

Chap 1 Rappel de la cinématique

L'objet de la cinématique du point est d'étudier le mouvement d'un point au cours du temps indépendamment des causes qui produisent le mouvement. Les objectifs sont la détermination des grandeurs cinématiques telles que les vecteurs accélération, vitesse, position et l'équation horaire de la trajectoire de ce point par rapport à un référentiel choisi par l'observateur.

1-Vecteur vitesse

1.1. Expression de la vitesse en coordonnées cartésiennes

La base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est constituée de vecteurs « fixes » dans le repère : leur direction, leur sens, leur norme ne changent pas au cours du temps. En utilisant l'expression du vecteur position en coordonnées cartésiennes (équation 1) et les règles de dérivation d'une somme de fonctions, on a :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z)}{dt} \quad (11a)$$

$$\vec{V}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z \quad (11b)$$

$$\vec{V}(t) = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z \quad (11c)$$

Par convention et pour alléger les expressions, la « dérivation d'une variable X par rapport au temps t » est notée par la variable surmontée d'un point pour la dérivée première, de 2 points pour la dérivée seconde etc...

$$\frac{dX}{dt} = \dot{X} \quad ; \quad \frac{d^2X}{dt^2} = \ddot{X} \quad (12)$$

Conclusion :

$$\vec{V}(V_x = \dot{x}, V_y = \dot{y}, V_z = \dot{z}) \quad (13a)$$

La valeur V de la vitesse correspond à la norme de ce vecteur :

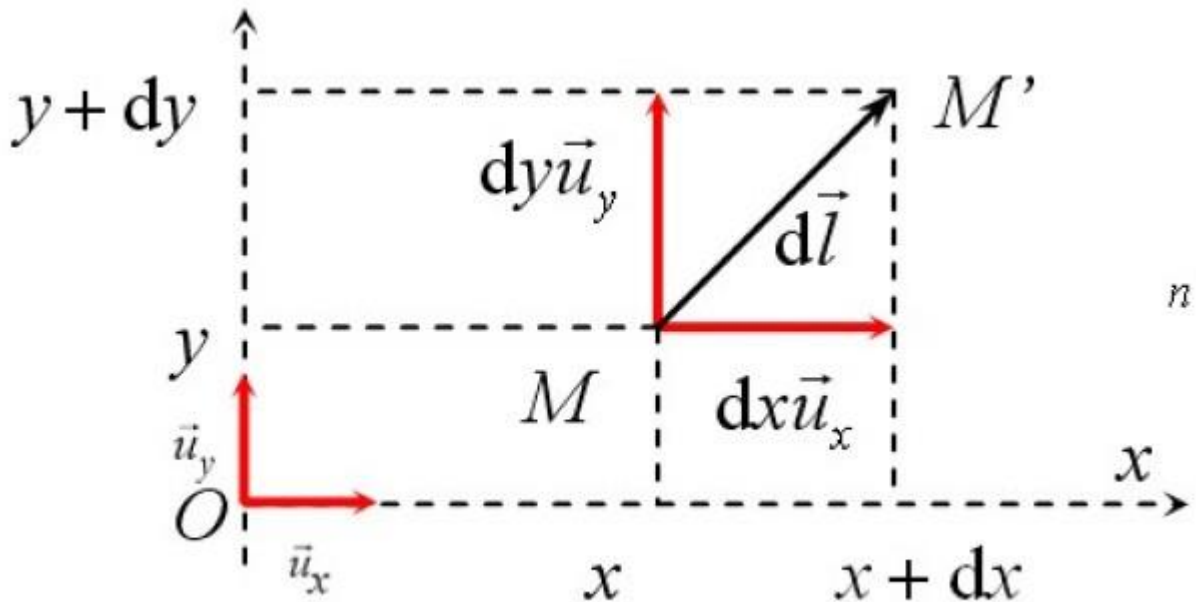
$$\|\vec{V}(t)\| = V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (13b)$$

Du vecteur déplacement élémentaire

À partir des relations (10) et (11b) on a :

$$d\vec{OM} = d\vec{l} = \vec{V}(t)dt = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z \quad (14)$$

Le déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes correspond donc à un déplacement élémentaire dx suivant la direction \vec{u}_x puis un déplacement élémentaire dy suivant la direction \vec{u}_y (voir figure 9) et enfin un déplacement élémentaire dz suivant la direction \vec{u}_z .



1.2-Expression de la vitesse en coordonnées polaires

1.2.1-Dérivation du vecteur position et vitesse angulaire

La base $\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta$ est constituée de vecteurs « mobiles » dans le repère : ces vecteurs changent de direction au cours du temps. En utilisant l'expression (2) du vecteur position en coordonnées polaires et les règles de dérivation d'un produit de fonctions, on a :

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(\rho\vec{u}_\rho)}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} \quad (15)$$

D'après l'expression (3c) le vecteur \vec{u}_ρ apparaît comme une fonction de la coordonnée angulaire θ elle-même fonction du temps au cours du mouvement du point M . La dérivation d'une fonction composée permet d'écrire :

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \omega \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} \quad (16)$$

La quantité $\dot{\theta}$ caractérise la variation de l'angle polaire au cours du temps et correspond à la définition de la vitesse angulaire. Elle est souvent notée ω (lettre grecque oméga) et s'exprime en radian/seconde (rad.s^{-1}).

1.2.2- Dérivation par rapport à l'angle θ d'un vecteur tournant de norme constante

L'application des règles de dérivation sur l'expression (3c) du vecteur \vec{u}_ρ donne :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} &= \frac{d[(\cos \theta)\vec{u}_x + (\sin \theta)\vec{u}_y]}{d\theta} = \frac{d(\cos \theta)}{d\theta}\vec{u}_x + \frac{d(\sin \theta)}{d\theta}\vec{u}_y \\ \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} &= -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y \quad (17a) \end{aligned}$$

D'après la relation (3d) on obtient finalement :

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \vec{u}_\theta \quad (17b)$$

De même pour le vecteur \vec{u}_θ :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} &= \frac{d[(-\sin \theta)\vec{u}_x + (\cos \theta)\vec{u}_y]}{d\theta} = -\cos \theta \vec{u}_x - \sin \theta \vec{u}_y = -[\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y] \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} &= -\vec{u}_\rho \quad (17c) \end{aligned}$$

Règle de dérivation d'un vecteur unitaire par rapport à l'angle polaire :

La dérivée par rapport à l'angle polaire θ d'un vecteur unitaire \vec{u} (qui ne dépend que de l'angle θ) est

un vecteur unitaire qui lui est directement perpendiculaire (rotation de $\pi/2$ dans le sens positif).

1.2.3-Dérivation par rapport au temps d'un vecteur tournant de norme constante

D'après la relation (16) on a :

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta = \omega \vec{u}_\theta \quad (18a)$$

De même :

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\dot{\theta} \vec{u}_\rho = -\omega \vec{u}_\rho \quad (18b)$$

Règle de dérivation d'un vecteur unitaire par rapport au temps :

La dérivée par rapport au temps t d'un vecteur \vec{u} de norme constante est un vecteur dont la norme est obtenue en multipliant celle de \vec{u} par la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$ et qui est directement perpendiculaire à \vec{u} (rotation de $\pi/2$ dans le sens positif).

1.2.4-Expression du vecteur vitesse en coordonnées polaires

En reprenant l'expression (15) et en utilisant le résultat (18a) on a :

$$\vec{V}(t) = \frac{d(\rho \vec{u}_\rho)}{dt} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad (19a)$$

$$\vec{V}(V_\rho = \dot{\rho} ; V_\theta = \rho \dot{\theta}) \quad (19b)$$

$$\|\vec{V}(t)\| = V = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho \dot{\theta})^2} \quad (19c)$$

Les grandeurs V_ρ et V_θ sont respectivement les composantes radiale et orthoradiale du vecteur vitesse dans la base polaire.

1.2.5-Expression du vecteur déplacement élémentaire en coordonnées polaires

$$d\vec{OM} = d\vec{l} = \vec{V}(t)dt = \left[\frac{d\rho}{dt} \vec{u}_\rho + \rho \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta \right] dt$$

À partir des relations (10) et (19a) on a :

$$d\vec{OM} = d\vec{l} = \vec{V}(t)dt = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\theta \vec{u}_\theta \quad (20)$$

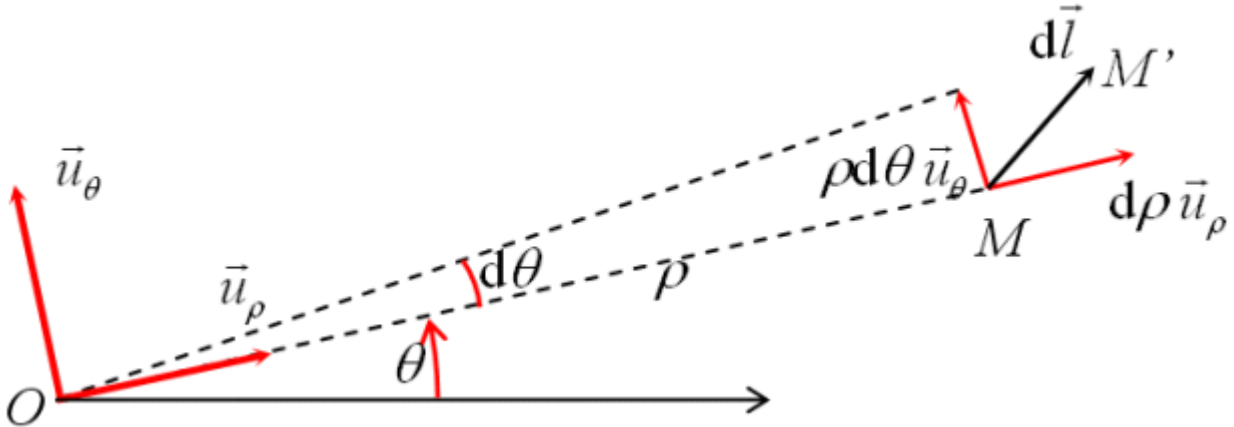


Figure 10 : Déplacement élémentaire dans le plan en coordonnées polaires

Un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ quelconque à partir d'un point M se décompose donc en un déplacement radial $d\rho$ suivant \vec{u}_ρ et un déplacement orthoradial $\rho d\theta$ suivant \vec{u}_θ .

1.2. Expression de la vitesse en coordonnées cylindriques

Il suffit de rajouter la composante suivant l'axe Oz au système de coordonnées polaires pour obtenir l'expression du vecteur vitesse. Le vecteur de base \vec{u}_z ne dépendant pas du temps on a

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(\rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z)}{dt} = \frac{d(\rho \vec{u}_\rho)}{dt} + \frac{d(z \vec{u}_z)}{dt}$$

$$\vec{V}(t) = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z \quad (21a)$$

$$\vec{V}(V_\rho = \dot{\rho} ; V_\theta = \rho \dot{\theta} ; V_z = \dot{z}) \quad (21b)$$

$$\|\vec{V}(t)\| = V = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2} \quad (21c)$$

Du vecteur déplacement élémentaire

On obtient l'expression très simplement en combinant un déplacement élémentaire en coordonnées polaires avec un déplacement élémentaire dz suivant l'axe Oz . On a donc :

$$d\vec{OM} = d\vec{l} = \vec{V}(t)dt = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z \quad (22)$$

2- Vecteur accélération

Tout comme le vecteur vitesse qui rend compte de la variation du vecteur position par rapport au temps, le vecteur accélération va rendre compte des variations du vecteur vitesse par rapport au temps. Le vecteur accélération correspond donc à la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse c'est-à-dire aussi à la dérivée seconde du vecteur position :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \quad (31)$$

Le vecteur accélération correspond à la variations du vecteur vitesse par unité de temps. L'accélération s'exprime, dans le système international, en mètres divisés par des secondes au carré : symbole $m \cdot s^{-2}$.

2.1- coordonnées cartésiennes

À partir de la définition (31) du vecteur accélération et de l'expression (11) du vecteur vitesse on a :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d[\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z]}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt}\vec{u}_x + \frac{d\dot{y}}{dt}\vec{u}_y + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{u}_z$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z \quad (32a)$$

$$\vec{a} = (a_x = \dot{V}_x = \ddot{x}; a_y = \dot{V}_y = \ddot{y}; a_z = \dot{V}_z = \ddot{z})$$

2.2- coordonnées polaires

À partir de la définition (31) du vecteur accélération et de l'expression (19) du vecteur vitesse on

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d(\dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta)}{dt} = \frac{d(\dot{\rho}\vec{u}_\rho)}{dt} + \frac{d(\rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta)}{dt}$$

a :

En utilisant les règles habituelles de dérivations d'un produit et les expressions (18) on a

$$\frac{d(\dot{\rho}\vec{u}_\rho)}{dt} = \frac{d(\dot{\rho})}{dt}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\frac{d(\vec{u}_\rho)}{dt} = \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}[\dot{\theta}\vec{u}_\theta] = \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\frac{d(\rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta)}{dt} = \frac{d(\rho)}{dt}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \frac{d(\dot{\theta})}{dt}\rho\vec{u}_\theta + \frac{d(\vec{u}_\theta)}{dt}\rho\dot{\theta} = \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}[-\dot{\theta}\vec{u}_\rho]$$

$$\frac{d(\rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta)}{dt} = -\rho\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho + (\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

En regroupant et ordonnant les différents résultats on obtient l'expression :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta \quad (33)$$

Le premier terme $a_\rho = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)$ correspond à la composante radiale de l'accélération et le second terme $a_\theta = (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})$ est sa composante orthoradiale.

