Série les vecteurs

Exercice N :01

Soient A et B deux points dans l'espace tels que : A(2,3,-3) ; B(5,7,-3), calculer :

1/- Les produits scalaires : $\vec{OA} \bullet \vec{OB}, \vec{OA} \bullet \vec{OA},$

2/- Les produits vectoriels : $\vec{OA} \wedge \vec{OB}, \vec{OA} \wedge \vec{OA}$. En déduire la surface du triangle OAB.

3/- Le produit mixte : $\vec{OB} \bullet (\vec{AB} \wedge \vec{AC})$. Que représente ce produit (C(1,2,3))

Exercice N :02

On donne les composantes des vecteurs : $\vec{V}_1 = 3\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{V}_2 = 5\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$,$\vec{V}_3 = 3\vec{i} + 2y\vec{j} - 2\vec{k}$ et $\vec{V}_4 = x\vec{i} + 2\vec{j} + 10\vec{k}$

- Déterminer les composantes du vecteur unitaire $\mathbf{V_1}$.

- Déterminer y et z pour que les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ soient colinéaires.

- Déterminer x pour que les vecteurs $\vec{V}_3$ et $\vec{V}_4$ soient perpendiculaire

Exercice N :03

Déterminer le module et la direction de la résultante des deux forces $\vec{A}$ et $\vec{B}$ de modules 100N et 50N respectivement, sachant que $(\vec{A}, \vec{B}) = 60^0$ (Fig.1).

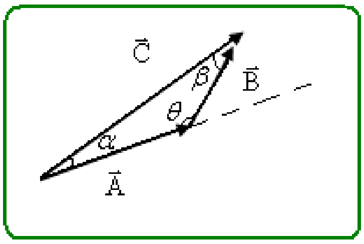


Figure 1

Exercice sup

-Demontrer que le produit scalaire $\vec{A}.\vec{B}$ est commutatif (تبديلي).

On donne les trois vecteur suivants : $\vec{A} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$, $\vec{B} = \vec{\imath} - 4\vec{k}$, $\vec{C} = 4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$

1- Calculer le produit scalaire $\vec{A}.\vec{B}$
2- Calculer le produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{C}$
3- Les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{C}$ sont-ils lineairement independants ?

Corrigé série TD N:1

Exercice 1

A(2,3,-3) ; B(5,7,-3); C(1,2,3)

1- Les produits scalaires

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix}; \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}5\\7\\-3\end{pmatrix}; \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ =2x5+3X7+(-3)x(-3)=40

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA} = \|\overrightarrow{OA}\|^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2 = 4+9+9 = 22$

2- Les produits vectoriels

$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -3 \\ 5 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 12\vec{\imath} - 9\vec{\jmath} - \vec{k} = \overrightarrow{W}$

- Surface du triangle OAB:

S=1/2$\|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\| = 1/2(\sqrt{226})$

$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OA} = \vec{0}\,; (\overrightarrow{OA}\, parallele\ à\ \overrightarrow{OA})$

3- Produit mixte

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -9$

$|\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})|\ represente\ le\ volume\ de\ la\ forme\ OABC$

Exercice 2:

$\overrightarrow{V_1}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix};\ \overrightarrow{V_2}\begin{pmatrix}5\\Y\\Z\end{pmatrix};\ \overrightarrow{V_3}\begin{pmatrix}3\\2Y\\-2\end{pmatrix};\ \overrightarrow{V_4}\begin{pmatrix}X\\2\\10\end{pmatrix}$

1- le vecteur unitaire

$\vec{\mu}_{V_1} = \frac{\overrightarrow{V_1}}{\|\overrightarrow{V_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$

2-

$$\overrightarrow{V_1}\ et\ \overrightarrow{V_2}\ sont\ colinéaires\ \Rightarrow ils\ sont\ parallèles\ et\ appartiennent\ au\ meme\ plan$$

a- même plan: $\overrightarrow{V_1} \in (XOZ)\ car\ y_1 = 0\ donc\ y_2 = 0 \Rightarrow y = 0$

b- $\overrightarrow{V_1}\ \|\ \overrightarrow{V_2} \Rightarrow \overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{V_1} = \alpha\,\overrightarrow{V_2}$

$$\overrightarrow{V_1} \times \overrightarrow{V_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & y & Z \end{vmatrix} = \vec{\imath}(y) - \vec{\jmath}(3Z-5) + \vec{k}(3Y) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\ DONC$$

