

Deux cylindres homogènes lisses tangents sont placés entre deux plans inclinés lisses $OA$ et $OB$ ; l'un d'eux de centre $C_1$ pèse 10 $N$, l'autre de centre $C_2$ pèse 30 $N$.

Déterminer l'angle $\alpha$ que forme la droite $C_1C_2$ avec l'axe horizontal $X_1OX$, les pressions $N_1$ et $N_2$ des cylindres sur les plans ainsi que la grandeur $N$ de la pression reciproque des cylindres.



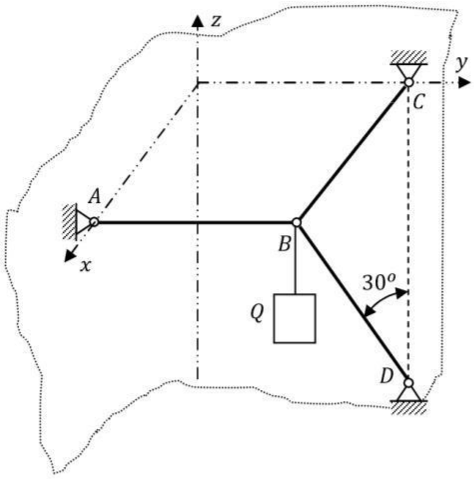
**Exercice N° 4**:
Déterminer les grandeurs des forces $\vec{C}$ et $\vec{T}$ qui, en memo temps que les trois forces représentées sur la figure, agissent au nœud d'un treillis de pont.

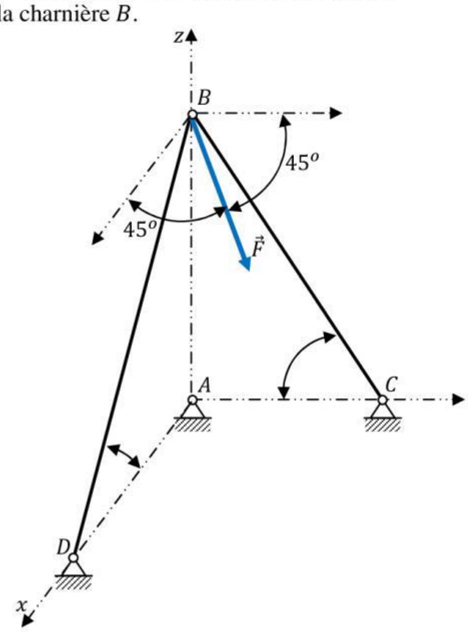



**Exercice N° 5**:

Les barres $AB, BC$ et $BD$ sont articulées entre elles en $B$ et aux points d'appuis $A, C$ et $D$ de telle façon que AB et BC forment un plan horizontal, tandis que $BC$ et $BD$ forme un plan vertical. En $B$, on suspend une charge $Q$ de $330\ daN$.

Déterminer les réactions des barres sur la charnière $B$.




**Exercice N° 6**:
Un montant $AB$ et *des* supports $BC$ et $CD$ articulés entre eux au point $B$ et aux points fixes $C$ et $D$ forment une ferme. Celle-ci est chargée en $B$ par une force horizontale $F = 100\ N$.

Déterminer les efforts dans le montant et les supports (les poids de tous les éléments sont négligeables

**Exercice N° 1**:

$AD = AB\ cos\ 45^o = DB ==> \ tg\varphi = \dfrac{DB}{CD} = \dfrac{AB \cos 45^o}{AC + AD}$

$tg\varphi = \frac{MB}{KM}$ avec $MB = \frac{AB}{2} \cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}\ m$

$KM = AD = \sqrt{2}\ m \quad ==> \quad tg\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

$==> \quad \varphi = 26{,}56^o$

$AC = CD - AD = \dfrac{DB}{tg\ \varphi} - AD = \dfrac{AB \cos 45^o}{tg\ \varphi} - AD = \dfrac{2 \cos 45^o}{\frac{1}{2}} - \sqrt{2} = \sqrt{2}m$

……………………………………………………

A l'équilibre nous avons $\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$

Soit $\sum Fx = 0$ et $\sum Fy = 0$

On obtient les équations suivantes:

$R - T \sin\varphi = 0 \quad (1)$

$T \cos\varphi - P = 0 \quad (2)$

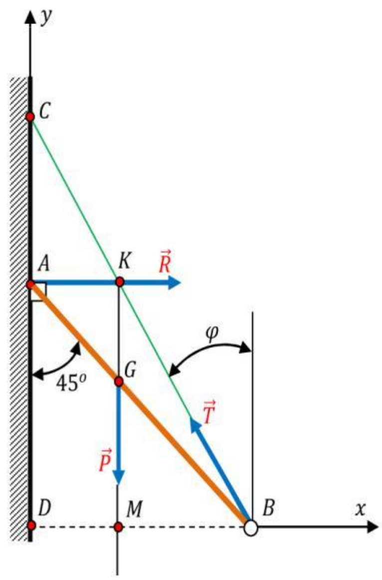
De (2) $==> \quad T = \frac{P}{\cos\varphi}$

et de (1) $==> \quad R = T sin\ \varphi = P\ tg\ \varphi$

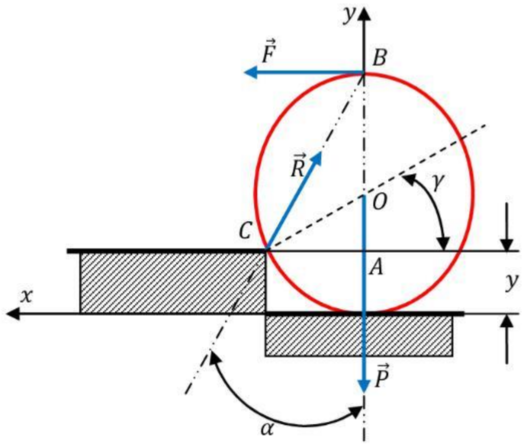
Avec $\varphi = 26{,}65^o \quad ==> \cos\varphi = 0{,}89$

$T = 5{,}61\ daN$

$R = 2{,}5\ daN$



**Exercice N° 2**:




La force minimale sera atteinte si le corps est à l'état de repos ou en mouvement uniforme (vitesse constante).

Soit $\sum \vec{F} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = \vec{0}$

$$\begin{cases} \sum Fx = 0 & -R\sin\alpha + F = 0 \quad (1) \\ \sum Fy = 0 & -P + R\cos\alpha = 0 \quad (2) \end{cases}$$

<u>De la géométrie</u>, on a:

$\cos\alpha = \frac{AB}{CB}$ ; $\quad CB = \sqrt{(CA)^2 + (AB)^2}$ ; $\quad AB = D - y = 200 - 40 = 160\ cm$

$OA = \frac{D}{2} - y = 100 - 40 = 60\ cm$ ; $\quad CA = \sqrt{(OC)^2 - (OA)^2} = \sqrt{(OC + OA)(OC - OA)}$

$CA = \sqrt{(100 + 60)(100 - 60)} = \sqrt{160.40} = 80\ cm$ ;

$CB = \sqrt{(80)^2 + (160)^2} = 80\sqrt{5}cm = 178{,}88\ cm$

$\cos\alpha = \frac{160}{80\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ; $\quad \sin\alpha = \frac{CA}{CB} = \frac{80}{80\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Des équations (1) et (2), on obtient:

$R = \frac{P}{\cos\alpha}$ ; $\quad F = R\sin\alpha = \frac{P}{\cos\alpha}.\sin\alpha = P\ tg\alpha$

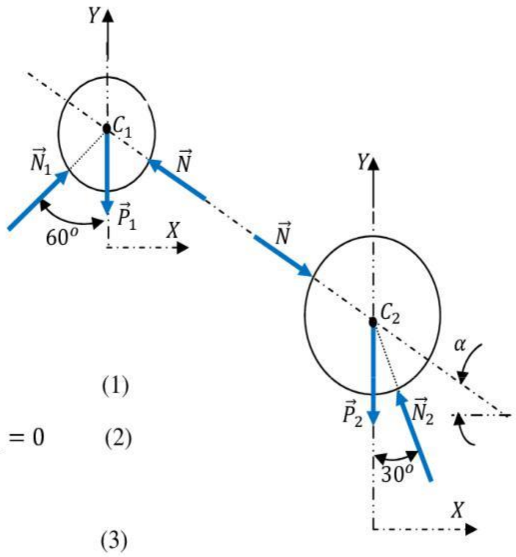
$$R = \frac{150.5}{2\sqrt{5}} = \frac{150\sqrt{5}}{2} = 75\sqrt{5}\ daN$$

$$F = R\sin\alpha = 75\sqrt{5}.\frac{\sqrt{5}}{5} = 75\ daN$$

**Exercice N° 3**:

Le système est composé de deux corps. Il faut les décomposer et appliquer le principe de Newton. On remarque que chaque corps est soumis à trois forces.