2.3- coordonnées cylindriques

Il suffit de rajouter le terme correspondant à la dérivation de la cote z . on a :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z \quad (34)$$

$$\vec{a} = (a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 ; a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} ; a_z = \ddot{z})$$

2.4- Expression dans la base de Freinet

Dans la base de Frenet la vitesse s'écrit : $\vec{V} = \dot{s}\vec{u}_t = v\vec{u}_t$

Le vecteur l'accélération s'obtient en dérivant par rapport au temps le vecteur vitesse

$$\vec{a} = \frac{d\dot{s}}{dt}\vec{u}_t + \dot{s}\frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

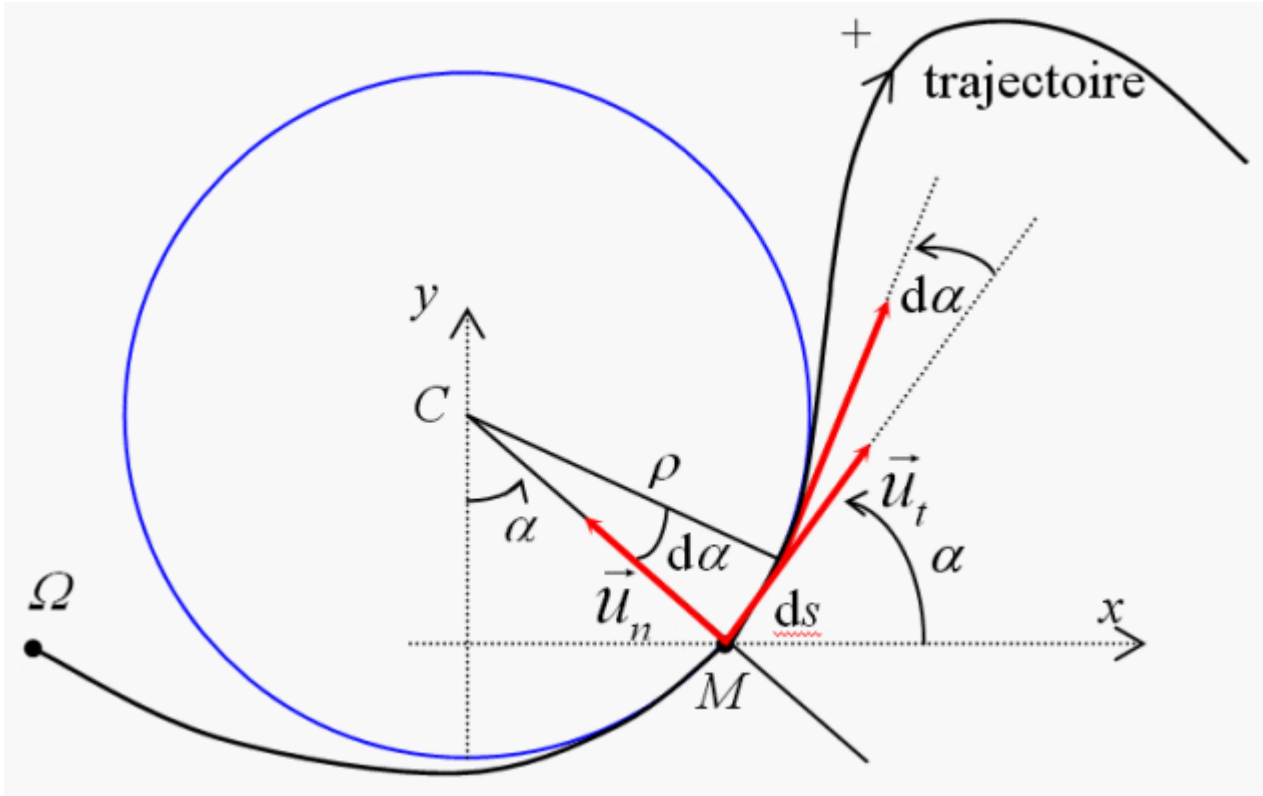


Figure 13 : Base de Frenet et déplacement ds élémentaire

À un instant t , au point M de la trajectoire, le vecteur de base \vec{u}_t fait un angle α avec la direction de l'axe des x (voir figure 13). À l'instant $t + dt$, ce vecteur tourne d'un angle $d\alpha$. La dérivée, par rapport au temps, de ce vecteur unitaire est donc donnée par (voir règle de dérivation par rapport au temps d'un vecteur tournant de norme constante) :

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \dot{\alpha}\vec{u}_n$$

Avec $CM = \rho$, le rayon du cercle osculateur tangent à la courbe au point M , on a

$$ds = CMd\alpha = \rho d\alpha \Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} = \frac{1}{\rho} \frac{ds}{dt} = \frac{\dot{s}}{\rho} = \frac{v}{\rho}$$

$$\dot{s} \frac{d\vec{u}_t}{dt} = \dot{s} \dot{\alpha} \vec{u}_n = \dot{s} \frac{\dot{s}}{\rho} \vec{u}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{u}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{u}_n$$

Finalement :

L'expression du vecteur accélération dans la base de Frenet est :

$$\vec{a} = \dot{s}\vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n \quad (35)$$

TD N:01

Exercice 1 :

Soit un vecteur $\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ suivant les coordonnées cartésiennes. Convertir ce vecteur en coordonnées polaire ?

Solutions :

Les coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées polaires s'écrivent :

$$\begin{aligned}\vec{i} &= \cos \theta \vec{U}_r - \sin \theta \vec{U}_\theta \\ \vec{j} &= \sin \theta \vec{U}_r + \cos \theta \vec{U}_\theta\end{aligned}$$

$$\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} = 2(\cos \theta \vec{U}_r - \sin \theta \vec{U}_\theta) - 3(\sin \theta \vec{U}_r + \cos \theta \vec{U}_\theta)$$

$$\vec{A} = (2 \cos \theta + 3 \sin \theta) \vec{U}_r - (2 \sin \theta + 3 \cos \theta) \vec{U}_\theta$$

Exercice 2 :

Dans un repère cartésien (O, x, y), muni de la base (\vec{i}, \vec{j}) , un point M en mouvement tel que :

$$\vec{OM} = (1 + \cos t) \vec{i} + \sin t \vec{j}$$

- 1)- Déterminer la nature de la trajectoire de M ?
- 2)- Exprimer le vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et déterminer son module
- 3)- En déduire la nature du mouvement et déterminer la vitesse angulaire ω ?
- 4)- Exprimer le vecteur accélération en coordonnées cartésiennes et déterminer son module. Que représente cette accélération dans le repère de Frenet et pourquoi?
- 5)- Déterminer l'angle α que fait l'accélération avec la vitesse ?
- 6)- Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur accélération en coordonnées polaires ?

Solution :

1)- Nature de la trajectoire :

$$\begin{aligned}x &= 1 + \cos t \\ y &= \sin t\end{aligned}$$

D'où

$$(x - 1)^2 = \cos^2 t \dots (1)$$

$$y^2 = \sin^2 t \dots (2)$$

(1)+(2) nous donne : $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

La trajectoire est un cercle de rayon $R = 1\text{m}$ et de centre $(1,0)$

2)- Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}$$

Le module de la vitesse est : $v = 1\text{m/s}$

3)- La nature du mouvement :

La vitesse est constante donc le mouvement est circulaire uniforme.

La vitesse angulaire ω est constante

$$\omega = \frac{v}{R} = 1 \text{ rad/s}$$

4)- Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\cos t \vec{i} - \sin t \vec{j}$$

Le module de l'accélération est : 1 m/s^2

Cette accélération représente l'accélération normale a_N dans le repère de Frenet car le mouvement est circulaire uniforme : l'accélération tangentielle est nulle $a_t=0\text{m/s}^2$

5)- L'angle α entre l'accélération et la vitesse :

Par le produit scalaire ou par le produit vectoriel :

$$\vec{a} \times \vec{v} = -\cos t^2 (\vec{i} \times \vec{j}) + \cos t \sin t (\vec{i} \times \vec{i}) + \sin t^2 (\vec{j} \times \vec{i}) - \sin t (\vec{j} \times \vec{j})$$
$$\vec{a} \times \vec{v} = -\vec{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{v}| = 1$$

D'autre part :

$$|\vec{a} \times \vec{v}| = a \cdot v \cdot \sin(\vec{a}, \vec{v}) = \sin(\vec{a}, \vec{v})$$
$$\alpha = \pi/2$$

6)- Vecteur vitesse et vecteur accélération en coordonnées polaire :

$\vec{OM} = R \vec{U}_r$, $R=1\text{m}$ est constant et $\theta = t$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{\theta} R \vec{U}_\theta = \vec{U}_\theta$$

Le module de la vitesse en coordonnées polaire $v=1\text{m/s}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\dot{\theta} \vec{U}_r = -\vec{U}_r$$

D'où $a=1\text{m/s}^2$

Chap 2- Notions fondamentales de la mécanique analytique

1. MOBILITES FONCTIONNELLES D'UN MECANISME

Un mécanisme est toujours modélisable. A partir de son modèle, l'étude peut mettre en évidence :

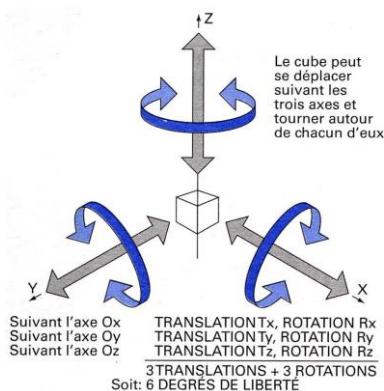
- les **efforts** mis en jeu, c'est le domaine de la **statique**,
- les **mouvements relatifs** de ses composants, c'est le domaine de la **cinématique**,
- les **puissances transmises**, c'est le domaine de la **dynamique**.

La cinématique est l'étude des mouvements possibles entre solides sans tenir compte des causes qu'ils provoquent.

En cinématique un **solide est considéré comme indéformable**. Il peut correspondre à une **seule pièce** ou à un **groupe de pièces** qui n'ont **aucun mouvement les uns par rapport aux autres au cours du fonctionnement normal**. Ce groupe de pièces est un **sous-ensemble cinématiquement lié**.

2. ETUDE DES LIAISONS MECANIQUES

Pour remplir correctement les différentes fonctions techniques d'un mécanisme, ses constituants doivent être assemblés en respectant certaines conditions qui déterminent leurs **possibilités de mouvement relatif**, c'est à dire leurs **degrés de liberté**.



Une pièce libre dans tous ses déplacements est une pièce qui n'a aucune liaison avec une autre pièce.

Dans ce cas elle peut se déplacer suivant trois axes :

- par **translation** suivant ces **trois axes**
- par **rotation** suivant ces **trois axes**

et chacun de ses déplacements se fait dans les deux sens.

Cette pièce possède six degrés de liberté.

Définir la fonction technique liaison entre deux pièces revient à préciser pour un type de liaison donné, le **nombre de degrés de liberté possibles entre ces deux pièces**. A un degré de liberté supprimé correspond un degré de liaison.

Dans tous les cas, dans une liaison entre deux pièces :

$$\text{Nbre de degrés de liberté} + \text{Nbre degrés de liaison} = 6$$

2.1. Liaisons élémentaires

Liaison simple entre deux pièces obtenue par contact entre des surfaces géométriques élémentaires appartenant aux deux pièces. Celle-ci repose sur les hypothèses suivantes :

- le contact s'établit théoriquement en un point, une portion de ligne ou d'une surface de définition géométriquement simple: point, droite, cercle, plan, cylindre, sphère, surface hélicoïdale,
- les surfaces de chacune des pièces sont supposées géométriquement parfaites et le maintien du contact est toujours assuré,
- la liaison est sans jeu.

Ces **surfaces de contact** sont appelées **surfaces fonctionnelles**.

Contact Plan/Sphère donne :
liaison ponctuelle ou Sphère-Plan

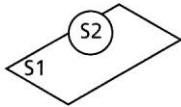
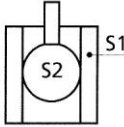
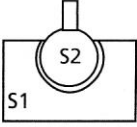
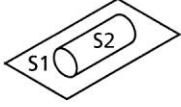
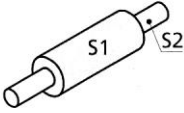
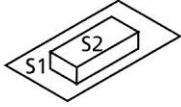
Contact **Plan/Cylindre** donne :
liaison linéaire rectiligne

Contact **Plan/Plan** donne :
liaison appui plan

Contact **Cylindre /Sphère** donne :
liaison linéaire annulaire

Contact **Cylindre/Cylindre** donne :
liaison pivot glissant

Contact **Sphère/Sphère** donne :
liaison sphérique

	Plan	cylindre	Sphère
Sphère			
Cylindre			
Plan			

2.2. Liaisons composées

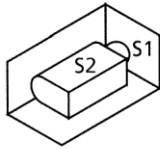
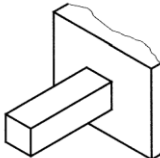
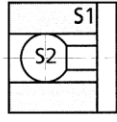
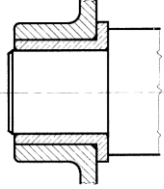
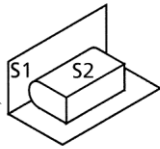
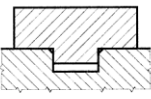
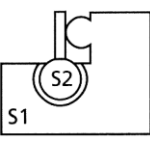
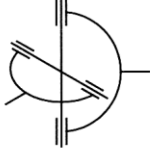
Elles sont obtenues par association cohérente de plusieurs liaisons élémentaires.