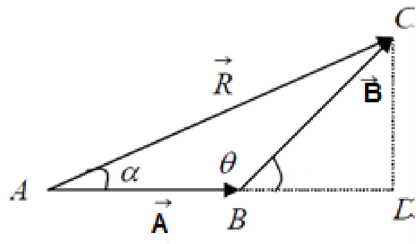
y=0, 3z-5=0, et 3Y=0 ; d'où Z=5/3

3- $\overrightarrow{V_3}\ et\ \overrightarrow{V_4}\ sont\ perpendiculaires\ donc\ \overrightarrow{V_3}.\overrightarrow{V_4} = 0;$

$\overrightarrow{V_3}.\overrightarrow{V_4} = 3x + 4y - 20 = 0; sachant\ que\ y = 0, x = \frac{20}{3}$

donc : x=20/3; y=0; Z=5/3.

Exercice 3:



l'angle entre $\vec{A}\ et\ \vec{B}\ est\ \theta' = 60, donc\ \theta = 180 - 60 = 120$

- le module de la résultante C en appliquant la loi des cosinus

$$R = C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2A.B.cos120} = 132{,}2N$$

- La direction de la résultante (α,β) en appliquant la loi des sinus

$$\frac{sinus\alpha}{B} = \frac{sinus\ \theta}{C} \Rightarrow sinus\alpha = sinus\theta\frac{B}{C} = 0{,}32 \Rightarrow \alpha = 18°, 66$$

β=180-18,66-120=41°,34

Exercice supplémentaire

$\vec{A}.\vec{B} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1\ (puisque\ la\ multiplication\ est\ commutative)$

$$donc\ \vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}\ (le\ produit\ scalaire\ est\ commutatif)$$

- $\vec{A}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}; \vec{B}\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}; \vec{C}\begin{pmatrix}4\\2\\-2\end{pmatrix}$

1 - $\vec{A}.\vec{B} = 2 + 4 = 6$

2- $\vec{A} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = i(0) - j(0) + k(0) = \vec{0}$

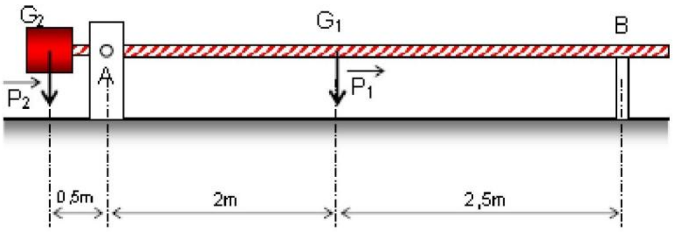
3- les vecteurs A et C sont linéairement <u>**dépendant**</u> car leur produit vectoriel est nul.

Série Statique

Exercice 1

Déterminer la réaction dans l'articulation A et l'appui B.

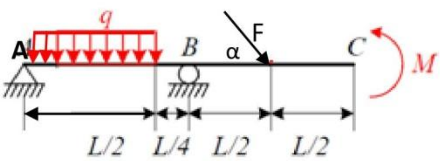
Le poids de la barre P_1=10daN, Le contre poids P_2=20 daN.



Exercice N :02

Soit la poutre AC supportant une charge repartie q, une force F et un moment M. La poutre est en équilibre statique.
- Déterminez les réaction en A et B.

q= 5KN/m, F=3KN, M=12KN.m, α=30°, L=4m.



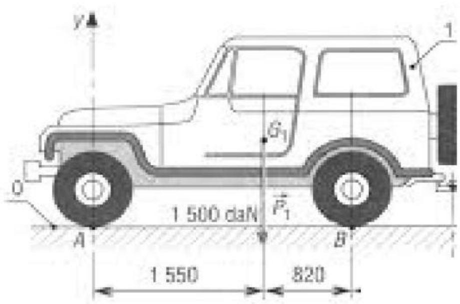
Exercice N :03

Considérons le système constitué d'une voiture d'un poids P1.

1- Déterminer les actions du sol sur les roues de la voiture (si la voiture est au repos).

2- Si le coefficient de frottement de la route f=0.5,

- quelle est la force minimale horizontale doit-on appliquer pour que la voiture commence à rouler vers l'arrière.



