TD TRACTION ET COMPRESSION

Exercice 1 :

Une barre d'acier cylindrique de poids négligeable, de diamètre **D=25mm** et de longueur **L=250mm** , soumise à un effort de traction **F=50KN**.

- Calculer le module d'élasticité longitudinal (module de Young) **E** ,si l'allongement de la barre est **ΔL=0.3mm**.

Exercice 2 :

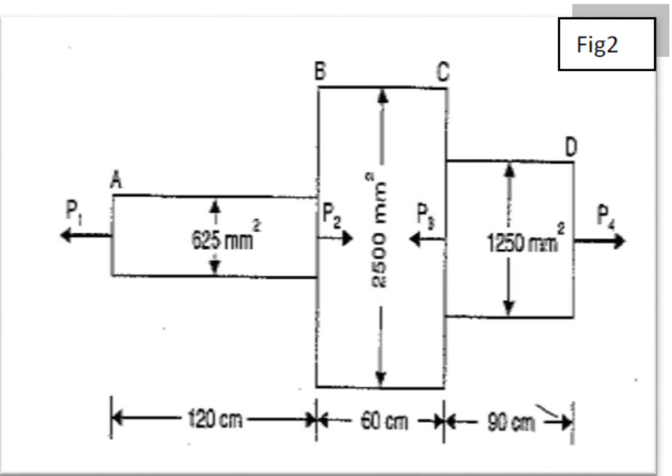


Fig2

Soit un arbre épaulé **ABCD** de poids négligeable (Fig.2)

1-Calculer l'effort **P_2** nécessaire pour que cet arbre soit en équilibre.

2- Calculer l'allongement ou le raccourcissement total de l'arbre.

On donne : **P_1=45KN , P_3=450KN , P_4=130KN et E=2.1 x 10^5 N/mm^2**

Exercice 3 :

Un pilier de section présmatique constitué de deux parties differentes (Acier+ Aluminium), de poids négligeable, soumit à une charge de compréssion **P** verticale(Fig.3)

- Calculer l'intensité nécessaire de la charge **P** pour que le raccourcissement total du barreau soit **ΔL= - 0.25mm.**

On donne :

-Pour l'acier : **E_1= 2.1 x 10^5 N/mm^2**

S_1=5cm x 5cm=25cm^2

-Pour l'aluminium : **E_2=7 x 10^4 N/mm^2**

S_2=10cm x 10cm=100cm^2

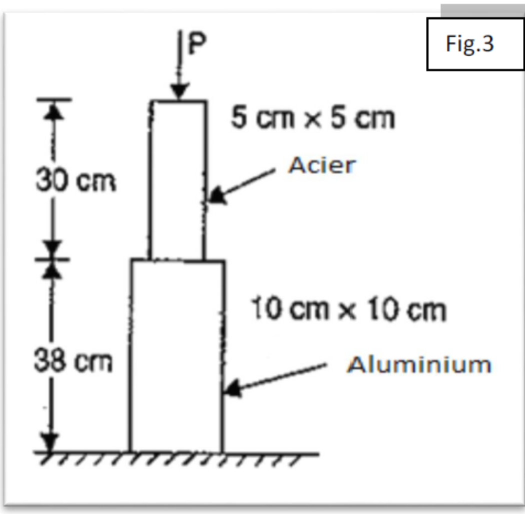
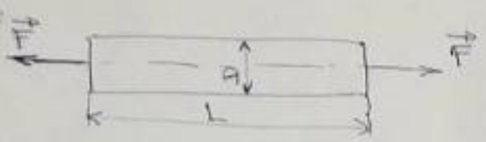


Fig.3

Ex 1:



$F = 50\,kN = 50 \times 10^3\,N.$

$D = 25\,mm$

$L = 250\,mm$

$\Delta L = 0{,}3\,mm$

. Calcul de E – ?

