

Exercice

Determiner la réaction dans l'articulation A et l'appui B
les poids de la barre :

$$P_1 = 10 \text{ daN}$$

$$P_2 = 20 \text{ daN} \text{ (Contre-poids)}$$

le système est en équilibre statique

les actions (forces) agissant sur le système (barre) :

$$\vec{P}_2(0) ; \vec{R}_A\left(\frac{R_{Ax}}{R_{Ay}}\right) \text{ Articulation} ; \vec{P}_1(0) \text{ et } \vec{R}_B\left(\frac{R_B}{R_B}\right) \text{ Appui simple plan}$$

Determination des réactions aux appuis :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \text{ (Équilibre statique)}$$

$$\Rightarrow \vec{P}_2(0) + \vec{R}_A\left(\frac{R_{Ax}}{R_{Ay}}\right) + \vec{P}_1(0) + \vec{R}_B\left(\frac{R_B}{R_B}\right) = \vec{0}$$

$$\therefore 0x : \quad \vec{R}_{Ax} = \vec{0} \rightarrow R_{Ax} = 0 \quad (1)$$

$$0y : \quad \vec{P}_1 + \vec{R}_{Ay} + \vec{P}_2 + \vec{R}_B = \vec{0} \rightarrow -P_1 + R_{Ay} - P_2 + R_B = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \quad \text{équilibre statique} \quad R_{Ay} = P_1 + P_2 - R_B$$

$$\sum M_A = 0 \quad \rightarrow M_{R_A/A} + M_{R_B/A} + M_{P_1/A} + M_{P_2/A} = 0$$

$$(AB) \wedge (0) + (AG_1) \wedge P_1 + (AG_2) \wedge P_2 = 0$$

$$AB \cdot R_B - AG_1 \cdot P_1 + AG_2 \cdot P_2 = 0 \quad (3)$$

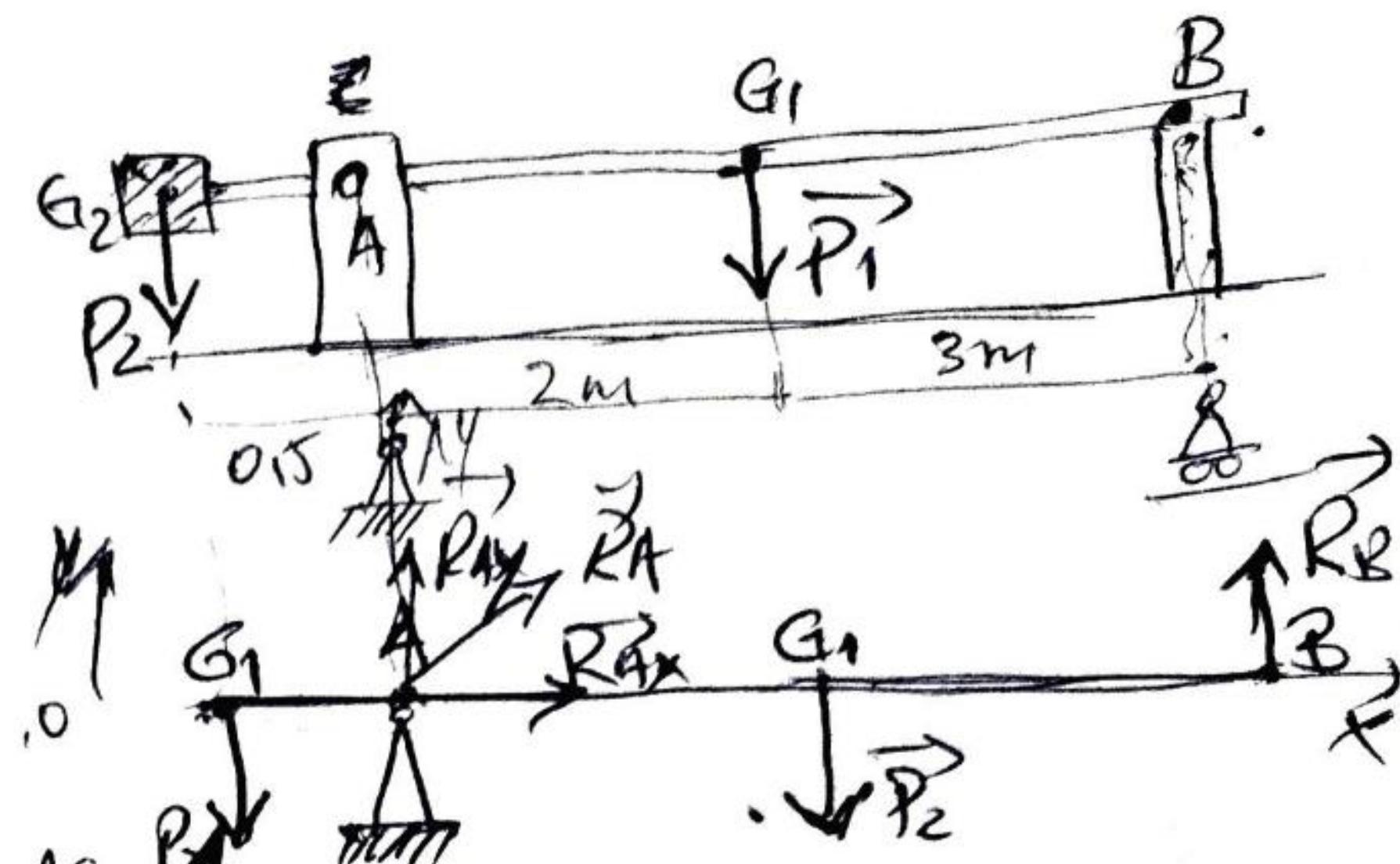
$$\text{d'après (3)} : \text{on tire } R_B = \frac{AG_1 \cdot P_1 - AG_2 \cdot P_2}{AB} = \frac{2 \times 10 - (0,5 \times 20)}{5} = 2$$