Corrigé Série Statique

Exercice 1

- les actions agissantes sur le système

$$\vec{P}_2\begin{pmatrix}0\\-P_2\end{pmatrix},\overrightarrow{R_A}\begin{pmatrix}R_{Ax}\\R_{AY}\end{pmatrix}\ (Articulation),\overrightarrow{P_1}\begin{pmatrix}0\\-P_1\end{pmatrix},\overrightarrow{R_B}\begin{pmatrix}0\\R_B\end{pmatrix}(appui\ plan\ ou\ simple),$$

-détermination des réactions aux appuis

$$\sum\vec{F}_{ext}=\vec{0}\Rightarrow\vec{P}_2\begin{pmatrix}0\\-P_2\end{pmatrix}+\overrightarrow{R_A}\begin{pmatrix}R_{Ax}\\R_{Ay}\end{pmatrix}+\vec{P}_1\begin{pmatrix}0\\-P_1\end{pmatrix}+\overrightarrow{R_B}\begin{pmatrix}0\\R_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$R_{Ax}=0\ \dots\dots\dots\dots(1)$

$-P_2-P_1+R_{Ay}+R_B=0\ \dots\dots(2)$

$\sum\overrightarrow{M}_{/A}=\vec{0}\Rightarrow\underbrace{\overrightarrow{M}_{RA/A}}_{=0}+\overrightarrow{M}_{RB/A}+\overrightarrow{M}_{P1/A}+\overrightarrow{M}_{P2/A}=\vec{0}$

$\begin{pmatrix}AB\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\R_B\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}AG1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-P_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-AG2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-P_2\end{pmatrix}=0$

$AB.R_B-AG1.P_1+AG2.P_2=0\ \dots\dots(3)$

de (3) $R_B=\frac{AG1.P_1-AG2.P_2}{AB}=\frac{2.5-20.0,5}{4,5}=0daN$

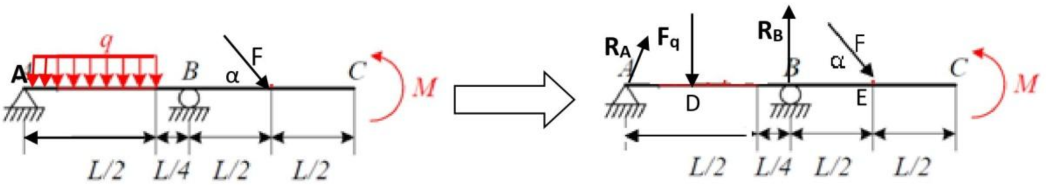
en remplaçant dans (2):

$R_{Ay}=P_1+P_2-R_B=25daN$

$$\overrightarrow{R_B}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\overrightarrow{R_A}\begin{pmatrix}0\\25\end{pmatrix}$$

Exercice 2

- les actions externes: F, charge repartie q, moment M, un appui simple en B, un appui double en A.
- la charge répartie q est réduite en une force concentrée F_q au milieu de (L/2) : F_q=q.L/2
-la réaction en B est perpendiculaire sur l'appui
- la réaction en A a deux composantes inconnues.



- la projection des action:

$$\overrightarrow{R_A}\begin{pmatrix}R_{Ax}\\R_{Ay}\end{pmatrix},\overrightarrow{R_B}\begin{pmatrix}0\\R_B\end{pmatrix},\vec{F}_q\begin{pmatrix}0\\F_q\end{pmatrix},\vec{F}\ \begin{pmatrix}F\cos\alpha\\-F\sin\alpha\end{pmatrix}$$

- détermination des réactions en A et B

principe fondamental de la statique: (M=**<u>12KN</u>**.m)

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_A \binom{R_{Ax}}{R_{Ay}} + \vec{R}_B \binom{0}{R_B} + \overrightarrow{F_q} \binom{0}{-q.L/2} + \vec{F} \binom{Fcos\alpha}{-Fsin\alpha} = \binom{0}{0}$$

$$\sum \vec{M}_{/A} = \vec{0} \Rightarrow \underbrace{\cancel{\vec{M}_{RA/A}}}_{0} + \vec{M}_{RB/A} + \vec{M}_{Fq/A} + \vec{M}_{F/A} = \vec{0}$$

On aura 3 équations avec trois inconnus (R_{ax}, R_{Ay}, R_B)?