Loi de Hook: $\sigma = E \cdot \varepsilon \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{F}{S}$$

$$S = \pi \frac{D^2}{4} = 490{,}62\ mm^2.$$

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{50 \times 10^3}{490{,}62} = 101{,}91\ N/mm^2.$$

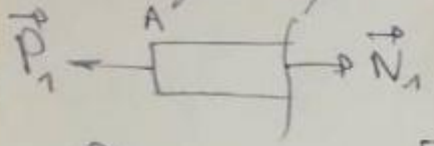
$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{0{,}3}{250} = 0{,}0012$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{101{,}91}{0{,}0012} = 84925\ N/mm^2$$

$$\boxed{E = 84925\ N/mm^2}$$

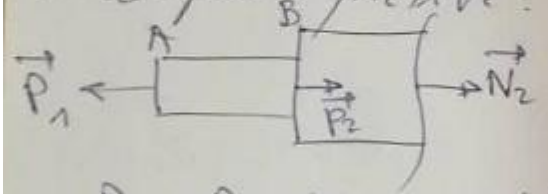
Il faut calculer N_1, N_2 et N_3.

* - Coupure fictive : $A \leq x \leq B$



$$-P_1 + N_1 = 0 \Rightarrow \boxed{N_1 = P_1 = 45\,kN}$$

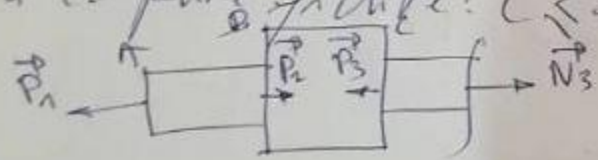
* - Coupure fictive : $B \leq x \leq C$



$$-P_1 + P_2 + N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = P_1 - P_2 = 45 - 365$$

$$\boxed{N_2 = -320\,kN}$$

* Coupure fictive : $C \leq x \leq D$



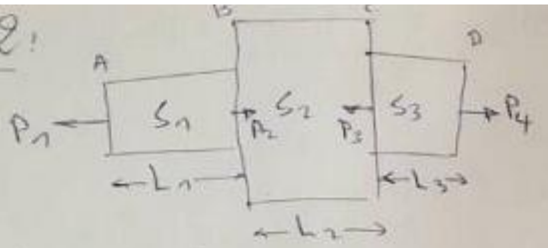
$$-P_1 + P_2 - P_3 + N_3 = 0 \Rightarrow N_3 = P_1 - P_2 + P_3 = 45 - 365 + 450$$

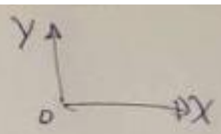
$$\boxed{N_3 = 130\,kN}$$

$$\Delta L_T = \frac{1}{2{,}1 \times 10^5}\left(\frac{45 \times 10^3 \times 120 \times 10}{625} - \frac{320 \times 10^3 \times 60 \times 10}{2500} + \frac{130 \times 10^3 \times 90 \times 10}{1250}\right)$$

$$\Delta L_T = 0{,}4914\,mm > 0 \Rightarrow (\text{Extension})$$

Ex 2:





1°) Calcul de P_2 —?

Equilibre de l'arbre : $\vec{P_1} + \vec{P_2} + \vec{P_3} + \vec{P_3} = \vec{0}$

$OX : -P_1 + P_2 - P_3 + P_4 = 0 \Rightarrow P_2 = P_1 + P_3 - P_4.$

$$P_2 = 45 + 450 - 130 = 365\,KN$$

$$\boxed{P_2 = 365\,KN}$$

2°) - Calcul de ΔT_T — ?

$$\Delta L_T = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3$$

$$\sigma_1 = E.\,\varepsilon_1 \Leftrightarrow \frac{N_1}{S_1} = E.\,\frac{\Delta L_1}{L_1} \Rightarrow \Delta L_1 = \frac{N_1 . L_1}{E . S_1}$$

- de même : $\Delta L_2 = \dfrac{N_2 . L_2}{E . S_2}$ et $\Delta L_3 = \dfrac{N_3 . L_3}{E . S_3}$

$$\Rightarrow \Delta L_T = \frac{1}{E}\left(\frac{N_1 . L_1}{S_1} + \frac{N_2 . L_2}{S_2} + \frac{N_3 . L_3}{S_3} \right)$$

Ex3:

$$\Delta L_T = \Delta L_1 + \Delta L_2 = \frac{N_1 . L_1}{E_1 . S_1} + \frac{N_2 . L_2}{E_2 . S_2}$$

$N_1 = N_2 = -P$ (compression) → il faut expliqué.