$$| R_B = 2 \text{ daN} |$$

$$\text{d'après l'éq (2)} : R_{Ay} = P_1 + P_2 - R_B \Rightarrow R_{Ay} = 10 + 20 - 2 = 28$$

$$| R_{Ay} = 28 \text{ daN} |$$

$$\vec{R}_A(28) \text{ et } \vec{R}_B(2)$$



Exercice 2:

Trouver la force minimale F nécessaire

pour lever un cylindre de 150 daN avec points

un diamètre de 2 m au dessus d'une marche

de 40 cm de hauteur au moyen d'un câble enroulé autour du cylindre sur lequel on tire horizontalement.

Solution

La force minimale sera atteinte si le corps est à l'état de repos ou en $m^{\times\ddot{\alpha}}$ uniforme (rigide)

Système est en équilibre statique :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

$$\% \text{ } O_x: \sum F_x = 0 \Rightarrow R_x + F = 0 \Rightarrow -R_x + F = 0 \Rightarrow -R \sin \alpha + F = 0 \quad (1)$$

$$\% \text{ } O_y: \sum F_y = 0 \Rightarrow R_y + P = 0 \Rightarrow R_y - P = 0 \Rightarrow R \cos \alpha - P = 0 \quad (2)$$

Analyses géométrique: $\cos \alpha = ?$ $\sin \alpha = ?$

$$\cos \alpha = \frac{AB}{BC}$$

$$AB = OB + OA$$

$$OB = \frac{D}{2} = 1 \text{ m} \text{ et } AB = D - y = 2 - 0,4$$

$$BC = \sqrt{(AB)^2 + (Ac)^2}$$

$$\underline{AB = 1,6 \text{ m}}$$

$$OA = \frac{D}{2} - y = \frac{2}{2} - 0,4 = 0,6 \quad \underline{OA = 0,6 \text{ m}}$$

$$OC^2 = OA^2 + AC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{(OC)^2 - (OA)^2} \Rightarrow AC = \sqrt{(1)^2 - (0,6)^2} = \sqrt{1,6} \approx 1,27 \text{ m}$$

$$\boxed{AC = 0,8 \text{ m}}$$

$$BC = \sqrt{(1,6)^2 + (0,8)^2} = \sqrt{2,56 + 0,64} = \sqrt{3,2} = 1,789 \text{ m}$$

$$\cos \alpha = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1,6}{1,789} = 0,88 \Rightarrow \text{d'après l'eq(2)} \Rightarrow R = \frac{P}{\cos \alpha}$$