Les équations d'équilibre pour chaque corps s'écrivent:




Corps 1:

$N_1 \sin 60^o - N \cos\alpha = 0$ (1)

$N_1 \cos 60^o + N \sin\alpha - P_1 = 0$ (2)

Corps 2:

$\mathrm{N} \cos\alpha - N_2 \sin 30^o = 0$ (3)

$N_2 \cos 30^o - N \sin\alpha - P_2$ (4)

de (1), (2), (3) et (4)

$$==> \begin{cases} P_1 - N_1 \cos 60^O = N_2 \cos 30^O - P_2 \\ N_1 \sin 60^O = N_2 \sin 30^O \end{cases} ==> N_1 \cos 30^O = N_2 \sin 30^O ==> N_1 = N_2\, tg\, 30^o$$

$$P_1 - N_2 \,\mathrm{tg}\, 30^o \cos 60^o = N_2 \cos 30^O - P_2 \quad ==>$$

$$N_2 \cos 30^O + N_2\, tg\, 30^o \cos 60^o = P_2 + P_1 \quad ==> N_2 = \frac{P_2 + P_1}{\cos 30^O + tg\, 30^o \cos 60^o}$$

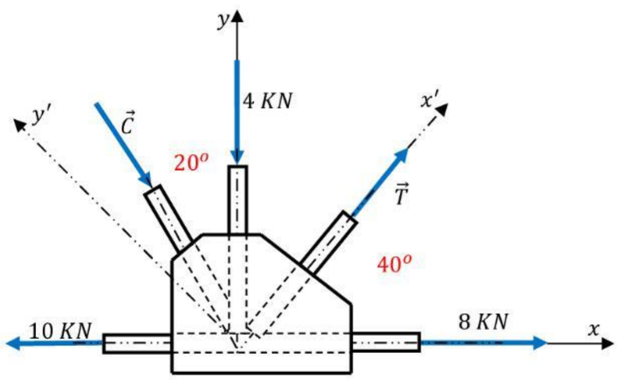
soit : $N_2 = 34{,}64\ N$ ; $N_1 = 20\ N$

$$\left.\begin{matrix} N \sin\alpha = N_2 \cos 30^O - P_2 \\ N \sin\alpha = N_2 \sin 30^o \end{matrix}\right\} ==> tg\ \alpha = \frac{N_2 \cos 30^O - P_2}{N_2 \sin 30^o}$$

soit : $tg\ \alpha = 0$ $\alpha = 0$

alors $N = N_1 \sin 60^O = 17{,}32\ N$

**Exercice N° 4**:




A l'équilibre $\sum \vec{F} = \vec{0}$

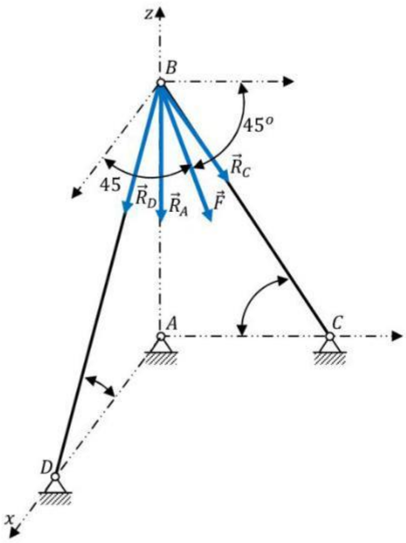
on obtient les équations suivantes:

$\sum F_x = 0 \quad ===> \quad 10 - 8 + T\cos 40^o + C\sin 20^o = 0 \qquad (1)$

$\sum F_y = 0 \quad ===> \quad T\sin 40^o - C\cos 20^o - 4 = 0 \qquad (2)$

$$\left.\begin{matrix} 0{,}766\,T + 0{,}342\,C = -2 \\ 0{,}642\,T - 0{,}939\,C = 4 \end{matrix}\right\} \quad ==> \quad T = -0{,}53\ KN \quad ; \quad C = -4{,}66\ KN$$

**Exercice N° 6**:




Même explication que celle de l'exercice précédent.

$$\sum F_X = F\ cos\ 45^o + R_D\ cos\ 30^o = 0$$

$$\sum F_Y = F\ sin\ 45^o + R_C\ cos\ 60^o = 0$$

$$\sum F_Z = -R_D\ \ sin\ 30^o - R_C\ sin\ 60^o - R_A = 0$$

$$R_D\ = -\frac{F\ cos\ 45^o}{cos\ 30^o} = -\frac{F\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{F\sqrt{6}}{3}$$