d'où ; $\Delta L_T = -P\left(\frac{L_1}{E_1 . S_1} + \frac{L_2}{E_2 . S_2}\right)$

$$\Rightarrow P = -\frac{\Delta L_T}{\frac{L_1}{E_1 . S_1} + \frac{L_2}{E_2 . S_2}} = -\frac{-0{,}25}{\frac{300}{2{,}1 \times 10^5 \times 2500} + \frac{380}{7 \times 10^4 \times 10\,000}}$$

$$P = \frac{0{,}25}{11{,}13 \times 10^{-7}} = 224618{,}14 \text{ N}$$

$$\boxed{P = 224{,}618 \text{ KN}}$$

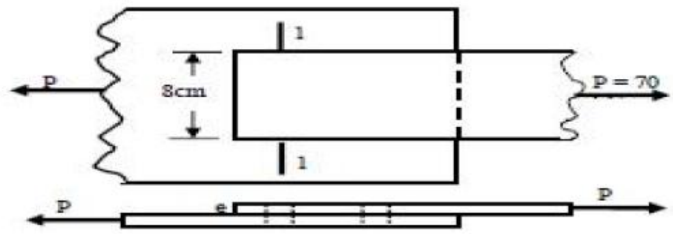
TD CISAILLEMENT

Exercice 1

Une barre en acier d'épaisseur e = 10 mm est reliée au reste d'une structure par l'intermédiaire d'un gousset, également en acier, de contrainte admissible $[\sigma]=14$ kN/cm^2. Les deux pièces sont assemblées entre elles à l'aide d'un nombre n de rivets de diamètres chacun égal à 17 mm et de contrainte admissible $[\tau]=8$ kN/cm^2 répartis comme le montre la figure ci-dessous.

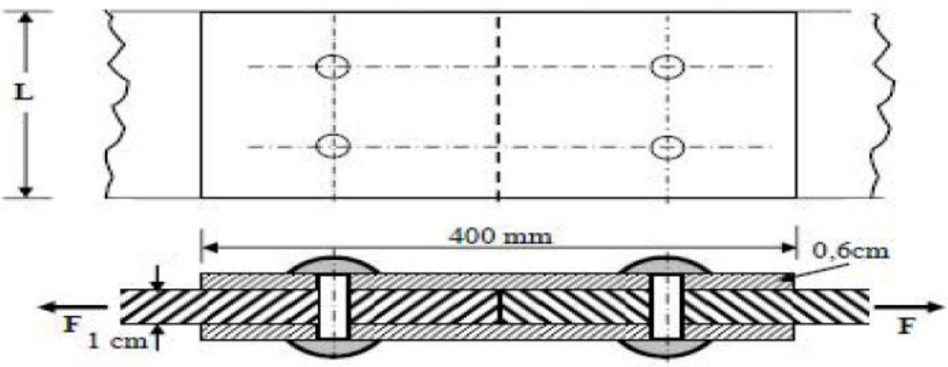
1- Quel est le nombre de rivets nécessaire à cet assemblage?

2- La barre en acier supportera-t-elle la charge appliquée ? Justifier votre réponse.



Exercice 2

Deux pièces métalliques dont l'épaisseur de chacune est égale à **1 cm**, sont assemblées à l'aide de **4** rivets dont le diamètre de chacun vaut à **16 mm** et de deux couvres joints d'épaisseur égale à **0,6 cm**, comme le montre la figure ci-dessous. La contrainte admissible dans les rivets est de **75 MN/m²**.

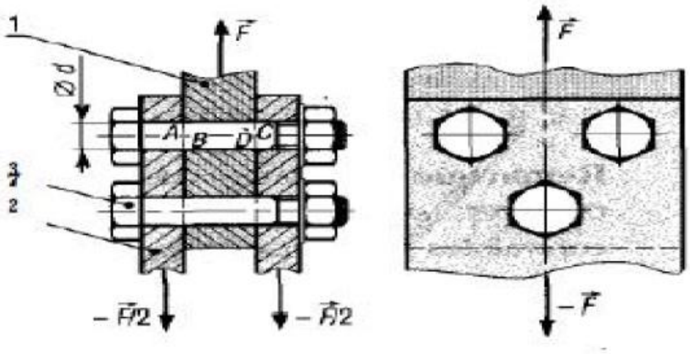


1- Déterminer l'effort **F (kN)** que supporterait l'ensemble des rivets.