$$R = \frac{150}{0,88} = 168,5$$

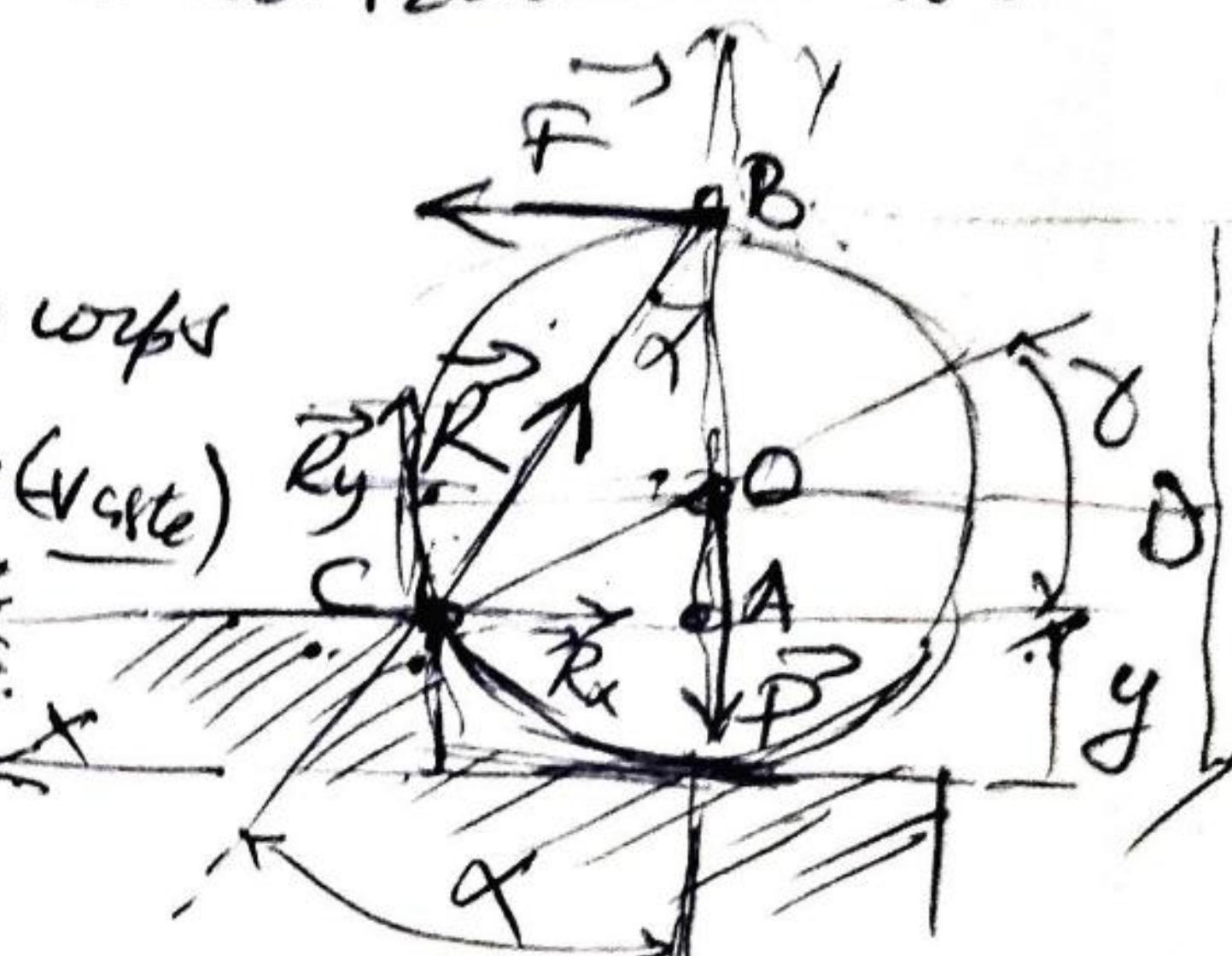
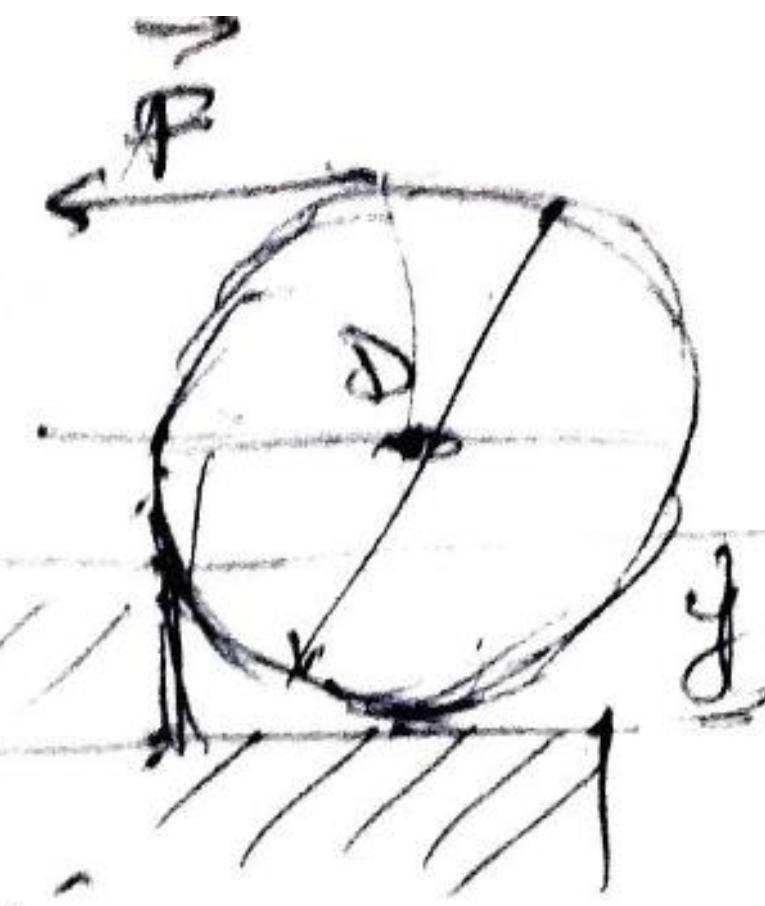
$$\boxed{R = 168,5 \text{ daN}}$$