Association **Appui plan/Linéaire rectiligne/Ponctuelle** donne :
liaison complète

Association **Appui plan/Linéaire rectiligne** donne :
liaison glissière

Association **Linéaire annulaire/Appui plan** donne :
liaison pivot

Association **Rotule/Ponctuelle** donne :
liaison sphérique à doigt

Association de liaisons élémentaires	Exemple	Association de liaisons élémentaires	Exemple
 Appui plan + linéaire rectiligne + ponctuelle	 Poutre encastrée	 Linéaire annulaire + appui plan	 Guidage en rotation
 Appui plan + linéaire rectiligne	 Guidage en translation	 Rotule + ponctuelle	 Joint de cardan

3. CARACTERISTIQUES DES LIAISONS MECANNIQUES

Les liaisons mécaniques sont caractérisées par leurs **degrés de liberté** et leur **torseur d'action mécanique transmissible**.

3.1. Torseur d'action mécanique transmissible

Un torseur d'action mécanique transmissible permet d'écrire les efforts et les moments transmissibles par une liaison entre deux solides S1 et S2.

Le torseur $\{\mathbf{T}\}$ est composé :

- du vecteur \mathbb{R} , somme des actions mutuelles entre ces deux pièces,
- du vecteur \mathbb{M} , moment en un point des actions mutuelles entre ces deux pièces.

Son **écriture au centre de la liaison** (centre de réduction) se réduit à ces deux vecteurs que l'on appelle ses **éléments de réduction**.

$$\{\mathbf{T}\} = \left. \begin{array}{c} \mathbb{R}_{2/1} \\ \mathbb{M}_O \mathbb{R}_{2/1} \end{array} \right\}_R$$

Ecriture vectorielle du torseur d'action mécanique transmissible

$$\{\mathbf{T}\} = \left. \begin{array}{cc} X_{2/1} & L_{2/1} \\ Y_{2/1} & M_{2/1} \\ Z_{2/1} & N_{2/1} \end{array} \right\}_R$$

Ecriture projetée du torseur d'action mécanique transmissible

(X, Y, Z) sont les composantes de \mathbb{R}

(L, M, N) sont les composantes de $\mathbb{M}_O \mathbb{R}$

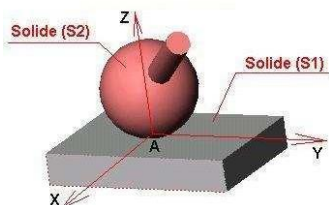
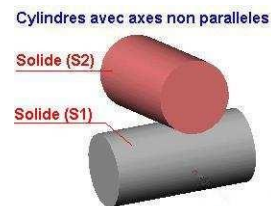
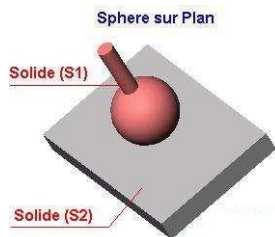
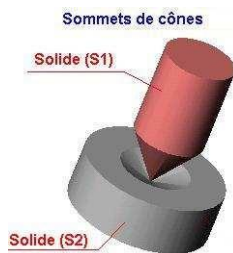
3.1.1. Expression du torseur d'action mécanique transmissible dans une liaison

Le **nombre de paramètres** du torseur est **égal** au **nombre de degrés de liaison**.

- ☐ A un **degré de liaison en translation** correspond un **paramètre de la résultante** \mathbb{R} du torseur;
- ☐ A un **degré de liaison en rotation** correspond un **paramètre du moment** $\mathbb{M}_O \mathbb{R}$ du torseur.

4. ETUDE DES LIAISONS

4.1. Liaison ponctuelle ou sphère-plan

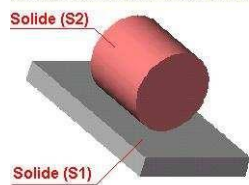


Un degré de liaison en translation suivant Az0

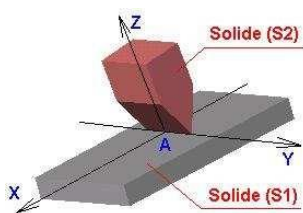
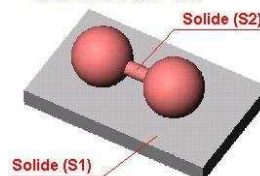
$$\{T\} = \begin{cases} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{2/1} & 0 \end{cases}_A$$

4.2. Liaison linéaire rectiligne

Surface latérale CYLINDRE / PLAN



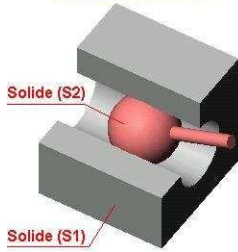
2 SPHERES sur PLAN



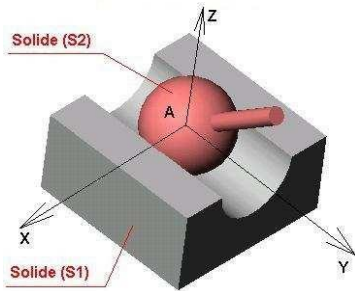
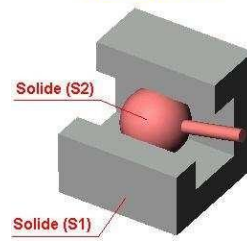
$$\{T\} = \begin{cases} 0 & L_{2/1} \\ 0 & 0 \\ Z_{2/1} & 0 \end{cases}_A$$

4.3. Liaison linéaire annulaire

SPHERE - CYLINDRE



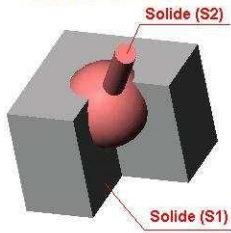
SPHERE - PRISME



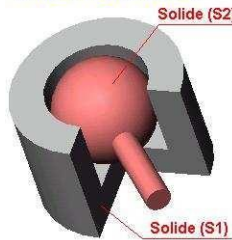
$$\{T\} = \begin{cases} X_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{2/1} & 0 \end{cases}_A$$

4.4. Liaison sphérique ou rotule

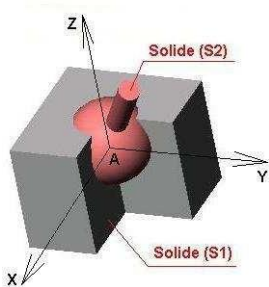
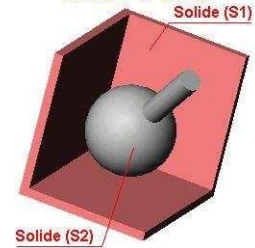
SPHERE - SPHERE



SPHERE - Cercle et Point

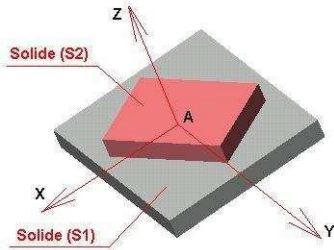
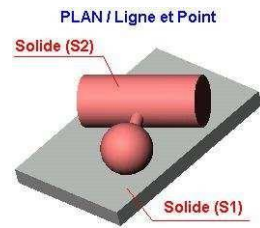
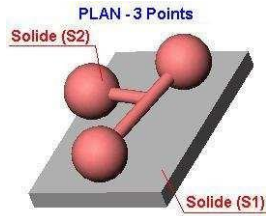
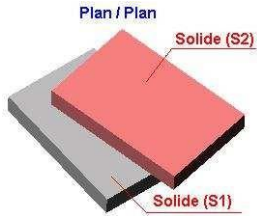


SPHERE - 3 POINTS



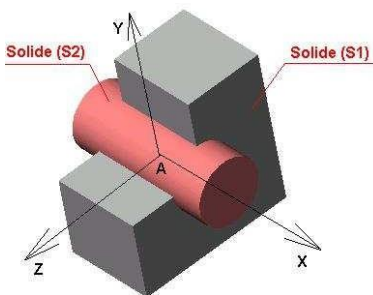
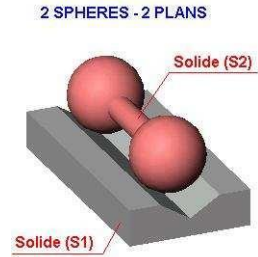
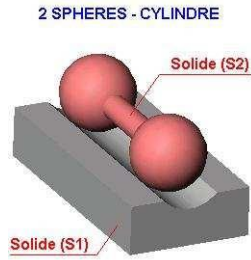
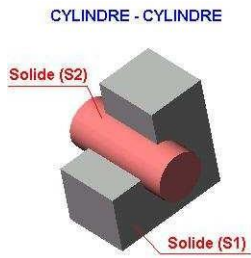
$$\{T\} = \begin{cases} X_{2/1} & 0 \\ Y_{2/1} & 0 \\ Z_{2/1} & 0 \end{cases}_A$$

4.5. Liaison appui plan



$$\{T\} = \begin{cases} 0 & L_{2/1} \\ 0 & M_{2/1} \\ A & Z_{2/1} \quad 0 \end{cases}$$

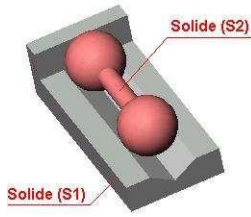
4.6. Liaison pivot glissant



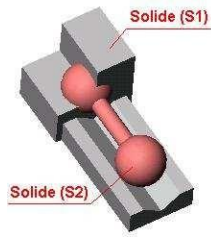
$$\{T\} = \begin{cases} 0 & 0 \\ Y_{2/1} & M_{2/1} \\ A & Z_{2/1} \quad N_{2/1} \end{cases}$$

4.7. Liaison pivot

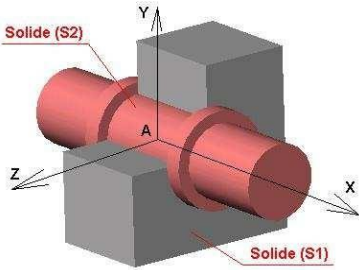
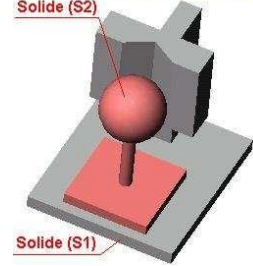
PIVOT GLISSANT + PONCTUEL



ROTULE + L. ANNULAIRE



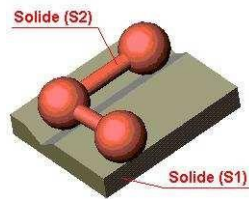
PLAN + LINEAIRE ANNULAIRE



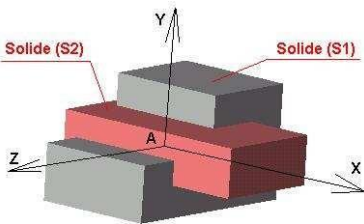
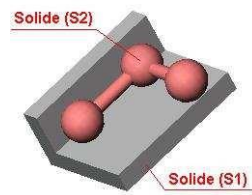
$$\{T\} = \begin{cases} X_{2/1} & 0 \\ Y_{2/1} & M_{2/1} \\ Z_{2/1} & N_{2/1} \end{cases}_A$$

4.8. Liaison glissière

PIVOT GLISSANT + PONCTUEL
(Vé+2spheres) + (Plan+sphere)

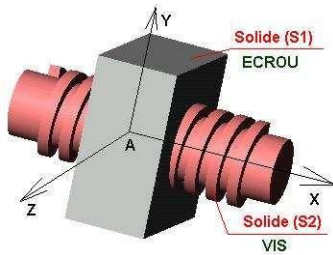
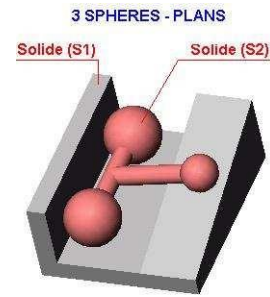
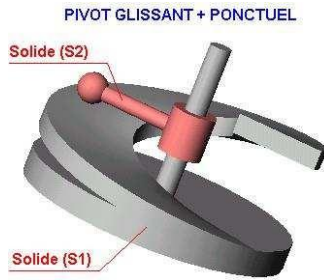


APPUI PLAN+Lineaire Rectiligne
(plan+3points) + (plan+2points)



$$\{T\} = \begin{cases} 0 & L_{2/1} \\ Y_{2/1} & M_{2/1} \\ Z_{2/1} & N_{2/1} \end{cases}_A$$