2- Dimensionner les barres si la contrainte admissible du matériau les constituant est de **16 daN/mm²**.

Exercice 3

Pour l'assemblage proposé, à trois boulons ajustés en acier, d=12mm, la contrainte admissible au cisaillement des boulons est égale à 30 $daN.mm^{-2}$. Déterminer l'effort admissible F.



Exo 1 :

e=10mm=1cm ; $[\sigma]=14KN/cm^2$; d=17mm ; $[\tau]=8KN/cm^2$; P=70KN

1°- Calcul du Nbr de rivets n

La surface totale cisaillée : $S_t=nxS$

S : surface cisaillée d'un seul rivet $S=\pi d^2/4 = 226.86mm^2 = 2.26\ cm^2$

Condition de résistance en cisaillement pour les rivets : $\tau_{max} \leq [\tau]$

$T/S_t \leq [\tau]$.....avec T=P......$P/nxS \leq [\tau]$ ⇨ $n \geq P/Sx[\tau]$.....n ≥3.87......prendre n=4 rivets

2°- Condition de résistance en traction pour la barre : $\sigma_{max} \leq [\sigma]$

$N/S \leq [\sigma]$.....$S=(1x8)-(1\ x1.7)x2=4.6\ cm^2$, (section de la barre) .....70/4.6 ≤14 ⇔ 15.21 < 14 ?

⇨ La barre ne résiste pas

Exo 2 :

e=1 cm ; n=4 ; d=16mm=1.6 cm ; $[\tau]=75MN/m^2=75x10^6\ N/m^2$; $[\sigma]=16\ daN/mm^2$

Pour chaque tôle, la surface totale cisaillée des rivets est : $St = \frac{n}{2} x\ 2xS=nxS$

avec $S=\pi d^2/4$ ⇨ $S_t = 4\ \pi d^2/4 = \pi d^2 = 8.03\ cm^2$

1°- Condition de résistance en cisaillement pour les rivets : $\tau_{max} \leq [\tau]$

$T/S_t \leq [\tau]$ ⇔ $F/S_t \leq [\tau]$ ⇨ $F \leq [\tau]\ x\ S_t$...........$F \leq 75x10^6\ x8.03\ x10^{-4}$=60225N=6022.5daN

$F \leq 6022.5daN$

2°- Condition de résistance en Traction des barres : $\sigma_{max} \leq [\sigma]$

$N/S \leq [\sigma]$ ⇨ $F/S \leq [\sigma]$ ⇨ $F/(e\ x\ L)-2(1.6x1) \leq [\sigma]$ ⇨ $L \geq F+3.2[\sigma]\ /e\ x\ [\sigma]$ =40.84mm

L ≥ 40.84mm .....prendre L = 41mm

Exo 3 :

d=12mm ; $[\tau]=30\ daN/mm^2$

Condition de résistance en cisaillement pour les boulons : $\tau_{max} \leq [\tau]$

- *<u>1ére méthode</u>* : On considérants la pièce **1**

$\tau=T/S_t= F/S_t$.....avec $S_t=n\ x\ 2S = n\ x\ 2\pi\ d^2/4 = 3\ x\ 2\pi\ (12)^2/4 = 678.24mm^2$

$F/S_t \leq [\tau]$ ⇨ $F \leq S_t\ x\ [\tau]$= 678.24 x 30 =20347.2daN = $20.34\ x10^3$ daN

$F \leq 20.34\ x10^3$ daN

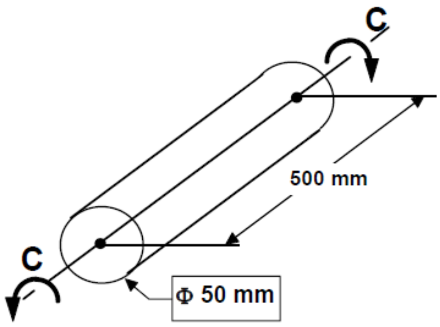
- *<u>2ére méthode</u>* : On considérants la pièce **2**

$S_t=n\ x\ S = n\ x\ \pi\ d^2/4 = 3\ x\ \pi\ (12)^2/4 = 339.12mm^2$ et T= F/2

$T/S_t \leq [\tau]$ ⇔ $F/2S_t \leq [\tau]$ ⇨ $F \leq 2S_t\ x\ [\tau]$=2x339.12x30=20347.2daN = $20.34\ x10^3$ daN