Sur l'axe OX: R$_{Ax}$+F.cosα=0.......(1) R_{Ax}=- F.cosα

Sur l'axe OY: R_{Ay}+R_B-q.L/2-F.sinα=0.......(2)

$$\binom{AD}{0} \times \binom{0}{-F_q} + \binom{AB}{0} \times \binom{0}{R_B} + \binom{AE}{0} \times \binom{F.cos\alpha}{-F.sin\alpha} + \mathrm{M}$$

$$= -AD.F_q + AB.R_B - AE.F.sin\alpha + M = 0 \ldots\ldots\ldots (3)$$

de (3) : $R_B = \frac{AD.F_q + AE.F.sin\alpha - M}{AB} = \frac{\left(\frac{L}{4}\frac{L}{2}.5 + \frac{5L}{4}.3.sin30°\right) - M}{\frac{3L}{4}} = \frac{10 + 15.\frac{\sqrt{3}}{2} - 12}{3}$ =1,83KN

R_{Ax}=-2,59KN; R_{Ay}=9,68KN

$$\vec{R}_A \binom{-2{,}59}{9{,}68}; \vec{R}_B \binom{0}{1{,}83}$$

Exercice 3

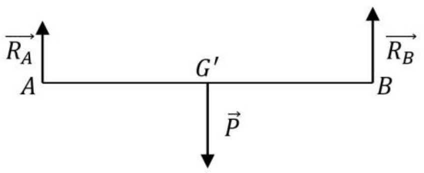
La voiture a un poids qui se réparti sur les roues , par raison de symétrie on va considérer deux roues et les réactions déterminées seront devisées sur les quatre roues.

1- Détermination des actions du sol sur les roues: (**sol lisse**)

En considérant que le sol est lisse , l'action du sol sur la roue est considérée comme un appui simple (donc perpendiculaire sur le plan de contact).

Simplification du système sous forme d'une ligne (glisser les forces vers les roues):

$\vec{R}_A \binom{0}{R_A}, \vec{P} \binom{0}{-P}, \vec{R}_B \binom{0}{R_B}$



nous avons deux inconnus à déterminer R_A *et* R_B; on aura besoin à deux équations (au minimum)

Application du principe fondamentale de la statique: (PFS)

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}; \sum \vec{M}_{/A} = \vec{0};$

(toute les forces sont parallèles donc pour simplifier on va faire la projection sur un axe parallèle a ces forces : dans ce cas l'axe OY)

l'axe OY: $R_A + R_B - P = 0 \ldots\ldots\ldots(1)$

$\sum \overrightarrow{\boldsymbol{M}}_{/A} = \vec{\boldsymbol{0}} \Rightarrow \underbrace{\overrightarrow{\boldsymbol{M}}_{RA/A}}_{0} + \overrightarrow{\boldsymbol{M}}_{RB/A} + \overrightarrow{\boldsymbol{M}}_{P/A} = \vec{\boldsymbol{0}}$; $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{R_B} + \overrightarrow{AG'} \times \vec{P} = \vec{0}$

$\begin{pmatrix} AB \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ R_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} AG' \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} = AB.R_B - AG'.P = 0 \ldots\ldots\ldots(2)$

(système avec deux equations avec deux inconnus)

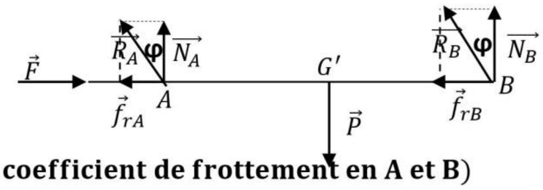
de (2): $R_B = AG'.\frac{P}{AB} = 1550.\frac{1500}{1550+820} = 981daN = 9810N$

En remplaçant dans (1): $R_A = P - R_B = 519daN = 5190N$.

2- Force minimale pour basculer la voiture vers l'arrière (**sol avec frottement**)

- dans ce cas l'action du sol n'est pas perpendiculaire sur le plan de contact avec la roue (incliné avec **un angle φ**)

$\overrightarrow{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} f_{rA} \\ \boldsymbol{N_A} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{B}}\begin{pmatrix} f_{rB} \\ \boldsymbol{N_B} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{\boldsymbol{F}}\begin{pmatrix} -\boldsymbol{F}? \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$



$f = tan\boldsymbol{\varphi} = \frac{\mathbf{f_{rA}}}{\mathbf{N_A}} = \frac{\mathbf{f_{rB}}}{\mathbf{N_B}}$ **(le sol a le meme coefficient de frottement en A et B)**