4.9. Liaison hélicoïdale



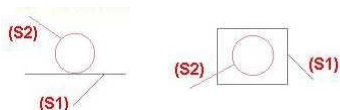
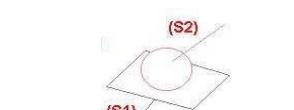
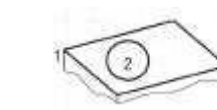
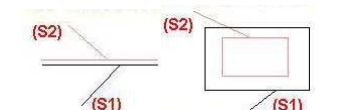
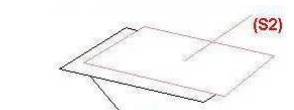



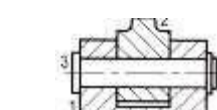
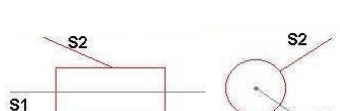

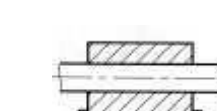
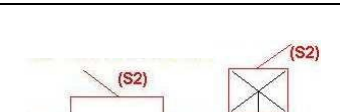
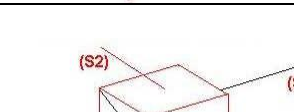
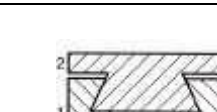
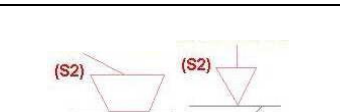

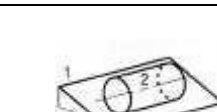

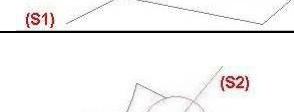
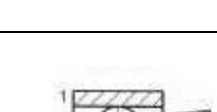
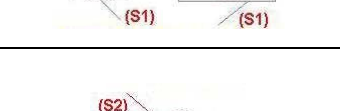


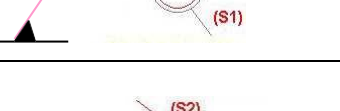

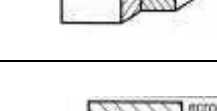
$$\{T\} = \begin{matrix} X_{2/1} & L_{2/1} \\ \left. \begin{matrix} 1 \\ Y_{2/1} \\ 1 \end{matrix} \right\} A & \begin{matrix} M_{2/1} \\ Z_{2/1} \\ N_{2/1} \\ 1 \end{matrix} \end{matrix} \quad \text{avec } T_x = f(R_x)$$

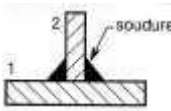
4.10. Liaison complète ou encastrement

Aucun degré de liberté possible. Ce type de liaison est soit démontable, soit indémontable (mécano-soudé).

$$\{T\} = \begin{matrix} X_{2/1} & L_{2/1} \\ \left. \begin{matrix} Y_{2/1} \\ Z_{2/1} \end{matrix} \right\} A & \begin{matrix} M_{2/1} \\ N_{2/1} \end{matrix} \end{matrix}$$

4.11. Tableau des symboles normalisés des liaisons mécaniques

Nom de la liaison	Translation	Rotation	Degrés de liberté	Représentation plane	Représentation spatiale	Exemples
Sphère-Plan	2	3	5			
Appui plan	2	1	3			
Pivot	0	1	1			
Pivot glissant	1	1	2			
Glissière	1	0	1			
Linéaire rectiligne	2	2	4			
Linéaire annulaire	1	3	4			
Sphérique	0	3	3			
Hélicoïdale	1+1	1	1			

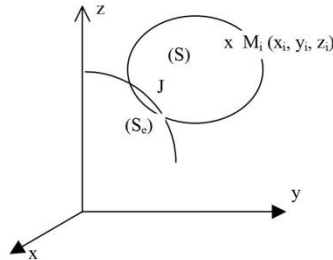
Complète	0	0	0	(S 2) (S1)	(S 2) (S1)	
-----------------	---	---	---	----------------------	------------------------------	---

I - Définition des liaisons.

Soit un système de N points (M_i) ou de N' solides en interaction. S'il s'agit de solides les forces intérieures ou de contact doivent assurer l'invariabilité des distances mutuelles. On définit ainsi des liaisons :

- holonomes (l.h)
- non holonomes (l.n.h)
- parfaites ou à résistances passives
- stationnaires ou non
- bilatérales ou unilatérales.

Le solide (S) est en contact avec (S_c), (S_c) pouvant être mobile ou non.



1.1 Liaisons holonomes.

Ce sont des liaisons se définissant par des relations entre les coordonnées, elles s'écrivent sous la forme :

$$f_k(x_i, y_i, z_i) = 0 \quad k \in [1, r] \quad i \in [1, N]$$

si r est le nombre de ces liaisons.

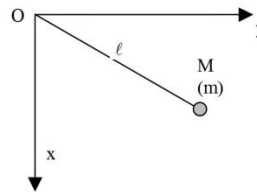
Comme exemple donnons celui du pendule simple oscillant dans le plan vertical z = 0 :

il y a deux liaisons holonomes :

$$x^2 + y^2 - \ell^2 = 0$$

ou $f_1(x, y, z) = 0$ et $z = 0$
 ou $f_2(x, y, z) = 0$

soit ici r = 2.



1.2 Liaisons non holonomes (l.n.h).

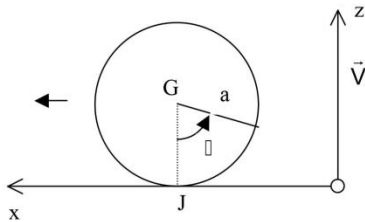
Elles se traduisent par des relations linéaires entre les vitesses et s'expriment sous la forme :

$$a_{ij} \dot{x}_i + a_i = 0 \quad i \in [1, r] \quad j \in [1, 3N]$$

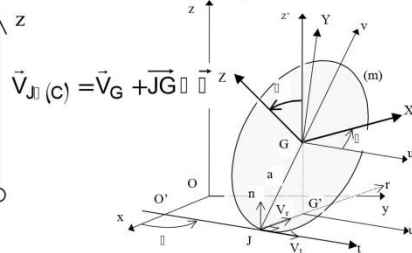
les a_{ij} et a_i étant des fonctions des coordonnées et éventuellement du temps (si obstacle mobile).

Donnons deux exemples :

a) roulement dans un plan vertical.



b) cerceau roulant et pivotant.



$$\vec{V}_J(C) = \vec{V}_G + \vec{JG} \otimes \vec{\omega}$$

Cerceau dans un plan vertical : la condition de non glissement $\vec{V}_J = \vec{0}$ donne : $\dot{x} - a\dot{\theta} = 0$, c'est-à-dire une liaison non holonome (en apparence).

Cerceau roulant et pivotant : dans le repère de projection $R_p : \{\vec{t}, \vec{r}, \vec{n}\}$ on a, avec toujours : $\vec{V}_J = \vec{0}$:

$$\vec{V}_G \begin{vmatrix} \dot{x} \cos \theta & + \dot{y} \sin \theta \\ -\dot{x} \sin \theta & + \dot{y} \cos \theta \\ \dot{z} & \end{vmatrix} \quad \vec{JG} \begin{vmatrix} 0 \\ a \cos \theta \\ a \sin \theta \end{vmatrix} \quad \vec{\omega} \begin{vmatrix} \dot{\theta} \\ -\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{\theta} + \dot{\phi} \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$\text{soit : } \vec{V}_J \begin{vmatrix} V_t = \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta + a(\dot{\theta} + \dot{\phi} \cos \theta) = 0 \\ V_r = -\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta + a \dot{\theta} \sin \theta = 0 \\ V_n = \dot{z} - a \dot{\theta} \cos \theta = 0 \end{vmatrix}$$

$V_n = 0 \Rightarrow \dot{z} - a\dot{\theta} \cos\theta$ s'intègre en $z - a \sin\theta = 0$ soit une liaison holonome : $r = 1$.

Il existe deux liaisons non holonomes : $r' = 2$, soit :

$$\dot{x} \cos\theta + \dot{y} \sin\theta + a(\dot{\theta} + \dot{\theta} \cos\theta) = 0$$

$$-\dot{x} \sin\theta + \dot{y} \cos\theta + a\dot{\theta} \sin\theta = 0$$

de la forme :

$$a_{ij}\dot{x}_i + a_i = 0 \text{ avec ici } a_i = 0$$

1.3 Liaisons parfaites ou à résistances passives.

Liaisons parfaites : \vec{R}_i , réaction de contact, : $\vec{R}_i \cdot \vec{dr}_i = 0$ avec $\begin{cases} \vec{R}_i \cdot \vec{dr}_i & \text{(absence de frottement de glissement)} \\ \vec{dr}_i = \vec{0} & \text{ou non glissement, cf cerceau.} \end{cases}$

C'est précisément parce qu'il existe des forces de frottement de glissement suffisantes...qu'il n'y a pas de glissement au point de contact.

Résistances passives : $\vec{R}_i \cdot \vec{dr}_i \neq 0$.

1.4 Liaisons stationnaires (ou instationnaires).

Exemple : dans $x^2 + y^2 - \ell^2 = 0$ le temps t n'apparaît pas de façon explicite (obstacle fixe).

Forme générale (par exemple pour des liaisons holonomes) : $f_k(x_i, y_i, z_i, t) = 0$.

1.5 Liaisons unilatérales - bilatérales.

Dans le cas du pendule simple de longueur $\ell = OA$ oscillant dans un plan vertical, soit un anneau M de coordonnées x et y se déplaçant sur la longueur du pendule : $OM \leq OA$ ou encore : $x^2 + y^2 - \ell^2 < 0$: inégalité donc liaison unilatérale (liaison bilatérale dans le cas de l'égalité).

II - Coordonnées généralisées (q_s).

Soit un système matériel (ex : N points) possédant r liaisons holonomes : $f_k(x_i, t) = 0$. $k : [1, r]$ $i : [1, 3N]$

Il existe donc r fonctions implicites de $3N$ coordonnées cartésiennes. On admettra le théorème d'analyse sur les fonctions implicites qui indique que r coordonnées (par exemple les r premières) peuvent s'exprimer en fonction des $3N-r$ autres coordonnées :

$$x_1 = x_1(x_{r+1}, \dots, x_{3N}) \quad \text{avec : } x_1, x_2, x_3 \text{ pour } x_1, y_1, z_1 \dots$$

.....

$$x_r = x_r(x_{r+1}, \dots, x_{3N})$$

Il reste donc $n = 3N-r$ coordonnées indépendantes (au sens algébrique).

2.1 Définition du nombre n de degrés de liberté d'un système mécanique.

Un système mécanique est à n degrés de liberté lorsque ses liaisons holonomes traitées comme bilatérales réduisent à n le nombre de paramètres indépendants qu'on désignera par les variables q_s . Les q_s définissent les coordonnées généralisées du système.

Notation : $n = 3N + 6N' - r$, s'il y a N points matériels et N' solides en interaction.

Exemples :

a) Pendule oscillant dans un plan vertical ($N = 1$). Les liaisons holonomes :

$$x^2 + y^2 - \ell^2 = 0$$

$$z = 0$$

donnent $r = 2$ d'où $n = 3 \times 1 - 2 = 1$ degré de liberté (par exemple l'angle θ de rotation).

$$\{q_s\} = \{\theta\}.$$

b) Cerceau roulant et pivotant ($N' = 1$). La liaison holonome :

$$z - a \sin\theta = 0$$

donne $r = 1$ d'où $n = 6 \times 1 - 1 = 5$ degrés de liberté :

$$\{q_s\} = \{x, y, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}\} \text{ par exemple.}$$

2.2 Equations de transformation.

Soit N points matériels repérés par :

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_s, \dots, q_n, t) \quad \text{noté : } \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_i(q_s, t) \quad s: [1, n] \quad i: [1, N]$$

Il existe 3N équations de transformation.

Exemple : pendule simple N = 1 : $q = \theta$.

$$\dot{\vec{r}} : \begin{cases} x = \ell \cos \theta \\ y = \ell \sin \theta \\ z = 0 \end{cases}$$

Il y a bien 3 équations de transformation.

III - Déplacements naturels (ou réels) et déplacements virtuels.

3.1 Déplacement naturel (ou réel) (dq_s, \vec{dr}_i)

Supposons résolu le mouvement du système : on connaît alors les n fonctions du temps : $q_1(t), \dots, q_n(t)$. Les dq_s sont les variations infinitésimales dans le mouvement réel (c'est-à-dire dans le temps) des quantités q_s ou encore les différentielles : $dq_s = \dot{q}_s dt$. En utilisant les équations de transformation, les déplacements élémentaires des points M_i sont donnés par :

$$\vec{dr}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} dq_s + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt$$

3.2 Déplacement virtuel (hors du temps) $(\delta q_s, \delta \vec{r}_i)$.

On se préoccupe du nombre de configurations infiniment voisines de la réalité à un instant t fixé (relevé notamment des vitesses, accélérations... à cet instant). On ne se préoccupe plus du mouvement mais des configurations possibles à cet instant en tenant compte des liaisons (variations infinitésimales géométriquement admissibles), les paramètres q_s variant de δq_s (variation et non différentielle) ce qui donne pour un point M_i :

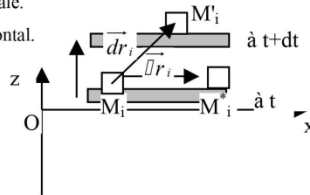
$$\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s} \delta q_s$$

déplacement virtuel de M_i .