$F \leq 20.34\ x10^3$ daN

TD TORSION



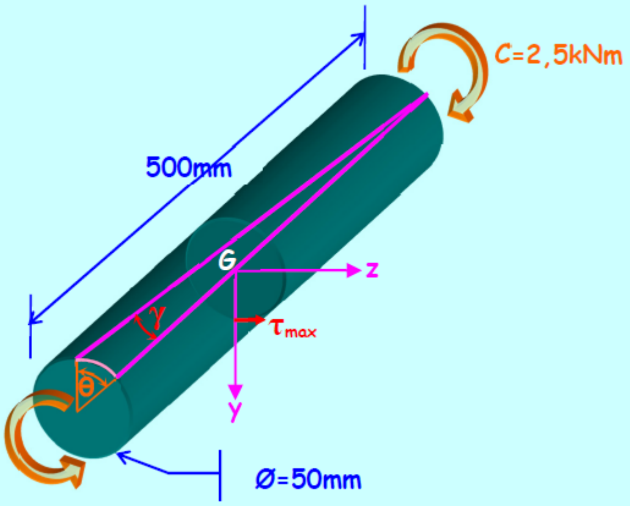
Un cylindre est soumis à un couple de torsion C = 2.5 kNm. Le module de COULOMB du matériau vaut 78 GPa. Calculez:

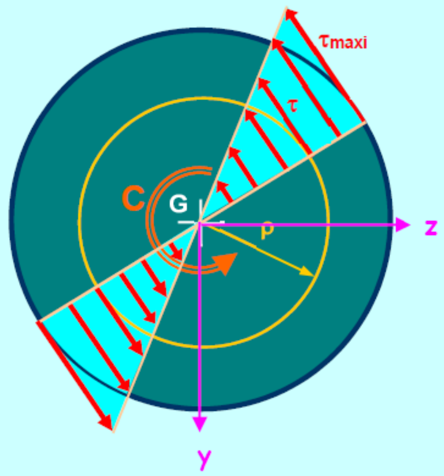
a) la contrainte tangentielle maximum dans le cylindre.

b) la distorsion des génératrices en rd et en °.

c) l'angle de rotation des sections extrêmes en °.

RÈPONSES N°8





a) Le moment de torsion M_x est constant tout le long de la barre. $M_x = C$

Considérons une section quelconque G : $\tau_{\max i} = \dfrac{C}{I_G} R$ avec $I_G = \dfrac{\pi D^4}{32}$

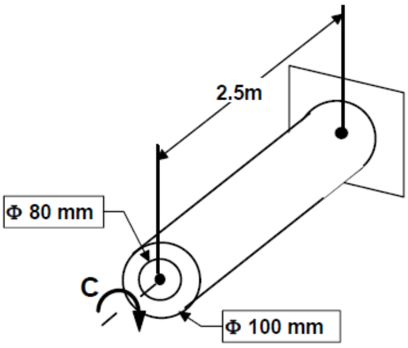
$$\tau_{\max i} = \frac{2{,}5.10^6 \times 25 \times 32}{\pi \times 50^4}$$ **τmax=101,86 MPa**

b) Appliquons la loi de Hooke en torsion : $\tau = G\gamma$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{101{,}86}{78.10^3}$$ **γ=1,305.10⁻³ rd = 0,0748°**

c) L' angle de rotation des sections extrêmes nous est donné par la relation : $\theta_x^{\max i} = \dfrac{M_x L}{G I_G}$

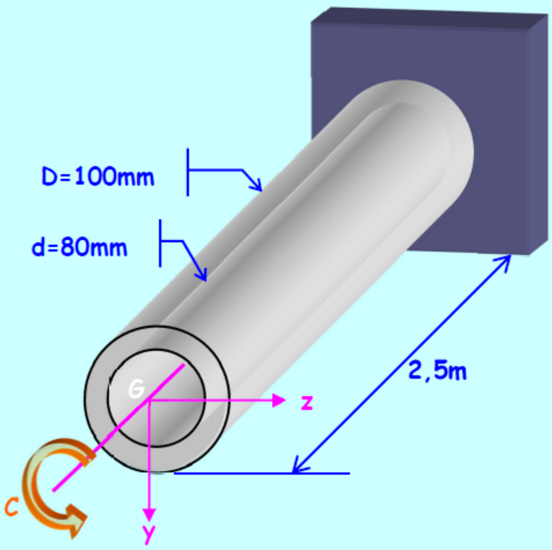
$$\theta_x = \frac{2{,}5.10^6 \times 500 \times 32}{78.10^3 \times \pi \times 50^4}$$ **θ = 0,0261 rd = 1°50**