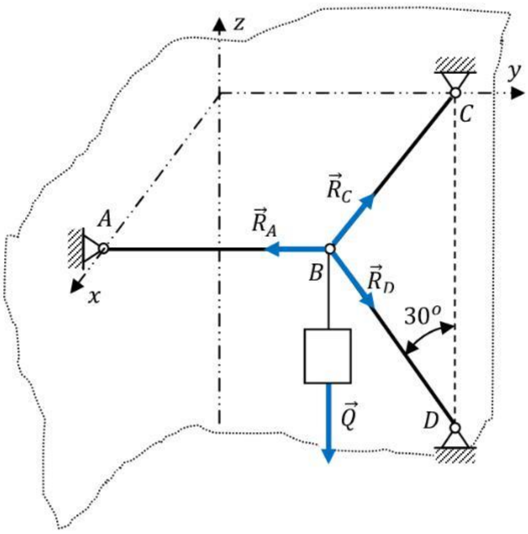
$$R_C\ = -\frac{F\ sin\ 45^o}{cos\ 60^o} = -F\sqrt{2}$$

$$R_A\ = -R_D\ \ sin\ 30^o - R_C\ sin\ 60^o = \frac{F\sqrt{6}}{6} + \frac{F\sqrt{6}}{2} = \frac{2F\sqrt{6}}{3}$$

Application numérique :

$R_A\ = 163{,}29\ N$ ; $R_C\ = -141{,}42\ N$ ; $R_D\ = -81{,}64\ N$

**Exercice N° 5**:




Les poids des 03 barres $AB$,$BC$, $BD$ sont négligeables, d'où chacune d'elles n'est soumise qu'aux réactions des liaisons. Puis qu'elles sont liées aux extrémités, le nombre de réactions pour chacun est de deux. Selon le principe de la statique, elles sont en équilibre que si les réactions aux extrémités de chaque barre sont directement opposées. Ceci nous détermine les directions des réactions sur les barres. Afin d'étudier leur équilibre, il suffit d'envisager l'équilibre de leur liaison commune, point de concours de toute le forces appliquées au système.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \qquad ==> \qquad \begin{cases} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \\ \sum F_Z = 0 \end{cases}$$

$-R_C - R_D \sin 30^o = 0$ (1) $==>$ $R_C = -R_D \sin 30^o$

$R_A = 0$ (2)

$-Q - R_D \cos 30^o = 0$ (3) $==>$ $R_D = -\dfrac{Q}{\cos 30^o}$

et $R_C = Q\, tg\, 30^o$

Application numérique:

$R_A = 0$ ; $R_D = -380{,}05\ N$ ; $R_C = 190{,}52\ N$

**TD N: 04**
**CENTRE DE MASSE**

**Exercice : 01**

*Déterminer le barycentre (centre de masse) des figures suivantes. Proposer une méthode de décomposition en éléments infinitésimaux des corps qui ne peuvent être décomposés en éléments usuels (méthodes d'intégration simple, double et triple). Chercher la solution dans la documentation bibliographique.*
*Récapituler les résultats dans un seul tableau.*

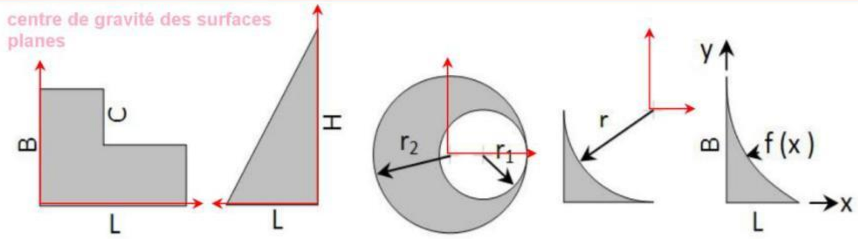
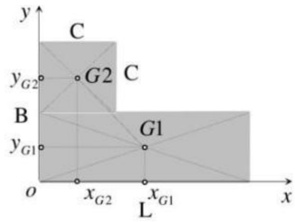



Fig. 1 :

a. Décomposons la figure en deux surfaces de formes usuelles (carrée + Rectangle).
b. Déterminons les caractéristiques géométriques de chaque surface usuelle : Les surfaces et les centres de gravité.




$$x_G = \frac{x_{G1}.S_1 + x_{G2}.S_2}{S_1 + S_2}$$
$$y_G = \frac{y_{G1}.S_1 + y_{G2}.S_2}{S_1 + S_2}$$

$$S_1 = L.(B-C) \ ; \ S_2 = C^2$$
$$x_{G1} = \frac{L}{2} \ ; \ x_{G2} = \frac{C}{2} \ ; \ y_{G1} = \frac{B-C}{2} \ ; \ y_{G2} = B - \frac{C}{2}.$$