$$\sin \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{0,8}{1,789} = 0,45 ; \text{ d'après l'eq(1)} \Rightarrow F = R \sin \alpha$$

$$F = 75,8 \text{ daN}$$

$$\boxed{F \approx 76 \text{ daN}}$$

$$\boxed{R = 168,5 \text{ daN}}$$



StatiqueExercice n° 03

mât : barre cylindrique
mât : longue pièce se lors on métal

Le système étudié est le mât sur lequel s'exercent quatre forces :

\vec{P} : Poids du mât ;

force exercée par la terre sur le mât

\vec{Q} : Poids de la charge

force exercée par la terre sur la charge B

\vec{T} : tension du câble

force exercée par le câble sur le mât

l'ensemble de cette force est inconnue -

\vec{R} : réaction de l'axe :

force exercée par l'axe en O sur le mât. Toutes les caractéristiques de cette force sont inconnues sauf son point d'application -

Solution :

le système est en équilibre statique.

$$\begin{cases} \sum F_{ext} = 0 \\ \sum M_C = 0 \end{cases}$$

$$\sum F_{ext} = 0 \rightarrow$$

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} + \vec{T} = 0$$

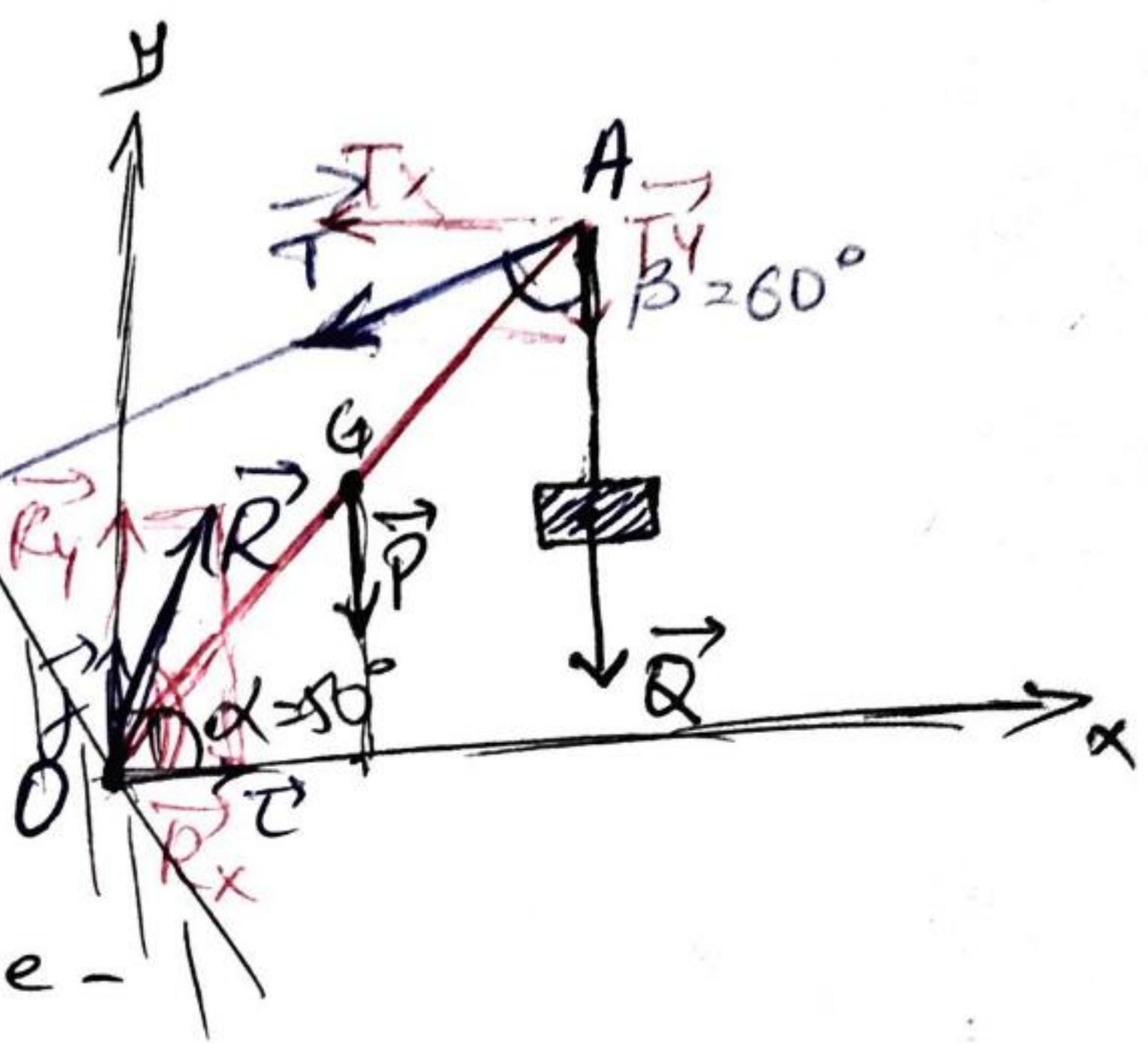
$$\% \text{ } O_x: \sum F_{x \text{ ext}} = 0 \rightarrow T_x + R_x = 0$$