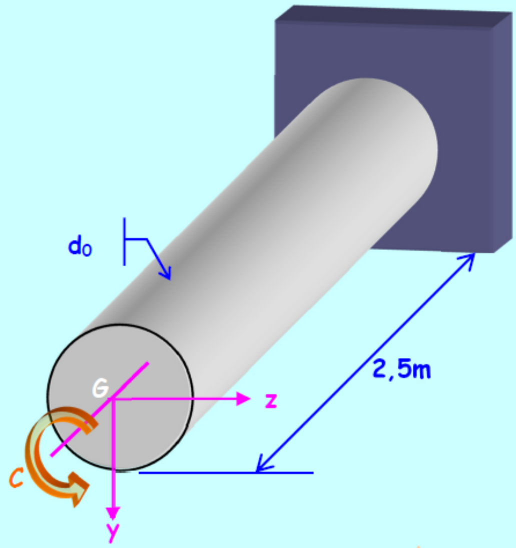


a) Calculez le couple C qui provoque une rotation des sections extrêmes du tube de 2° sachant que G = 27 GPa. En déduire la contrainte tangentielle maximum.

b) Calculez, pour d'un cylindre de même poids que le tube et qui supporte le même couple, l'angle de rotation des sections extrêmes et la contrainte tangentielle maximum.

RÈPONSES N°9





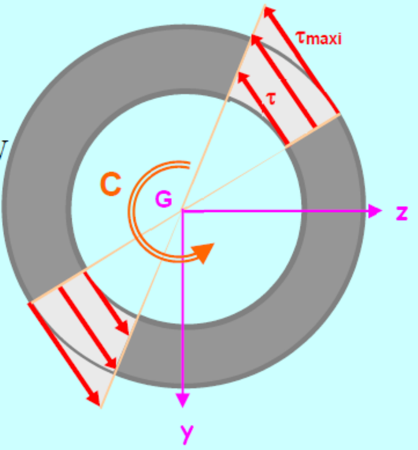
a) $\theta_x^{\max i} = \dfrac{M_x L}{G I_G}$ avec $I_G = \dfrac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{32}$ et $\theta_{rd} = \dfrac{\theta^\circ \times \pi}{180}$

$$M_x = \frac{G I_G \theta_x^{\max i}}{L} = \frac{27.10^3 \times \pi \times \left(100^4 - 80^4\right) \times 2 \times \pi}{32 \times 180 \times 2,5.10^3} = 2185130 mmN$$

C = 2185,13mN

$$\tau_{\max i} = \frac{C}{I_G} R = \frac{2185,13.10^3 \times 100 \times 32}{2 \times \pi \times \left(100^4 - 80^4\right)}$$

τ_{max} = 18,85 MPa



b) Même poids implique même volume donc même aire

$$A = A_0 \Rightarrow \frac{\pi d_0^2}{4} = \frac{\pi\left(D^2 - d^2\right)}{4} \quad \Rightarrow \quad d_0 = \sqrt{100^2 - 80^2} = 60mm$$

$$\theta_x^{\max i} = \frac{M_x L}{G I_G} = \frac{2185,13.10^3 \times 2500 \times 32}{27.10^3 \times \pi \times 60^4}$$

θ_{max}= 0,159rd = 9°11

$$\tau_{\max i} = \frac{C}{I_G} R = \frac{2185,13.10^3 \times 30 \times 32}{\pi \times 60^4}$$

τ_{max}= 51,52 MPa

On se propose ici d'étudier un plongeoir de piscine en flexion (voir photo ci-contre).