$\boldsymbol{f_{rA}} = \boldsymbol{f}.\boldsymbol{N_A}$; $\boldsymbol{f_{rB}} = \boldsymbol{f}.\boldsymbol{N_B}$

juste avant de bouger vers l'arrière; la voiture est en état statique limite donc:

$$\sum \overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{ext} = \vec{\boldsymbol{0}} \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{A}}\begin{pmatrix} f_{rA} \\ \boldsymbol{N_A} \end{pmatrix} + \overrightarrow{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{B}}\begin{pmatrix} f_{rB} \\ \boldsymbol{N_B} \end{pmatrix} + \overrightarrow{\boldsymbol{F}}\begin{pmatrix} -\boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \overrightarrow{\boldsymbol{P}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{f}.\boldsymbol{N_A} + \boldsymbol{f}.\boldsymbol{N_B} = \boldsymbol{F} \ldots\ldots\ldots\ldots(\mathbf{1})$

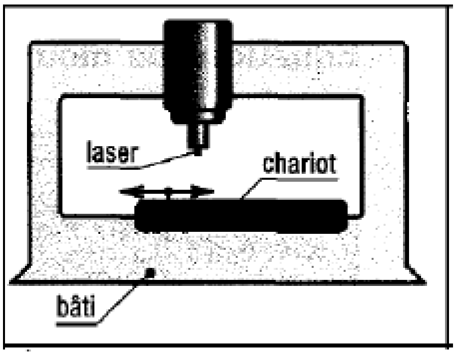
$\boldsymbol{N_A} + \boldsymbol{N_B} = \boldsymbol{P} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathbf{2})$

$\sum \overrightarrow{\boldsymbol{M}}_{/A} = \vec{\boldsymbol{0}} \Rightarrow \underbrace{\overrightarrow{\boldsymbol{M}}_{RA/A}}_{0} + \overrightarrow{\boldsymbol{M}}_{RB/A} + \overrightarrow{\boldsymbol{M}}_{P/A} + \underbrace{\overrightarrow{\boldsymbol{M}}_{F/A}}_{0} = \vec{\boldsymbol{0}}$

de (1) et (2): $F = f.P$=0.5X1500=750daN (force minimale pour faire bouger la voiture vers l'arrière).

Série Cinématique

Exercice 1: Chariot de machine outil

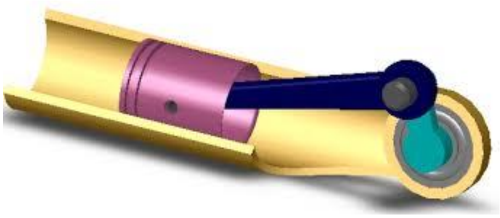


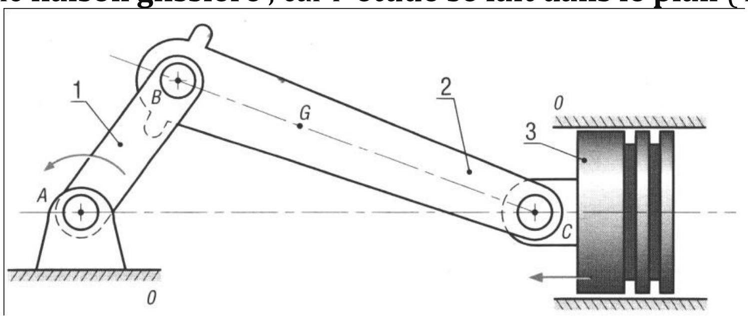
Le chariot d'une machine pour découpage laser atteint la vitesse de 10 cm/s en 2 secondes. Le chariot évolue à vitesse constante pendant 8 secondes puis s'arrête en l'espace de 12,5 cm. Les accélérations et décélérations sont supposées constantes.

1) Déterminer les équations de mouvement pour chacune des trois phases.
2) Tracer les graphes des accélérations, des vitesses et des positions.

Exercice 2 : Système bielle -manivelle

L'ensemble proposé ci-contre représente schématiquement le système bielle **2**, manivelle **1** et piston **3** d'un moteur à essence. Les liaisons en **A** $_{1/0}$, **B**$_{2/1}$ et **C**$_{3/2}$ sont des **liaisons pivots** et la liaison du **Piston** $_{3/0}$ sera considérée comme une **liaison glissière** , car l '**étude se fait dans le plan** (x,y).