Exemple de déplacement réel, virtuel :

Soit un solide glissant sur un plan horizontal lui-même en translation verticale.

Le déplacement virtuel $\delta \vec{r}_i$ compatible avec la liaison (à t fixé) sera horizontal.



Ici (S_e) , représenté en gris, est mobile (mouvement vertical).

TD N :02

Exercice N :01

Déterminer le nombre de degrés de liberté des deux liaisons suivantes :

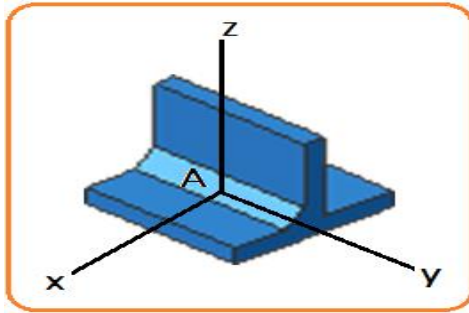


Figure 1

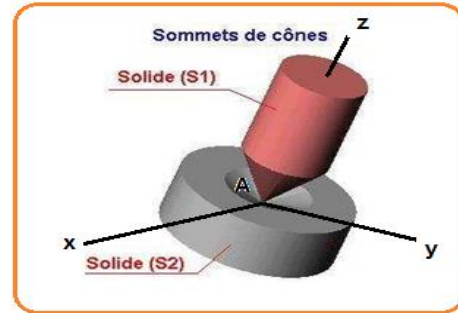


Figure 2

Exercice N :02

- Déterminer le nombre de degrés de liberté de la liaison pivot suivante :
- Ecrire son torseur des forces d'action au point A

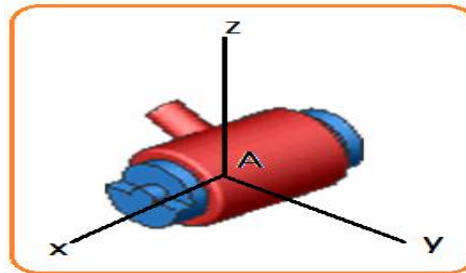


Figure 3

Exercice N :03

- Déterminer le nombre de degrés de liberté de la liaison rotule ou sphérique
- Ecrire son torseur des forces d'action au point A

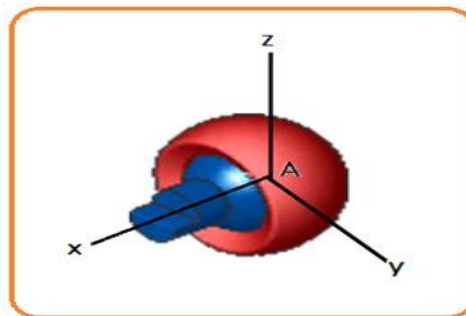


Figure 4

Solution

Exercice N :01

Figure 1

- Pas de translation le long de l'axe Ox
- Pas de translation le long de l'axe Oy
- Pas de translation le long de l'axe Oz
- Pas de rotation autour de l'axe Ox
- Pas de rotation autour de l'axe Oy
- Pas de rotation autour de l'axe Oz

Donc le nombre de degrés de liberté ; $Nddl = 0$

Figure 2

- Pas de translation le long de l axe Ox
- Pas de translation le long de l axe Oy
- Pas de translation le long de l axe Oz
- rotation autour de l axe Ox
- rotation autour de l axe Oy
- rotation autour de l axe Oz

Donc le nombre de dres de liberte ; **Nddl = 3**

Exercice N :02

Figure 3

1/-Nombre de degrés de liberté

- Pas de translation le long de l axe Ox
- Pas de translation le long de l axe Oy
- Pas de translation le long de l axe Oz
- rotation autour de l axe Ox
- pas de rotation autour de l axe Oy
- pas de rotation autour de l axe Oz

Donc le nombre de degrés de liberté ; **Nddl = 1**

2/- Torseur des forces d'action au point A

On a :

Nombre de liaison + nombre de degrés de liberté =6

Donc :

Nombre de liaisons = 6 – Nombre de degres de liberte = 6 -1= **5**

$$[T]_A = \begin{bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{bmatrix}$$

$$[T]_A = \begin{bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{bmatrix}$$

Exercice N :02

Figure 4

1/-Nombre de degrés de liberté

- Pas de translation le long de l axe Ox
- Pas de translation le long de l axe Oy
- Pas de translation le long de l axe Oz
- rotation autour de l axe Ox
- rotation autour de l axe Oy
- de rotation autour de l axe Oz

Donc le nombre de degrés de liberté ; **Nddl = 3**

2/- Torseur des forces d'action au point A

On a :

Nombre de liaison + nombre de degrés de liberté =6

Donc :

Nombre de liaisons = 6 – Nombre de degres de liberte = 6 -3= **3**

$$[T]_A = \begin{bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{bmatrix}$$

$$[T]_A = \begin{bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{bmatrix}$$

Mécanique Analytique

Notions générales

1. Introduction

La mécanique analytique est une branche de la mécanique qui s'intéresse à l'étude de systèmes mécaniques en utilisant la méthode mathématique.

2. Notions essentielles de la mécanique analytique

2.1 - point matériel

Un pt matériel est une particule de masse m , et de dimensions négligeables.

2.2 - Classification des liaisons

On peut classer les liaisons selon la forme de leurs équations.

2.2.1 - Liaison unilatérale : c'est une liaison définie par les conditions qui s'introduisent ou qui cessent brusquement au cours du temps. Ces liaisons s'expriment généralement au moyen d'inégalité de la forme

Exemple : Un pt matériel rattaché à un fil simple

$$f(x_A, y_A, t) \leq 0$$

2.2.2. Liaison bilatérale

C'est une liaison qui persiste au cours du temps.
Il existe deux types de liaisons bilatérales

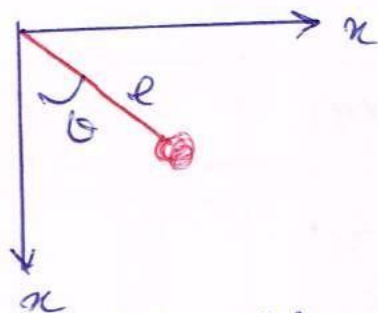
2.2.2.1. Liaison géométrique : qui impose des restrictions sur les positions du système, par définition, l'éq. de liaison est de la forme : $f(x_E, y_E, z_E, t) = 0$

2.2.2.2. Liaison cinématique : qui impose des restrictions sur les vitesses possible du système, par définition, l'équation de liaison cinématique est de la forme : $f(\dot{x}_E, \dot{y}_E, \dot{z}_E, t) = 0$

2.2.3. Liaison holonome

C'est une liaison géométrique ou on peut trouver une coordonnée en fonction d'une autre

$$\text{Ex. } \begin{cases} x = l \cos \theta \\ y = l \sin \theta \end{cases}$$



2.3. Nombre de degré de liberté : n.d.d.l

Le n.d.d.l est le nbre de coordonnées nécessaires pour repérer la position d'un système mécanique. Dans le cas général c'est le nbre de paramètres indépendants

qui déterminent entièrement la position du système.

2.4 - Equations de liaison

Les liaisons peuvent être exprimées par des eqs et de inéquations entre les paramètres.

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n, t) \geq 0$$

ou sous une forme simple

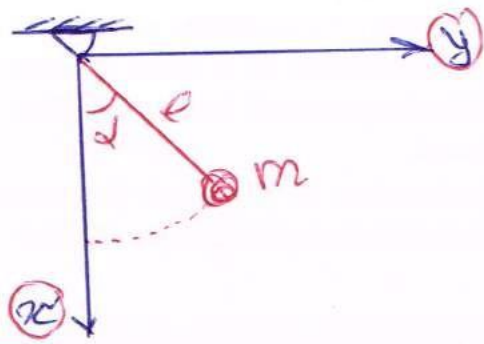
$$f_k(x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, t) \geq 0$$

Exemple (1)

Cas d'un pendule

Condition de limitation

$$f(x_m, y_m, t) : \underline{x^2 + y^2 - l^2 \leq 0} \quad \text{Ⓢ}$$



NB: pour le cas du fil en tension: $x^2 + y^2 - l^2 = 0$

Exemple (2)

Soit un pendule double

Les coordonnées génératrices sont: $(q_1 = \theta_1, q_2 = \theta_2)$

- Les coordonnées du pt A:

$$x_A = l_1 \cos \theta_1 \quad \text{et} \quad y_A = l_1 \sin \theta_1$$

- Les coordonnées du pt B:

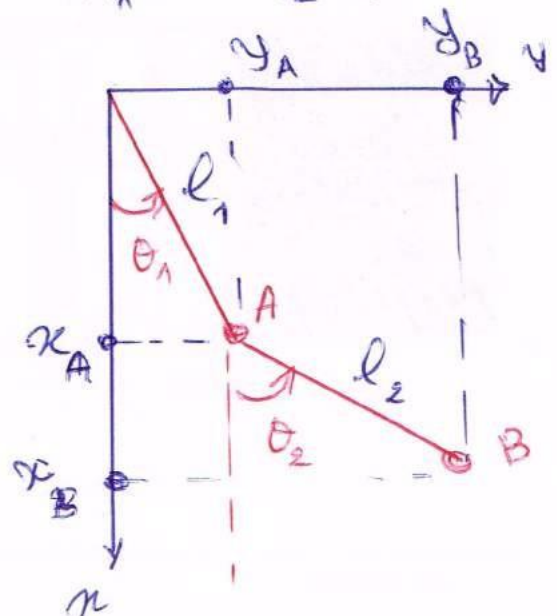
$$x_B = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2$$

$$y_B = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2$$

donc on a:

$$\vec{r}_A = \vec{r}(\theta_1)$$

$$\vec{r}_B = \vec{r}(\theta_1, \theta_2)$$



Déplacement virtuel d'un système

Principe de déplacement virtuel - Travail virtuel

1 - Déplacement virtuel

On appelle déplacement virtuel (possible) du système tout déplacement infinitésimal de pts du système compatible avec les liaisons imposées à ce système et se produisant au même instant.

Exemple:

soit $M_p(x_p, y_p, z_p)$ un pt du système

- Vecteur position: $\vec{OM} = \vec{r}_p = x_p \vec{i} + y_p \vec{j} + z_p \vec{k}$

- le déplacement virtuel du M_p :

$$\delta \vec{r}_p = \delta x_p \vec{i} + \delta y_p \vec{j} + \delta z_p \vec{k}$$

• $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: vecteurs unitaires

• $\delta x_p, \delta y_p, \delta z_p$: les projections du déplacement virtuel sur les trois axes.

2 - Principe de déplacement virtuel

Soit M_p un pt du système, pour que ce pt soit en équilibre dans le système il faut que:

$$\vec{F}_p(a) + \vec{N}_p = \vec{0}$$

avec:

$\vec{F}_p(a)$: résultante de forces actives

\vec{N}_p : résultante de forces de réaction.

Quelque soit le déplacement virtuel du M_E , la somme des travaux virtuels est nul

Càd:

$$\delta A_E^{(a)} + \delta A_E^{(n)} = 0$$

C'est le principe de travaux virtuel

Pour tout le système:

$$\sum_{E=1}^n \delta A_E^{(a)} + \sum_{E=1}^n \delta A_E^{(n)} = 0$$

si la liaison est parfaite alors $\sum \delta A_E^{(n)} = 0$

donc:

$$\sum_{E=1}^n \delta A_E^{(a)} = 0$$

Par conséquent:

$$\sum_{E=1}^n \delta A_E^{(a)} = \sum_{E=1}^n \vec{F}_E \cdot \delta \vec{r}_E = \sum_{E=1}^n \underbrace{F_{Ex}}_E \delta x_E + \underbrace{F_{Ey}}_E \delta y_E + \underbrace{F_{Ez}}_E \delta z_E$$

avec:

- $\delta x_E, \delta y_E$ et δz_E : les projections de déplacement virtuel
- F_{Ex}, F_{Ey}, F_{Ez} : les projections de force $F_E^{(a)}$ sur l'axe

NB: pour qu'un système mécanique soumis à des liaisons holonome, bilatérale, stationnaire, parfaite soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des travaux virtuel de toutes les forces actives soit égale à zéro!

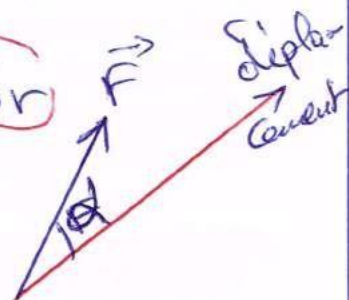
Liaison parfaite

Les liaisons pour lesquelles la somme de travaux élémentaires de toutes les forces de réaction, pour tout déplacement virtuel, est égale à zéro sont appelées les liaisons parfaites.