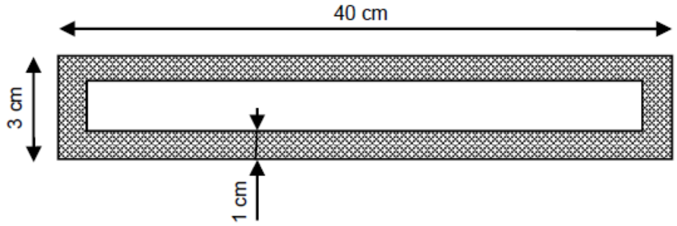
Caractéristiques planche de plongeoir :

Matériau :

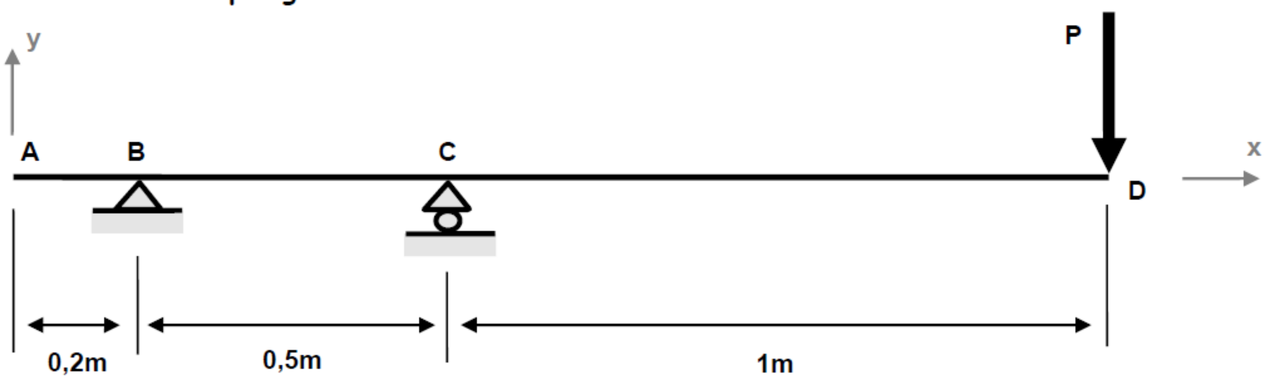
Composite verre-époxy

- $E = 21000$ MPa
- $Re = 200$ MPa

Section creuse :



Modélisation du plongeoir :



Partie I : résistance

1. Déterminer les réactions des appuis du plongeoir au sol en fonction de P.
2. Exprimer littéralement le ou les torseurs de section puis tracez les diagrammes de sollicitation.
3. En déduire la section la plus sollicitée.
4. Pour cette section, déterminer l'expression de la contrainte normale maxi σ_{max} en fonction de la charge P.
5. Soit P = 10 000 N. Faire l'application numérique de σ_{max}. Quel est alors le coefficient de sécurité de tenue de la structure ?

Partie II : déformation

1. Tracer l'allure approximative de la déformée de la planche sous l'application de P
2. Soit le moment de flexion entre C et D : $\mathbf{M = a\,x + b}$ où a et b sont 2 constantes.
   Donner littéralement l'expression de la déformée entre C et D sans résoudre les constantes d'intégration.
3. Une étude expérimentale a permis de déterminer au point C un angle d'inclinaison de la planche par rapport à sa position initiale à l'horizontal de **-5.22°**
   Déterminer alors les constantes d'intégration.
4. Que vaut alors la flèche maxi de la planche.