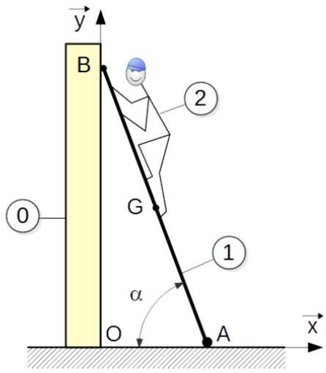


- Déterminez la nature des mouvements suivants :$Mvt_{1/0}$, $Mvt_{3/0}$, $Mvt_{2/0}$.
- En déduire la nature des trajectoires : $TB_{1/0}$,$TC_{2/0}$.

- Connaissant la vitesse en rotation du vilebrequin, ω=constante ,
- Ecrire les équations du mouvement du piston 3.

Déterminer la vitesse linéaire du piston (3) (dans la position indiquée par trois méthodes)

- Analytique
- Graphique
  - a- équiprojectivité des vitesses.
  - b- centre instantané des rotations CIR.

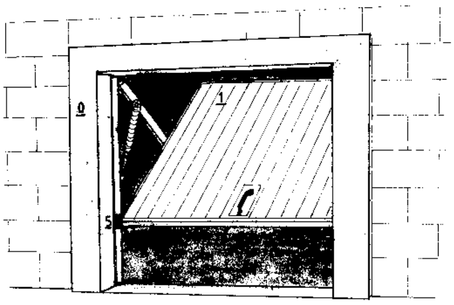


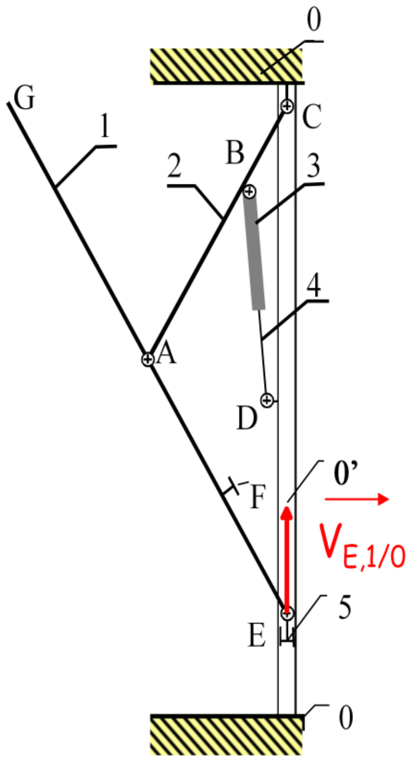
Exercice 3: Echelle glissante

L'échelle AB commence à glisser sur le mur (0) et sur le sol.

- représenter la direction et le sens des vitesses en A et B. déduire la nature du mouvement de l'échelle.
Si VB=0,5m/S
- déterminer la vitesse en A par deux méthodes à définir?
déduire la direction de la vitesse de G (centre de gravité situé au milieu de l'échelle.
- déduire la vitesse angulaire de l'échelle.
- pour quelle valeur de α, VA=VB ;
- Si α=0 que peut on dire du mouvement de l'échelle

<u>Exercice 4:</u> Porte garage





- déterminer, pour la position donnée ci-dessous, la vitesse des points E, A et G de la porte si l'utilisateur agit en F à la vitesse de 40cm/s

Solutions

<u>Exercice 1:</u>

Phase 1 : accélération a_1 ;
conditions initiales : $x_1(1) = 0$ et $v_0(1) = 0$

Forme générale : $v_1 = a_1 t$ et $x_1 = \frac{a_1 t^2}{2}$

pour $t = 2$: $v_1 = 10$ cm.s^{-1} $= a_1 \times 2 \Rightarrow a_1 = 5$

$a_1 = 5$ cm.s^{-2}	$v_1 = 5t$	$x_1 = 2{,}5\,t^2$

Remarque : pour $t = 2$; $x_1 = 2{,}5 \times 2^2 = 10$ cm.

Phase 2 : translation uniforme à la vitesse
$v_2 = 10$ cm.s^{-1} ; $x_2 = 10\,t + x_2(0)$
à $t = 2$; $x_2 = 10 = 10 \times 2 + x_2(0) \Rightarrow x_2(0) = -10$

$a_2 = 0$	$v_2 = 10$ cm.s^{-1}	$x_2 = 10\,t - 10$

Remarque : pour $t = 2 + 8 = 10$;
$x_2 = 10 \times 10 - 10 = 90$ cm

Phase 3 : mouvement décéléré, la vitesse passe de 10 cm.s^{-1} à 0 sur 12,5 cm.