Remarque

1- Le travail élémentaire d'une force active quelconque F le long d'un déplacement virtuel quelconque δr est désigné par:

$$\delta A^{(a)} = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = F \cos \alpha \delta r$$



α : angle entre la direction de la force et celle du déplacement

2- Le travail entre la direction d'une force de liaison \vec{N} (ou \vec{R}) est désigné par $\delta A^{(n)}$

$$\text{Liaison parfaite: } \sum_{\mathcal{E}} \delta A^{(n)} = \sum_{\mathcal{E}} \vec{N}_{\mathcal{E}} \cdot \delta \vec{r}_{\mathcal{E}} = 0$$

$N_{\mathcal{E}}$: force de liaison (réaction) appliquée au pt $M_{\mathcal{E}}$

3)- Liaison parfaite = liaison idéale = liaison polie = liaisons sans frottement.

$$4- \vec{N}_{\mathcal{E}} \cdot \delta \vec{r}_{\mathcal{E}} = N_{\mathcal{E}x} \delta x_{\mathcal{E}} + N_{\mathcal{E}y} \delta y_{\mathcal{E}} + N_{\mathcal{E}z} \delta z_{\mathcal{E}}$$

3. Méthode générale de résolution de problème par le principe des travaux virtuels

Pour résoudre un problème en utilisant le PDTV il faut suivre les étapes:

- 1 - Représenter toutes les forces actives agissant sur le système mécanique
- 2 - Communiquer au système un déplacement virtuel
- 3 - Calculer le travail élémentaire de toutes les forces actives.
- 4 - Etablir la relation entre les grandeurs δr_i et δl_i et exprimer toutes les grandeurs (δr_i et δl_i) par une seule grandeur convenable.

Remarque: la relation entre δr_i et δl_i peut être déterminée

- par les relations géométriques.
- par les relations cinématiques.

Principe des travaux élémentaires (virtuels) (Principes de déplacement virtuel)

Ex I

Deux masses m_1 et m_2 disposées sur un double plan incliné, parfaitement lisse, sont reliées entre elles par un fil inextensible, de masse négligeable, qui passe sans frottement sur une poulie.

- Utiliser le principe de déplacements virtuels pour affirmer qu'on doit avoir: $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{m_2}{m_1}$

Solution

1ère méthode

Utilisons la loi de la projection de la force active sur l'axe de déplacement:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = \sum_{k=1}^n F_k \delta r_k \cos \theta_k = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

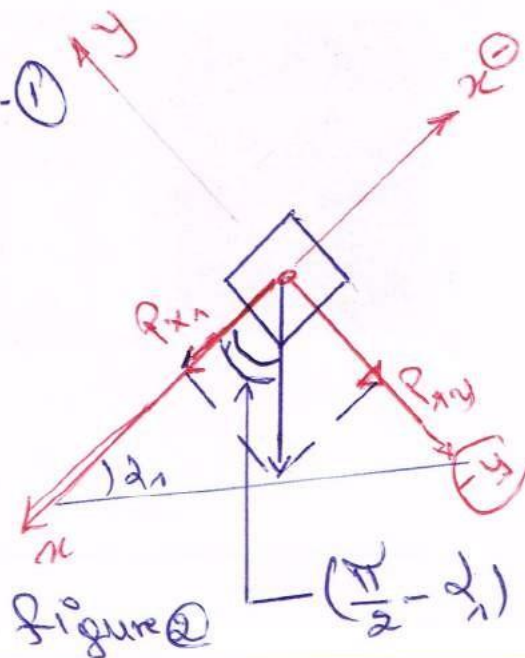
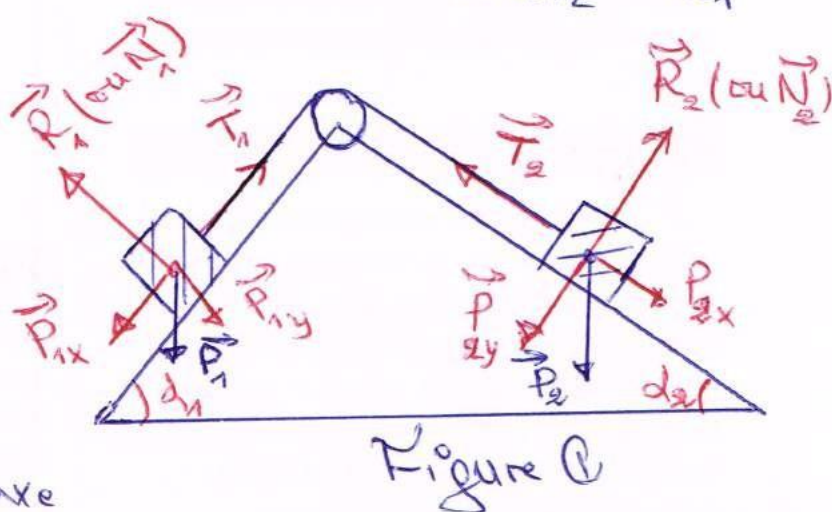
Les forces actives sont: \vec{P}_1 et \vec{P}_2

donc:

$$\textcircled{1} \rightarrow \sum_{k=1}^2 F_k \delta r_k \cos \theta_k = 0$$

$$\rightarrow P_1 \delta r_1 \cos \theta_1 + P_2 \delta r_2 \cos \theta_2 = 0$$

$\textcircled{1}'$



$$\theta_1 = ? , \theta_2 = ?$$

D'après la figure @, on trouve $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - d_1$

même chose pour θ_2 , on trouve $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - d_2$

Donc:

$$\textcircled{1}' \Rightarrow P_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - d_1\right) \delta r_1 + P_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - d_2\right) \delta r_2 = 0 \dots \textcircled{2}$$

fil inextensible (غير قابل للتمدد) $\Rightarrow \delta r_1 + \delta r_2 = 0$

$$\rightarrow \delta r_1 = -\delta r_2 \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{ ds } \textcircled{2}: P_1 \sin d_1 (-\delta r_2) + P_2 \sin d_2 \delta r_2 = 0$$

$$\Rightarrow P_1 \sin d_1 = P_2 \sin d_2$$

$$\Rightarrow m_1 g \sin d_1 = m_2 g \sin d_2$$

$$\Rightarrow \frac{\sin d_1}{\sin d_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{2} - d_1\right) \\ = \sin d_1 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - d_2\right) \\ = \sin d_2 \end{array} \right\}$$

2^e méthode

Lorsqu'on sait pas les forces de liaisons (les forces qui ne produisent pas de travaux), on applique le principe de travaux virtuel de tout les forces qui existent.

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^{(a)} + \sum_{k=1}^n \delta A_k^{(n)} = 0 \Leftrightarrow (P_1 \delta r_1 + T_1 \delta r_1 + N_1 \delta r_1) + (P_2 \delta r_2 + T_2 \delta r_2 + N_2 \delta r_2) = 0 \quad \textcircled{4}$$

- Le fil passe sans frottement sur la poulie $\Rightarrow T_1 = T_2$ (fil inextensible)

- Le plan parfaitement lisse (N_1 et N_2) \perp au plan

Donc:

$$\vec{N}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 = 0 \quad (\text{car } \vec{N}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 = |\vec{N}_1| |\delta \vec{r}_1| \cos \frac{\pi}{2} = 0)$$

et $\vec{N}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 = 0$

• $T_1 = T_2$ et $\delta r_1 = -\delta r_2$ donc $(T_1 \delta r_1 + T_2 \delta r_2 = 0$
 $\rightarrow T_1 \delta r_1 + T_1 (-\delta r_1) = 0)$

Alors: $\mathcal{H} \Rightarrow P_1 \delta r_1 + P_2 \delta r_2 = 0$

$\mathcal{H} \Rightarrow m_1 g \sin \alpha_1 - m_2 g \sin \alpha_2 = 0$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\vec{P}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 = |\vec{P}_1| |\delta \vec{r}_1| \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha_1)$$

$$\vec{P}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 = |\vec{P}_2| |\delta \vec{r}_2| \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha_2)$$

Ex II

Déterminer la relation qui existe entre les forces P et Q appliquées au mécanisme, représenté sur la figure, quand il est en état d'équilibre.

Solution:

Le syst. possède un seul d.d.l

On a:

$$\sum_{E=1}^n \delta A_E^{(a)} = 0, \text{ on a 2 forces actives, } \vec{P} \text{ et } \vec{Q}$$

donc:

$$\sum_{E=1}^2 \delta A_E^{(a)} = P \delta r_B - Q \delta r_A = 0 \quad \text{--- (1)}$$

on constate que: $3 \delta r_A = \delta r_B$ --- (2)

(2) ds (2) donne:

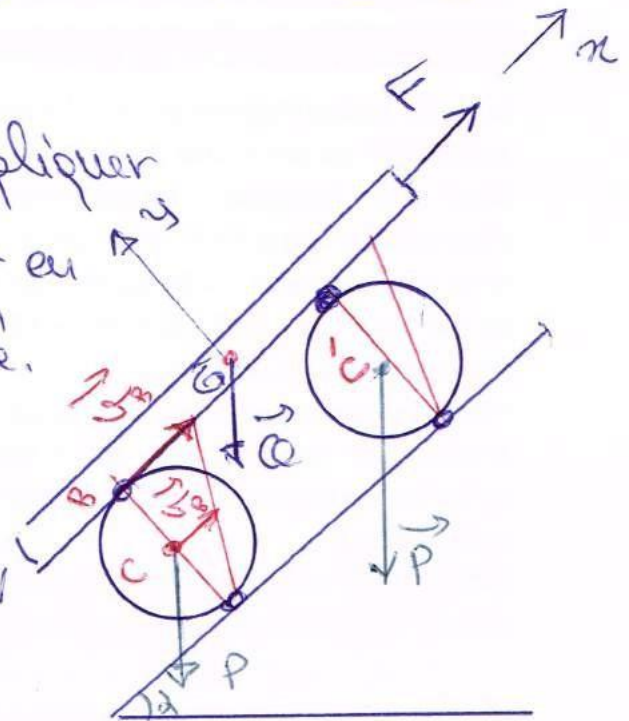
$$3 P \delta r_A - Q \delta r_A = 0 \Rightarrow \boxed{Q = 3P} \quad (\text{du déplacement})$$

NB: Le travail de \vec{Q} est négatif, car il est ds le sens contraire

Ex III

Le poids d'une poutre est égale à Q . Le poids de chacun des deux rouleaux cylindriques, sur lesquels elle est portée, est égal à P .

- Quelle force F faut-il appliquer à la poutre pour la maintenir en équilibre sur le plan incliné.
On donne α, γ et d



Appliquant le principe ob. V

force actives: $\vec{F}, \vec{P}, \vec{P}$ et \vec{Q}

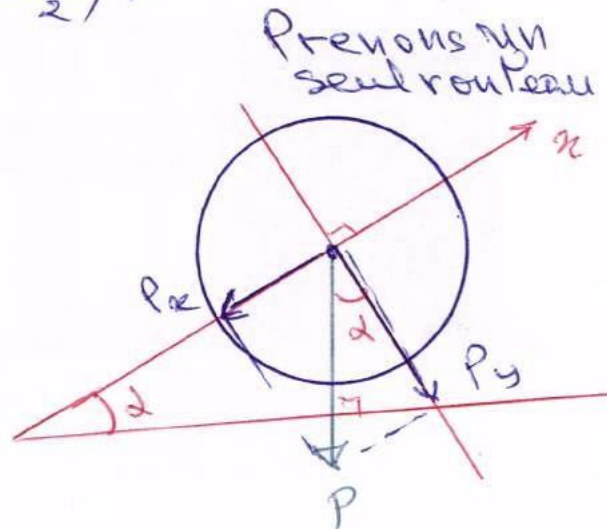
on remarque que le déplacement se fait le long de l'axe (Ox) , ds ce cas on prend toute la composante de force active qui sont parallèles à l'axe (Ox) (ceux qui sont perpendiculaires à (Ox) ont un travail nul car $\theta = \frac{\pi}{2}$).

on a: $\sum_{k=1}^n \delta A_k = 0 \Rightarrow$

$\vec{P} \begin{pmatrix} P_x = -P \sin \alpha \\ P_y = P \cos \alpha \end{pmatrix}$

Même raisonnement pour le reste de force, on trouve

$\vec{Q} \begin{pmatrix} Q_x = -Q \sin \alpha \\ Q_y = -Q \cos \alpha \end{pmatrix}$



donc:

$$\Sigma \delta A^{(9)} = 0 \Rightarrow F \delta r_B - Q \sin d \delta r_C - P \sin d \delta r_C - P \sin d \delta r_C$$

on remarque que: $\delta r_C = \delta r_C'$ et $\delta r_B = \delta r_C'$

donc:

$$F \delta r_B - Q \sin 2 \delta r_B - 2P \sin d \delta r_C = 0 \quad \dots (1)$$

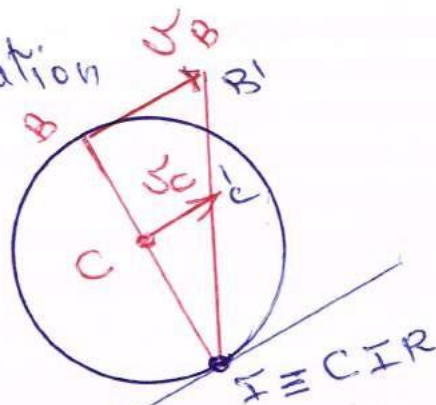
trouvons la relation entre δr_B et δr_C :

$I \equiv CIR$: Centre instantané de rotation

D'après les deux triangles $\triangle IB B'$ et $\triangle ICC'$, on a:

$$\frac{v_B}{2R} = \frac{v_C}{R}$$

$$\Rightarrow v_B = 2v_C \Rightarrow \delta r_B = 2\delta r_C \quad \dots (2)$$



(2) dans (1) donne:

$$(F - Q) 2\delta r_C - 2P \sin d (F - Q \sin d) 2\delta r_C - 2P \sin d \delta r_C = 0$$

$$\Rightarrow F = (P + Q) \sin d$$

Ex IV

Un pendule double, constitué de deux tiges identiques de masse m , de longueur l , est écarté de sa position d'équilibre verticale, grâce à une force F appliquée à l'extrémité de la tige inférieure.