Inconnues de liaison : X_B, Y_B et Y_C

- Moment : $\sum \vec{M} = \vec{0}$

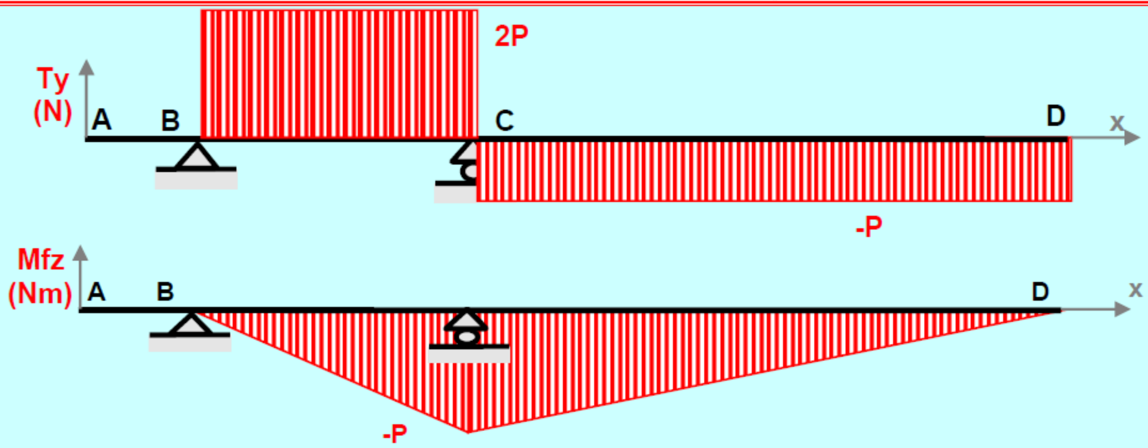
Sur z au point C (équilibre en rotation autour du point C) : -P x 1 - Y_B x 0.5 = 0 → Y_B = -2P

- Résultante : $\sum \vec{F} = \vec{0}$

Sur x : X_B = 0

Sur y : $Y_B + Y_C = 0$ → Y_C = 3P

Entre A et B : en passant par l'amont	Entre B et C : en passant par l'amont	Entre C et D : en passant par l'aval
$\Im section_G = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\Im section_G = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 2P & 0 \\ 0 & -2P(x-0.2) \end{Bmatrix}$	$\Im section_G = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -P & 0 \\ 0 & -P(1.7-x) \end{Bmatrix}$



La section la plus sollicitée est au point C car les diagrammes de cisaillement et de flexion sont maxi en ce point.

$\sigma_n = \frac{Mf_y}{Ig_y} z - \frac{Mf_z}{Ig_z} y$ avec :

- $Mf_y = 0$ et
- $Mf_z = -1000 \times P$ Nmm au point C
- $Ig_z = Ig_{z1} - Ig_{z2} = BH^3/12 - bh^3/12 = 400 \times 30^3/12 - 380 \times 10^3/12 = 868333\ mm^4$

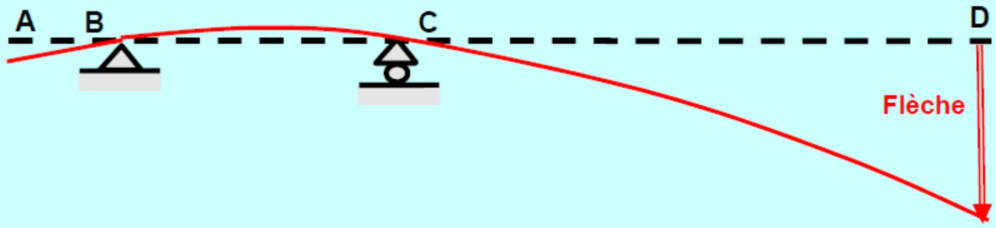
Dans la section C, la contrainte est maxi pour y_{max} = 15mm :

$$\sigma_{max} = \frac{1000P}{Ig_z} 15$$

AN : $\sigma_{max} = 172{,}74 MPa$

$s = \frac{Re}{\sigma_{max}} = 1.16$ soit 16% de sécurité

Partie II : déformation



$$y''=\frac{Mf_z}{EIg_z}=\frac{1}{EIg_z}(ax+b)$$

Intégrons une première fois : $y'=\frac{1}{EIg_z}(\frac{ax^2}{2}+bx+c)$

Intégrons une deuxième fois : $y=\frac{1}{EIg_z}(\frac{ax^3}{6}+\frac{bx^2}{2}+cx+d)$

a et b d'après la question I.2 : ax + b = -P(1.7 – x) soit a = P et b = -1.7P

Pente au point C connue : y'(0.7) = tan(-5.22°) = -0.091 soit $c=-0.091EIg_z-\frac{a(0.7)^2}{2}-0.7b$

Déplacement nul du point C (car appui) : y(0.7) = 0 soit $d=\frac{a(0.7)^3}{6}+\frac{b(0.7)^2}{2}+0.7c$

La flèche maxi est située au point D : $y(1.7)=\frac{1}{EIg_z}(\frac{a(1.7)^3}{6}+\frac{b(1.7)^2}{2}+c1.7+d)=-27.2mm$