$$\underbrace{-T \sin \beta + R_x = 0}_{R_x = T \sin \beta}$$

$$\% \text{ } O_y: \sum F_{y \text{ ext}} = 0 \rightarrow \vec{P} + \vec{Q} + \vec{R}_y + \vec{T}_y = 0 \rightarrow$$

$$-P - Q + R_y - T_y = 0 \rightarrow \boxed{R_y = P + Q + T \cos \beta}$$

la réaction de l'axe R : $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ Cette force est inclinée de θ par rapport à Ox tel que $\tan \theta = \frac{R_y}{R_x}$



Pour l'angle α ,

$$\overrightarrow{OG} = OG \cos \alpha \hat{i} + OG \sin \alpha \hat{j}$$

Pour l'angle β :

$$T_x = T \sin \beta$$

$$T_y = T \cos \beta$$

Pour l'angle θ ,

$$R_x = R \cos \theta$$

$$R_y = R \sin \theta$$

$$\tan \theta = \frac{R_x}{R_y}$$

Pour l'équilibre des moments:

$$\mathcal{M}(\vec{P}/_0 = \vec{0}) \rightarrow M(\vec{P}/_0 + M(\vec{T}/_0 + M(\vec{R}/_0 + M(\vec{Q}/_0 = \vec{0})$$

$$\begin{aligned} M(\vec{P}/_0 &= \vec{0} \vec{G} \wedge \vec{P} \\ &= (\frac{L}{2} \cos \alpha \vec{i} + \frac{L}{2} \sin \alpha \vec{j}) \wedge (-mg \vec{j}) \\ &= -\frac{mgl}{2} \cos \alpha \cdot \vec{k} + \vec{0} \end{aligned}$$

$$\boxed{M(\vec{P}/_0 = -\frac{mgl}{2} \cos \alpha \cdot \vec{k}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} M(\vec{T}/_0 &= (\vec{L} \cos \alpha \cdot \vec{i} + L \sin \alpha \vec{j}) \wedge (-T \sin \beta \vec{i} - T \cos \beta \vec{j}) \\ &= L \cos \alpha \cdot \vec{i} \cdot (-T \cos \beta \vec{j}) + (L \sin \alpha \vec{j}) \cdot (T \sin \beta \vec{i}) \\ &= -TL \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \vec{k} + TL \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

$$\boxed{M(\vec{T}/_0 = -T \cdot L \cos(\alpha + \beta) \vec{k}} \quad \begin{pmatrix} L \cos \alpha \\ L \sin \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -T \sin \beta \\ -T \cos \beta \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M(\vec{R}/_0 = \vec{0})} \quad \vec{0} = \vec{0} \quad -TL \cos \alpha \cdot \cos \beta +$$

$$M(\vec{Q}/_0 = \vec{0} \vec{R} \wedge \vec{Q}) \quad M(\vec{Q}/_0 = (\vec{L} \cos \alpha \vec{i} + L \sin \alpha \vec{j}) \wedge (-Q \vec{j}) = -Q \cdot L \cos \alpha \cdot \vec{k}$$

$$\boxed{M(\vec{Q}/_0 = -Q \cdot L \cos \alpha \cdot \vec{k})}$$

$$\text{On aura: } -mg \cos \alpha \cdot \frac{L}{2} - T \cdot L \cos(\alpha + \beta) - L Q \cos \alpha = 0$$

$$-(\frac{mgl}{2} + LQ) \cdot \cos \alpha - T \cdot L \cos(\alpha + \beta) = 0$$

$$\Rightarrow T \cos(\alpha + \beta) = -(\frac{mgl}{2} + Q) \cdot \cos \alpha$$

$$\boxed{T = \frac{(\frac{mgl}{2} + Q) \cdot \cos \alpha}{\cos(\alpha + \beta)}}$$