Les liaisons aux deux articulations sont parfaites.

- Trouver les valeurs des angles θ_1 et θ_2 que font avec la verticale.

Solution

$$P_1 = P_2 = P$$

On a:

$$\sum_{i=1}^n SA^{(a)} + \sum_{i=1}^n SA^{(n)} = 0 \quad \text{liaison parfaite}$$

donc: $\sum_{i=1}^3 SA^{(a)} = 0 \rightarrow P_1 \delta r_1 + P_2 \delta r_2 + F \delta r_f = 0$ (1)

On remarque que P_1 et P_2 sont parallèles à l'axe Oy , donc on prend que la composante δr_x .

F est parallèle à l'axe Oy , donc on prend δr_y .

On a: Pour $P_1 (G_1)$

Pour $P_2 (G_2)$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{G_1} = \frac{1}{2} l \cos \theta_1 \\ y_{G_1} = \frac{1}{2} l \sin \theta_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{G_2} = l \cos \theta_1 + \frac{1}{2} l \cos \theta_2 \\ y_{G_2} = l \sin \theta_1 + \frac{1}{2} l \sin \theta_2 \end{array} \right.$$

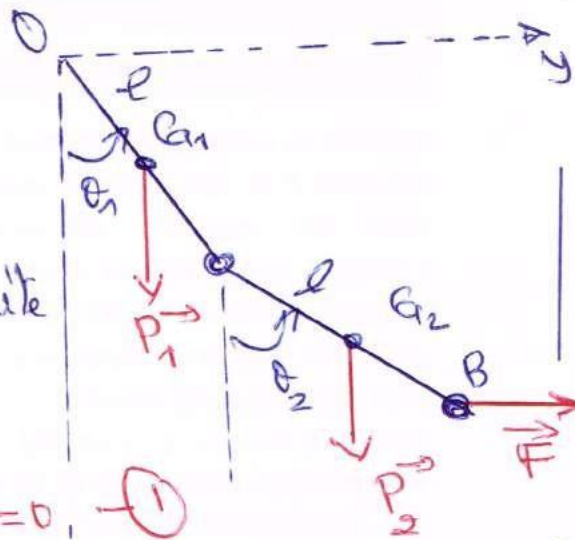
Pour $F (B)$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = l \sin \theta_1 + l \sin \theta_2 \\ y = l \cos \theta_1 + l \cos \theta_2 \end{array} \right.$$

$$\bullet x_{G_1} = \frac{1}{2} l \cos \theta_1 \Rightarrow \delta r_{x_1} = \delta x_{G_1} = -\frac{1}{2} l \sin \theta_1 \delta \theta_1 \quad (2)$$

$$\bullet x_{G_2} = \frac{1}{2} l \cos \theta_2 + l \cos \theta_1 \Rightarrow \delta r_{x_2} = \delta x_{G_2} = -l \sin \theta_1 \delta \theta_1 - \frac{1}{2} l \sin \theta_2 \delta \theta_2$$

$$\bullet y = l \cos \theta_1 + l \cos \theta_2 \Rightarrow \delta y = -l \sin \theta_1 \delta \theta_1 - l \sin \theta_2 \delta \theta_2 \quad (3)$$



②, ③ et ④ ds ① donne:

$$\left[-\frac{3mg\ell}{2} \sin\theta_1 + F\ell \cos\theta_1\right] \delta\theta_1 + \left[F\ell \cos\theta_2 - \frac{mg\ell}{2} \sin\theta_2\right] \delta\theta_2 = 0$$

$\delta\theta_1 \neq 0$ et $\delta\theta_2 \neq 0$ donc:

• $-\frac{3mg\ell}{2} \sin\theta_1 + F\ell \cos\theta_1 = 0 \Rightarrow \tan\theta_1 = \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} = \frac{2F}{3mg}$

et

• $F\ell \cos\theta_2 - \frac{mg\ell}{2} \sin\theta_2 = 0 \Rightarrow \tan\theta_2 = \frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2} = \frac{2F}{mg}$

Ex 4

Trouver la relation entre P , Q_1 , Q_2 , dans le cas d'équilibre, on donne $erb = a$, $\vec{Q}_1 = -\vec{Q}_2 = -\vec{Q}$
on néglige le poids de la tige

Solution

En appliquant le principe de déplacement virtuel, on a:

$$\sum_{k=1}^n A^{(k)} = 0 - \mathcal{E}$$

forces active sont: P , Q_1 et Q_2

donc:

$$\mathcal{E} \Leftrightarrow Q_1 \delta x_C + Q_2 \delta x_D + P \delta y_E = 0 \dots \textcircled{1}$$

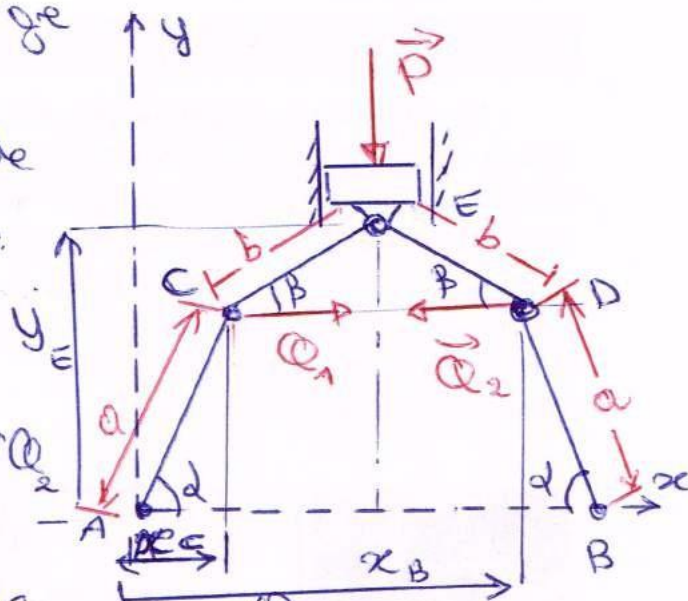
avec:

• $x_C = a \cos\alpha \dots \textcircled{a}$

• $x_D = a \cos\alpha + b \cos\beta + b \cos\beta \Rightarrow x_D = a \cos\alpha + 2b \cos\beta$
(car $a=b$) $\dots \textcircled{b}$

• $y_E = a \sin\alpha + b \sin\beta$

$\Rightarrow y_E = a \sin\alpha + b \sin\beta \dots \textcircled{c}$



$$a) \Rightarrow \delta x_C = -a \sin d \delta d \dots (2)$$

$$b) \Rightarrow \delta x_B = -a \sin d \delta d - 2a \sin \beta \delta \beta \dots (3)$$

$$c) \Rightarrow \delta y_B = a \cos \beta \delta \beta + a \cos d \delta d \dots (4)$$

(2), (3) et (4) ds (1) donne:

$$-Q_1 (+a \sin d) \delta d + Q_2 a \sin d \delta d + 2a Q \sin \beta \delta \beta + Pa \cos \beta \delta \beta + Pa \cos d \delta d = 0$$

$$\Rightarrow (-Q_1 a \sin d + Q_2 a \sin d + Pa \cos d) \delta d + (2a Q \sin \beta + Pa \cos \beta) \delta \beta = 0 \dots (5)$$

On remarque que $AB = cte$

$$AB = a \cos d + b \cos \beta \Rightarrow AB = 2a \cos d + 2a \cos \beta \quad (c \text{ arb} = a)$$

$$AB = cte \Rightarrow \delta AB = 0 \Rightarrow -2a \sin d \delta d - 2a \sin \beta \delta \beta = 0$$

$$\Rightarrow \delta d = -\frac{\sin \beta}{\sin d} \delta \beta \dots (6)$$

(6) ds (5) donne:

$$2Q \sin \beta - P(\cos \beta - \cot d \sin \beta) = 0$$

$$\Rightarrow P = \frac{2Q \sin \beta}{\cos \beta - \cot d \sin \beta}$$

Rappel

$$\text{si } \vec{A} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \text{ et } \vec{B} \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} \text{ pour } c,$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B = 0$$

Dans notre cas:

$$\vec{Q} \cdot \delta r = \begin{pmatrix} Q \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Q \delta x.$$

Principe de D'Alembert

Introduction

Le principe de D'Alembert est un principe de mécanique analytique affirmant que l'ensemble des forces de contraintes d'un système ne travaille pas lors d'un déplacement virtuel.

Principe de D'Alembert (formulation mathématique)

Les forces contraintes sont les forces s'appliquant au corps, faisant qu'il respecte les contraintes physiques (force de réaction ex de la table sur laquelle repose un corps, résistance à la rigidité aux forces extérieures ...)

Si les forces de contraintes sont \vec{R}_i pour chaque $i \in P$, alors pour tout déplacement virtuel $\delta \vec{r}_i$ du corps, on a:

$$\left(\sum_{i=1}^n \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{R l'ensemble de forces} \\ \text{de contraintes} \\ \text{ne travaille pas} \end{array} \right)$$

C'est l'équation de D'Alembert

Avec :

\vec{a}_i : accélération

\vec{F}_i : la somme de forces (qui ne sont pas de contraintes)

En utilisant le principe fondamental de la dynamique :

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i$$

on obtient :

$$(\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) = \vec{R}_i \Rightarrow (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i$$

$\leftarrow \textcircled{0}$ (expl^s de D'Alembert)

Donc :

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

Supposons que : $\vec{F}_i = \begin{pmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \end{pmatrix}$ et $\delta \vec{r}_i = \begin{pmatrix} \delta x_i \\ \delta y_i \\ \delta z_i \end{pmatrix}$

Donc :

$$\textcircled{2} \Rightarrow \sum_{i=1}^n [(F_{ix} - m_i a_{ix}) \delta x_i + (F_{iy} - m_i a_{iy}) \delta y_i + (F_{iz} - m_i a_{iz}) \delta z_i] = 0$$

YDN:03 Principe de D'Alembert

Ex I

Trouver par le principe de D'Alembert la valeur de l'angle α quand la vitesse angulaire tend vers l'infini (∞).

On donne:

- $OA_1 = OA_2 = L$, $OB_1 = OB_2 = B_1C = B_2C = a$

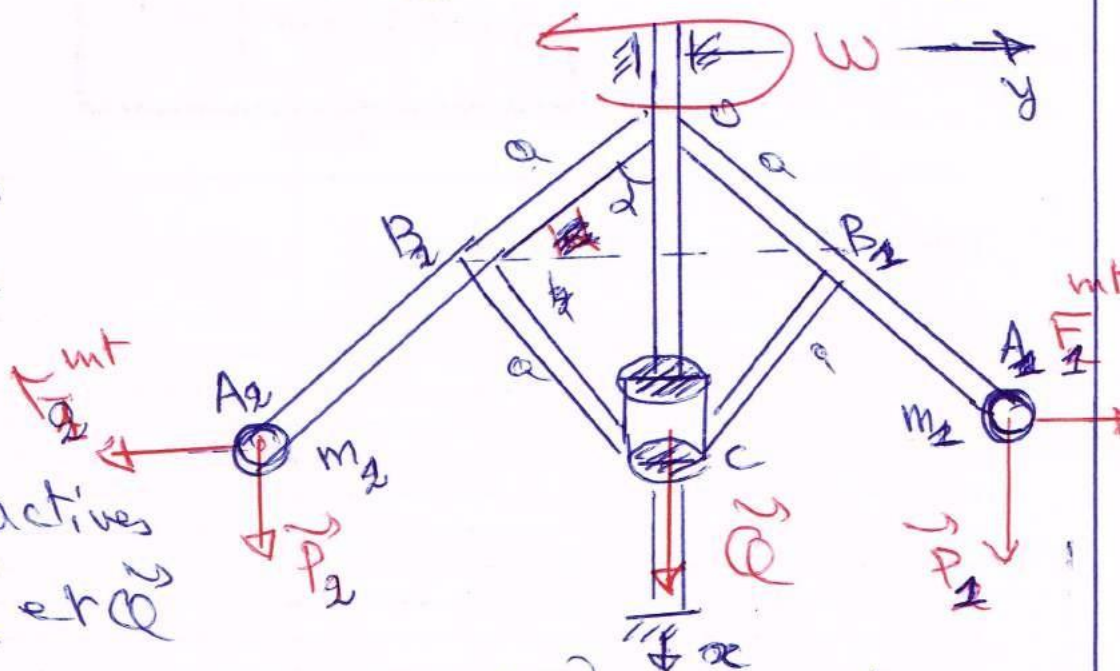
- $m_1 = m_2$ et on néglige les poids de tiges.