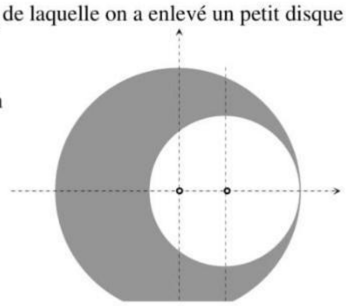
*D'où :*

$$x_G = \frac{\frac{L}{2}.L.(B-C) + \frac{C}{2}.C^2}{L.(B-C)+C^2} = \frac{1}{2}.\frac{L^2.(B-C)+C^3}{L.(B-C)+C^2}$$
$$y_G = \frac{\frac{B-C}{2}.L.(B-C) + \left(B - \frac{C}{2}\right)C^2}{L.(B-C)+C^2} =$$

Si on suppose que l'échelle du schéma est réelle : B = 2C.

$$x_G = \frac{1}{2}.\frac{L^2+C^2}{L+C} \ ; \ y_G = \frac{1}{2}.\frac{L.C+3C^2}{L+C}$$

Fig 3 : La figure est confectionnée d'un disque de rayon $r_2$ de laquelle on a enlevé un petit disque de rayon $r_1$.
Le choix des axes de coordonnées joue un rôle important.
On peut simplifier les équations, en choisissant G2, un centre de repère.
Ainsi,



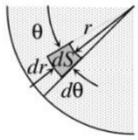
$$y_{G2} = y_{G1} = 0 \Rightarrow y_G = 0$$
$$x_G = \frac{x_{G1}.S_1 + x_{G2}.S_2}{S_1 + S_2}$$

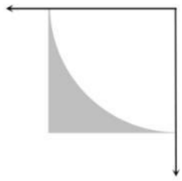
$$S_1 = \pi . r_1^2 \ ; \ S_2 = \pi . r_2^2$$
$$x_{G1} = r_2 - r_1 \ ; \ x_{G2} = 0 .$$

D'où :

$$x_G = \frac{-(r_2 - r_1)\pi . r_1^2 + 0\pi . r_1^2}{-\pi . r_1^2 + \pi . r_2^2} = \frac{-(r_2 - r_1).r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{-(r_2 - r_1).r_1^2}{(r_2 - r_1).(r_2 + r_1)}$$
$$x_G = \frac{-.r_1^2}{r_2 + r_1} \ ; \ y_G = 0$$

Fig. 4 : La figure est confectionnée d'un carré de côté $R$ *(de surface* $S_1 = R^2$ *)* de laquelle on a enlevé un quart de disque de rayon $R$ *(de surface* $S_2 = \frac{\pi}{4} R^2$ *)* .



A cause de la symétrie : $x_G = y_G$

$$x_G = y_G = \frac{x_{G1}.S_1 - x_{G2}.S_2}{S_1 - S_2}$$
$$x_{G1} = y_{G1} = \frac{R}{2}$$

*Nous devons faire l'intégrale pour déterminer le centre de gravité du quart de disque. Divisons sa surface en éléments infinitésimaux de surface* $dS = r.d\theta.dr$ et de coordonnées $x = r.\cos\theta$ ; $y = r.\sin\theta$ .

La figure a une symétrie suivant l'axe médiane : $x = y$ ,

D'où :

$$x_G = y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i dS_i}{\sum_{i=1}^{n} dS_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i dS_i}{\sum_{i=1}^{n} dS_i}$$

Quand $dS_i \to 0$ ,

$$x_G = y_G = \frac{\iint_S x.dS}{\iint_S dS} = \frac{\iint_S y.dS}{\iint_S dS} = \frac{\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} x.dS}{\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} dS} = \frac{\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} r.\cos\theta.r.d\theta.dr}{\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} r.d\theta.dr} = \frac{\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} r^2.\cos\theta.d\theta.dr}{\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} r.d\theta.dr}$$

$$= \frac{\int_{r=0}^{R} r^2.dr \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta.d\theta}{\int_{r=0}^{R} r.dr \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} .d\theta} = \frac{\left.\frac{r^3}{3}\right|_{r=0}^{R} .\sin\theta\Big|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}}{\left.\frac{r^2}{2}\right|_{r=0}^{R} .\theta\Big|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{\frac{R^3}{3}}{\frac{R^2}{2}.\frac{\pi}{2}} = \frac{4R}{3\pi}$$

Alors :

$$x_{G2} = y_{G2} = \frac{4R}{3\pi}$$

*D'où :*

$$x_G = y_G = \frac{\frac{R}{2}.R^2 - \frac{4R}{3\pi}.\frac{\pi}{4}.R^2}{R^2 - \frac{\pi}{4}.R^2} = \frac{\frac{R}{6}}{1 - \frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3}.\frac{R}{4-\pi}$$