Exercice 504

Ex 4 ①

$$Q = 2P \quad b = \frac{a}{3} \quad \alpha = 30^\circ$$

L'angle (\hat{AD}, \hat{DC}) = $\alpha = 30^\circ$

le triangle rectangle ADC en $A = 90^\circ$

Donc l'angle (\hat{AC}, \hat{CD}) = 60°

Le système de cette plaque carrée est en équilibre statique -

Articulation sphérique en A : $\vec{R}_A(R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az})$

Articulation cylindrique en B : $\vec{R}_B(R_{Bx}, R_{By}, R_{Bz})$

Le système est en équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_i = 0 \Rightarrow \vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{T} + \vec{P} + \vec{Q} = \vec{0} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum M_A = 0 \Rightarrow \cancel{AA \wedge R_A} + \vec{AB} \wedge \vec{R}_B + \vec{AE} \wedge \vec{T} + \vec{AG} \wedge \vec{P} + \vec{AE} \wedge \vec{Q} = \vec{0} \end{array} \right. \quad (2)$$

Les composantes des forces $\vec{T}, \vec{P}, \vec{Q}$ sont comme suit :

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} -T \cos 60^\circ, \cos 45^\circ \\ -T \cos 60^\circ, \sin 45^\circ \\ T \sin 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -T \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ T \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} T \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} T \\ \frac{\sqrt{3}}{2} T \end{pmatrix} \quad T: \text{tension}$$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix} \quad \vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2P \end{pmatrix} \quad \vec{R}_A = \begin{pmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ R_{Az} \end{pmatrix} \quad \vec{R}_B = \begin{pmatrix} R_{Bx} \\ 0 \\ R_{Bz} \end{pmatrix}$$

les distances AB, AE, AG, AE auront les composants suivants

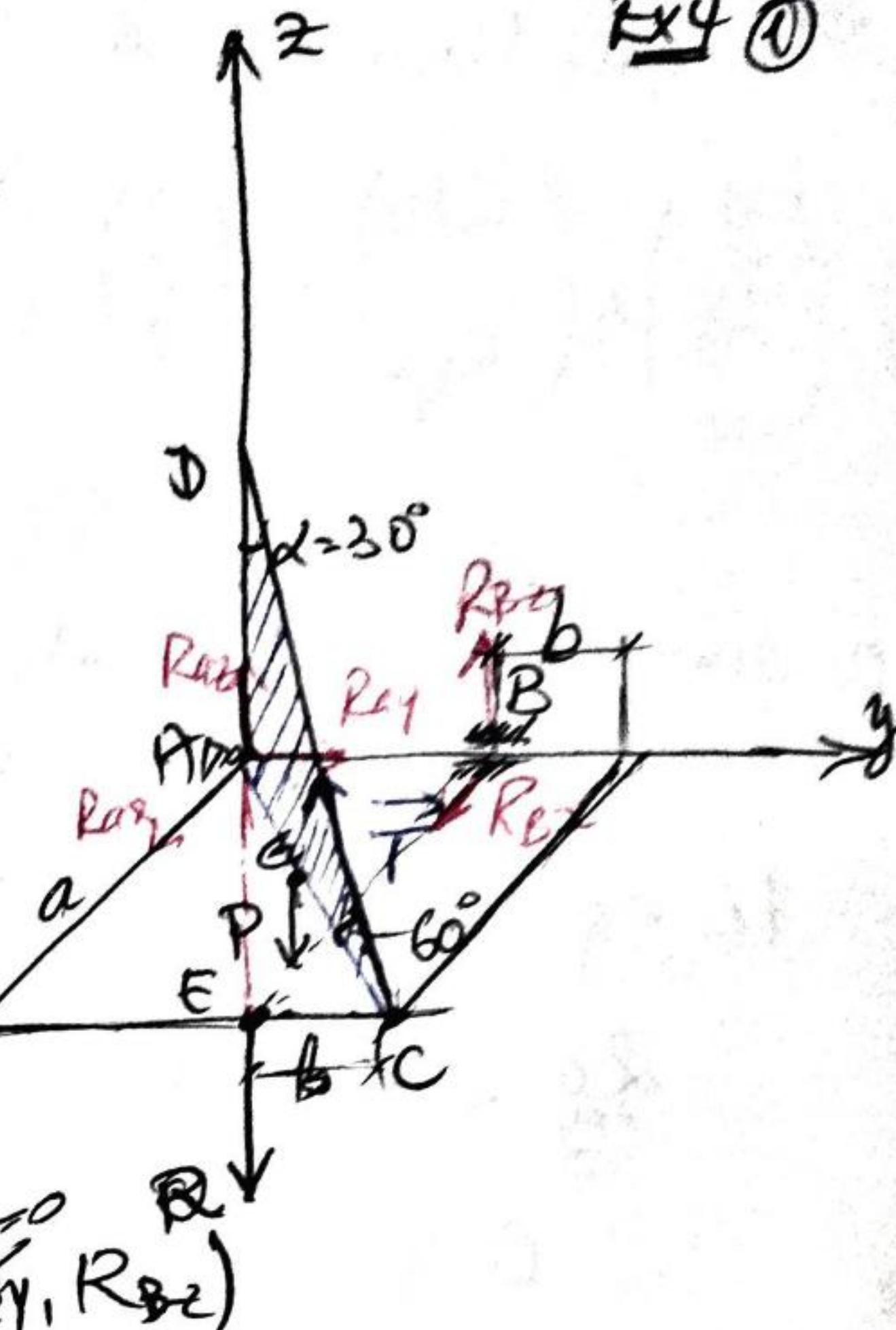
$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2a}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{AE} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{AG} = \begin{pmatrix} a/2 \\ a/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{AE} = \begin{pmatrix} a \\ a/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la projection des forces sur les axes donnera :