Solution

$$F_1^{int} = m_1 a_1$$

$$F_2^{int} = m_2 a_2$$

Les forces actives sont: \vec{P}_1, \vec{P}_2 et Q



Utilisant le principe de D'Alembert en dynamique

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - \vec{F}_i^{int}) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

$$\Rightarrow \vec{P}_1 \cdot \delta \vec{x}_1 + \vec{P}_2 \cdot \delta \vec{x}_2 + Q \cdot \delta x_3 + \vec{F}_1 \cdot \delta y_1 + \vec{F}_2 \cdot \delta y_2 = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$\textcircled{+} \quad x_1 = x_2 = L \cos \alpha \Rightarrow \delta x_1 = \delta x_2 = -L \sin \alpha \delta \alpha \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{+} \quad x_3 = a \cos \alpha + a \cos \alpha = 2a \cos \alpha \Rightarrow \delta x_3 = -2a \sin \alpha \delta \alpha \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\bullet y_1 = L \sin d \Rightarrow \dot{y}_1 = \frac{dy}{dt} = \dot{d} L \cos d$$

$$\rightarrow \ddot{y}_1 = -L \dot{d}^2 \sin d = -L \omega^2 \sin d.$$

$$\rightarrow \ddot{y}_1 = -L \omega^2 \sin d$$

$$\text{et } \delta y_1 = L \cos d \delta d \dots (3)$$

$$\bullet y_2 = -L \sin d \Rightarrow \dot{y}_2 = -\dot{d} L \cos d \rightarrow \ddot{y}_2 = L \dot{d}^2 \sin d$$

$$\Rightarrow \ddot{y}_2 = L \omega^2 \sin d \quad \text{--- A}$$

$$\text{et } \delta y_2 = -L \sin d \delta d \dots (4)$$

$$\bullet m_1 \overset{\uparrow \ddot{y}_1}{Q_1} = -m_1 L \omega^2 \sin d \quad \text{et} \quad m_2 \overset{\uparrow \ddot{y}_2}{Q_2} = +m_2 L \omega^2 \sin d$$

$$\text{--- (5)} \qquad \qquad \qquad \text{--- (6)}$$

(1), (2), (3), (4), (5) et (6) ds F donne:

$$-P_1 L \sin d \delta d - P_2 L \sin d \delta d - 2 Q_2 a \sin d \delta d$$

$$+ m_1 L \omega^2 \sin d L \cos d \delta d + m_2 L \omega^2 \sin d L \cos d \delta d = 0$$

$$P_1 L + P_2 L + 2 Q_2 a = (m_1 + m_2) L^2 \omega^2 \cos d$$

$$\Rightarrow \cos d = \frac{2 P L + 2 Q_2 a}{2 m L^2 \omega^2}$$

$$\text{Si } \omega \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \cos d = 0 \Rightarrow d = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos d \leq 1 \Rightarrow \frac{2 P L + 2 Q_2 a}{2 m L^2 \omega^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow \omega^2 \geq \frac{m L g + Q_2 a}{m L^2 \omega^2}$$

$$\Rightarrow \omega \geq \sqrt{\frac{m L g + Q_2 a}{m L^2 \omega^2}}$$

Ex 11

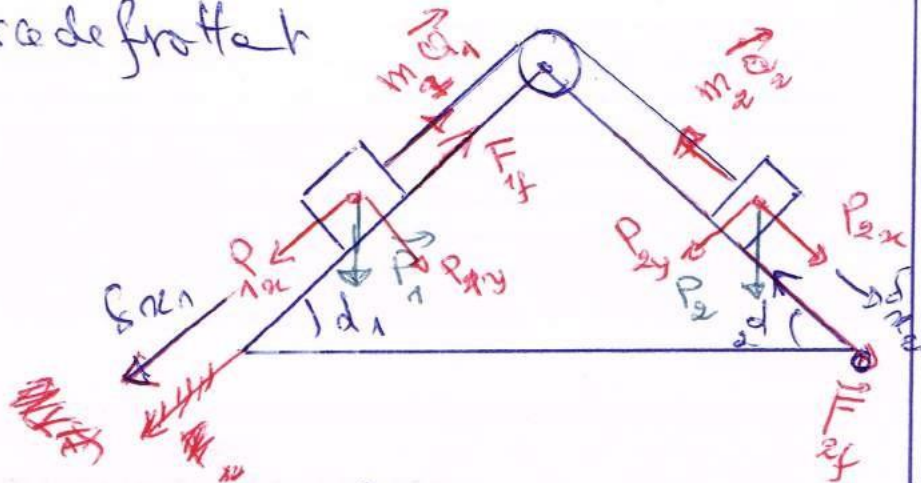
On donne le système mécanique représenté sur la figure ci-dessous.

Données : P_1, P_2 et d_1, d_2

- Déterminer l'accélération de la masse m_2 en utilisant le principe de D'Alembert.

on donne la force de frotte f

$$F_f = -P\mu$$



D'après le principe de D'Alembert, on a :

$$\sum (F_i^{(a)} - \overbrace{F_i}^{F_i^{int}}) \cdot \delta x_i = 0$$

$$\Rightarrow P_{2x} \delta \alpha_2 + F_{f_2} \delta \alpha_2 - F_2^{int} \delta \alpha_2 + P_{1x} \delta \alpha_1 - F_{f_1} \delta \alpha_1 - F_1^{int} \delta \alpha_1 = 0$$

$$\text{on a : } \begin{cases} F_1^{int} = m_1 \ddot{x}_1 \\ F_2^{int} = m_2 \ddot{x}_2 \end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} P_{1x} = P \sin d_1 \\ P_{2x} = P \sin d_2 \end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} F_{f_1} = P \mu_1 \\ F_{f_2} = P \mu_2 \end{cases} \quad \text{--- (1)}$$

Donc :

$$\textcircled{1} = 0 \quad (P_2 \sin d_2 - P \mu_2 - m_2 \ddot{x}_2) \delta \alpha_2 + (P_1 \sin d_1 - P \mu_1 - m_1 \ddot{x}_1) \delta \alpha_1 = 0$$

fil inextensible donc $\delta \alpha_1 + \delta \alpha_2 = 0 \Rightarrow \delta \alpha_1 = -\delta \alpha_2$

$$\Rightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow \dot{x}_1 = -\dot{x}_2 \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$$

Also:

$$m_2 g \sin \theta_2 - m_2 \ddot{x}_2 - m_2 g \mu_2 + m_1 g \sin \theta_1 + m_1 \ddot{x}_1 - m_1 g \mu_1 = 0$$

$$\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2 \text{ and } \ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2, \text{ donc}$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + m_1 \ddot{x}_2 = -m_1 g \sin \theta_1 + m_1 g \mu_1 + m_2 g \sin \theta_2 + m_1 g \mu_2$$

$$\rightarrow \ddot{x}_2 = \frac{m_1(\mu_1 - \sin \theta_1)g + m_2(\sin \theta_2 - \mu_2)g}{m_1 + m_2}$$

Lagrangien et l'Equation de Lagrange

1. Fonction de Lagrange ou Lagrangien

C'est une fonction de coordonnées généralisées q_i de vitesse généralisées \dot{q}_i et du temps t qui permet de décrire la dynamique d'un système. Elle est définie par :

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t)$$

avec :

- $T(q, \dot{q}, t)$: énergie cinétique totale du système
- $V(q, t)$: énergie potentielle totale du système
- $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ et $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$

2. Equation de Lagrange (ou eqs d'Euler-Lagrange)

Ce sont les équations du mouvement du système de ce cadre de la mécanique de Lagrange.

Pour un système de n degrés de liberté, décrit par un Lagrangien $L(q, \dot{q}, t)$, ces équations forment un ensemble de n équations différentielles du 2nd ordre donné par :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_d} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_d} \right) = 0, \quad d = 1, 2, \dots, n$$

C'est l'eqⁿ de Lagrange ou Lagrange-Euler

Les équations de Lagrange sont une reformulation de équations du mouvement de Newton faisant intervenir l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système via le Lagrangien et s'expriment en fonction de coordonnées généralisées

3. Équation de Lagrange en présence de forces non conservatives.

En présence de forces non conservatives :

$$\vec{F}_i(a)(nc) = \vec{F}_i(q, \dot{q}, t), \quad \text{les équations}$$

de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h}{\partial \dot{q}_d} \right) - \left(\frac{\partial h}{\partial q_d} \right) = Q_d$$

avec $Q_d = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i(a)(na) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_d}$

ou Q_d : force généralisée.

TD Lagrangien

Ex I

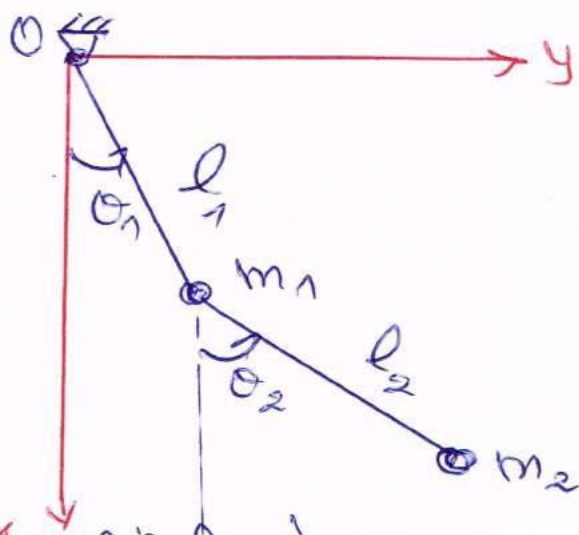
Une masse ponctuelle m_1 est reliée par un fil supposé sans masse de longueur l_1 à un pt fixe O . Une seconde masse m_2 est reliée par un fil sans masse de longueur l_2 à m_1 . Les deux masses ne peuvent pas se mouvoir que dans le plan vertical.

- 1/- Déterminer les liaisons, le nddl et les coordonnées généralisées
- 2/- Calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. En déduire l'expression du Lagrangien
- 3/- Trouver les eqts du mouvement.

Solution

1/- pour la masse m_1 + fil l_1 :
on a une liaison holonome
pour $x_1^2 + y_1^2 = l_1^2$

- pour la masse m_2 + fil l_2 :
 m_1 et m_2 sont maintenues par le fil l_2 à une distance constante : $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2$
c'est une eqt holonome aussi.



• Nddl:

Le système est formé de deux pts matériels m_1 et m_2 , donc le nombre total de m^{th} est $3 \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6$

Le fait que le m^{th} de deux pts reste dans le plan Oxy donc $z_1 = z_2 = 0$,

les deux liaisons imposent deux degrés de liaisons (corolles sont holonomes), Alors

$$Nddl = 6 - 2 - 2 = \boxed{2}$$

Enfin, on a deux coordonnées généralisées θ_1 et θ_2

2. Energie cinétique totale T :

$$\text{on a } T = T_1 + T_2 \quad - \text{ (1)}$$

$$\text{avec: } T_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 \quad - \text{ (A)}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 \quad - \text{ (B)}$$

$$\text{on a } \begin{cases} x_1 = l_1 \cos \theta_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ y_1 = l_1 \sin \theta_1 \Rightarrow \dot{y}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \end{cases}$$

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \Rightarrow v_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \quad - \text{ (3)}$$

$$\text{on a } \begin{cases} x_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \Rightarrow \dot{x}_2 = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ y_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \Rightarrow \dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \end{cases}$$

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = (-l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 + (l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_1)^2$$

$$v_2^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad \text{--- A}$$

①, ②, ③ et ④ de ① donne:

$$T = \frac{1}{2} [m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))]$$

$$T = \frac{1}{2} [(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 (l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))] \quad \text{--- A}$$

Energie potentielle

$$V = V_1 + V_2 \quad \text{--- II}$$

avec:

$$V_1 = -P_1 h_1 = -m_1 g h_1 = m_1 g l_1 \cos \theta_1 \quad \text{--- (5)}$$

$$V_2 = -P_2 h_1 - P_2 h_2 = -m_2 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad \text{--- (6)}$$

⑤, ⑥ de ② donne:

$$V = V_1 + V_2 = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2$$

$$V = -g l_1 \cos \theta_1 (m_1 + m_2) - m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad \text{--- (B)}$$

Le Lagrangien est ainsi donné par:

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2} [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (m_1 + m_2) + m_2 (l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) + g l_1 \cos \theta_1 (m_1 + m_2) + m_2 g l_2 \cos \theta_2]$$

L'eqⁿ de Lagrange est:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_d} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_d} \right) = 0 \quad \text{--- (III)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -g \sin \theta_1 (m_1 l_1 + m_2 l_2) - m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \ddot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad \text{--- (7)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 g l_2 \sin \theta_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \ddot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \quad \text{--- (8)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = l_1^2 \dot{\theta}_1 (m_1 + m_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad \text{--- (9)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad \text{--- (10)}$$

(7), (8), (9), (10) de (III) donne:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= \dots \dots \dots \text{équation (1)} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= \dots \dots \dots \text{équation (2)} \end{aligned} \right\}$$

C'est l'équation du mouvement.