$$\% 0x: \vec{R}_{Ax} + \vec{R}_{Bx} + \frac{\sqrt{2}}{4} T = \vec{0} \Rightarrow R_{Ax} + R_{Bx} - \frac{\sqrt{2}}{4} T = 0 \quad (3)$$

$$\% 0y: \vec{R}_{Ay} + \vec{0} + \frac{\sqrt{2}}{4} T = \vec{0} \Rightarrow R_{Ay} - \frac{\sqrt{2}}{4} T = 0 \quad (4)$$

$$\% 0z: \vec{R}_{Az} + \vec{R}_{Bz} + \frac{\sqrt{2}}{2} T + \vec{P} + \vec{Q} = \vec{0} \Rightarrow R_{Az} + R_{Bz} + \frac{\sqrt{2}}{2} T - P - Q = 0 \quad (5)$$



L'équation (2) se formulera comme suit :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2a}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} RB_x \\ 0 \\ RB_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4}T \\ -\frac{\sqrt{2}}{4}T \\ \frac{\sqrt{2}}{2}T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a/2 \\ a/2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 2a/3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on aura : $\begin{pmatrix} \frac{2a}{3}RB_2 \\ 0 \\ -\frac{2a}{3}RB_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}aT \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}aT \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{a}{2}P \\ a/2P \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4a}{3}P \\ 2aP \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

les équations s'écriront comme suit :

$$\frac{2a}{3}RB_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}aT - \frac{a}{2}P - \frac{4a}{3}P = 0 \quad (6)$$

$$0 - \frac{\sqrt{3}}{2}aT + \frac{a}{2}P + 2aP = 0 \quad (7)$$

$$-\frac{2a}{3}RB_x + 0 + 0 + 0 = 0 \quad (8)$$

D'après l'éq(8) $\Rightarrow RB_x = 0$

$$T = 2,88 + P$$

D'après l'éq(7) $\Rightarrow \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}aT} = \frac{4aP + aP}{2} = \frac{5aP}{2} \Rightarrow T = \frac{5\sqrt{3}}{3}P$

D'après l'éq (6) $\Rightarrow \frac{2a}{3}RB_2 = \frac{+3aP + 8aP}{6} \Rightarrow \frac{11aP}{6} = \frac{5\sqrt{3} \times \frac{5\sqrt{3}}{3}P}{6}$

$$\frac{2a}{3}RB_2 = \frac{11aP - 15aP}{6} = \frac{-4P}{6} \Rightarrow RB_2 = \frac{-12P}{12} \Rightarrow RB_2 = -P$$

D'après l'éq (5) $\Rightarrow RA_2 = -RB_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}T + P + 2P$

$$RA_2 = +4P - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{3}P + 3P = P - \frac{5}{2}P + 3P = \frac{3P}{2}$$

$$RA_2 = \frac{3P}{2}$$

D'après (4) $\Rightarrow RAY = \frac{\sqrt{2}}{4}T = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{3}P \Rightarrow RAY = \frac{5\sqrt{6}}{12}P = 1,022$

D'après (3) $\Rightarrow RAX = -RB_x + \frac{\sqrt{2}}{4}T \Rightarrow RAX = \frac{5\sqrt{6}}{12}P = 1,022$

$$RA = \sqrt{RAX^2 + RAY^2 + RA_2^2} \Rightarrow RA = \sqrt{\frac{2,081}{144}P^2} \Rightarrow RA = 2,081P$$

$$RB = \sqrt{RB_x^2 + RAY^2 + RB_2^2} \Rightarrow RB = \sqrt{(-P)^2} = P \Rightarrow RB = P$$

L'équation (2) devient alors

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2q_3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} RB_x \\ 0 \\ RB_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4}T \\ -\frac{\sqrt{2}}{4}T \\ \frac{\sqrt{3}}{2}T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 2a/3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{12} \\ q_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} bx \\ by \\ bz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay \cdot bz - az \cdot by \\ az \cdot bx - ax \cdot bz \\ ax \cdot by - ay \cdot bx \end{pmatrix} = (ax \cdot bz - ay \cdot bx)$$

On aura

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2q_3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} RB_x \\ 0 \\ RB_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q_3 RB_z - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 2q_3 RB_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2a}{3} RB_z \\ 0 \\ -\frac{2a}{3} RB_x \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4}T \\ -\frac{\sqrt{2}}{4}T \\ \frac{\sqrt{3}}{2}T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}aT - 0 \\ 0 - (\frac{\sqrt{3}}{2}aT) \\ 0 - (-\frac{\sqrt{2}}{4}aT - \frac{\sqrt{2}}{4}aT) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}aT \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}aT \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 2a/3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}aP - 0 \\ 0 - (-2aP) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4a}{3}P \\ 2aP \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} q_{12} \\ q_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2}P - 0 \\ 0 - (-\frac{a}{2}P) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2}P \\ \frac{a}{2}P \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'équation (2) se résumera à 3 équations :

$$\frac{2a}{3} RB_z + \frac{\sqrt{3}}{2}aT - \frac{4a}{3}P - \frac{a}{2}P = 0 \quad (6)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}aT + 2aP + \frac{a}{2}P = 0 \quad (7)$$

$$-\frac{2a}{3}RB_x + 0 + 0 + 0 = 0 \quad (8) \Rightarrow \boxed{RB_x = 0}$$

La résolution de ce système donne :

D'après (6) $\Rightarrow RB_z = 0$;

$$\text{D'après (7)} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}T = 2P + \frac{P}{2} = \frac{5P}{2} \Rightarrow T = \frac{5P}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{T = \frac{5\sqrt{3}}{3}P}$$

$$\text{D'après (6)} \Rightarrow \frac{2a}{3} RB_z + \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{5\sqrt{3}}{3}P - \frac{4a}{3}P - \frac{a}{2}P = 0$$

$$\Rightarrow RB_z = \frac{3}{2} \left(-\frac{5P}{2} + \frac{11P}{6} \right) \Rightarrow RB_z = \frac{3}{2} \left(\frac{15P}{6} + \frac{11P}{6} \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{26P}{6} \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{13P}{3} \right) = \frac{39P}{6} = \frac{13P}{2}$$

D'après (5): $R_{A2} + R_{B2} + \frac{\sqrt{3}}{2}T - Q - P = 0$

$$\Rightarrow R_{A2} = -R_{B2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{3}P + 2P + P$$

$$R_{A2} = P + 3P - \frac{5}{2}P = \frac{8-5}{2}P = \frac{3}{2}P \Rightarrow \boxed{R_{A2} = \frac{3}{2}P}$$

D'après (4) $\Rightarrow R_{Ay} = +\frac{\sqrt{2}}{4}T = +\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{3}P = \frac{5\sqrt{6}}{12}P$

$$\boxed{R_{Ay} = \frac{5\sqrt{6}}{12}P}$$

D'après (3) $\Rightarrow R_{Ax} + R_{Bx} - \frac{\sqrt{2}}{4}T = 0 \Rightarrow R_{Ax} = \frac{\sqrt{2}}{4}T$

$$\boxed{R_{Ax} = \frac{5\sqrt{6}}{12}P}$$

$$R_A = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{6}}{12}P\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{6}}{12}P\right)^2 + \left(\frac{3}{2}P\right)^2}$$

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2 + R_{Az}^2}$$

$$\boxed{R_A = 2,08P}$$

$$R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2 + R_{Bz}^2}$$

$$\boxed{R_B = P}$$

$$R_B = \sqrt{(-P)^2} \quad \begin{matrix} R_{Bx} > 0 \\ R_{By} > 0 \end{matrix}$$