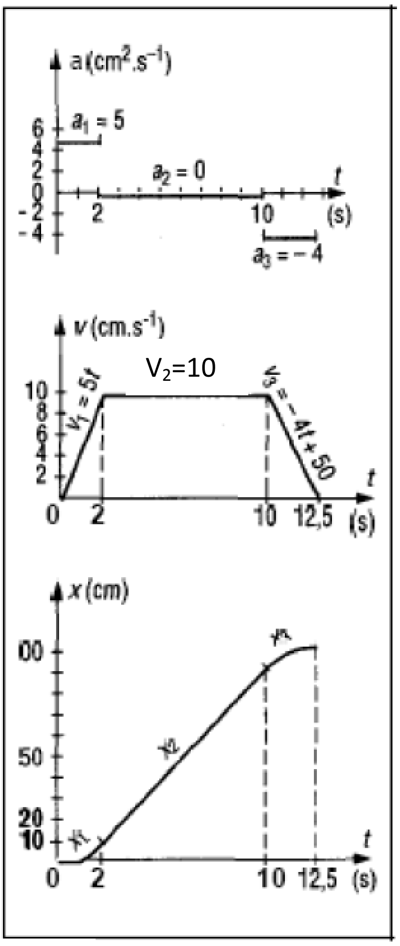
$v_{3f}^2 = v_0^2 + 2a_3(x_3 - x_0)$
$0 = 10^2 + 2a_3(12{,}5)$
et $[a_3 = -4$ cm.s$^{-2}]$

$\boxed{v_0 = 10 \quad v_{3f} = 0 \quad x_3 - x_0 = 12{,}5}$

$v_3 = a_3 t + v_0(3) = -4\,t + v_0(3)$
Pour $t = 10$; $v = 10 = -4 \times 10 + v_0(3)$ et $v_0(3) = 50$
$x_3 = -2t^2 + 50\,t + x_0(3)$
Pour $t = 10$; $x = 90 = -2 \times 10^2 + 50 \times 10 + x_0(3)$
$x_0(3) = -210$

$a_3 = -4$ cm.s^{-2}	$v_3 = -4t + 50$	$x_3 = -2t^2 + 50t - 210$

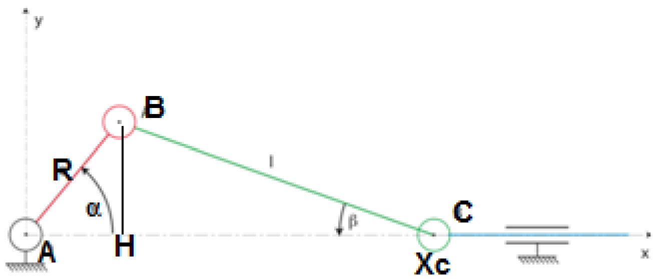
$t = 12{,}5$ s lorsque $v = 0$.



Exercice 2

1-

- mouvement (1) rotation : trajectoire circulaire
- mouvement (3) translation : trajectoire rectiligne
- mouvement (2) plan (translation +rotation) trajectoire quelconque.



2- loi de mouvement du piston:

a- méthode analytique

- puisque le piston a un mouvement de translation donc tous ses points ont la même vitesse et accélération

- on choisi le point C appartenant à (2) et (3)

$$x_C = AH + HC$$

$$AH = Rcos\alpha; HC = Lcos\beta?$$

$$Sin\alpha = \frac{BH}{R}; Sin\beta = \frac{BH}{L} \Leftrightarrow RSin\alpha = LSin\beta \Leftrightarrow Sin\beta = RSin\alpha/L$$

$$Sin^2\beta + Cos^2\beta = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Cos}\beta = \sqrt{1 - Sin^2\beta} = \sqrt{1 - (RSin\alpha/L)^2}$$

donc: $x_c = RCos\alpha + L\sqrt{1 - \left(\frac{RSin\alpha}{L}\right)^2} = RCos\omega t + L\sqrt{1 - \left(\frac{RSin\alpha\omega t}{L}\right)^2}$

$$= RCos\omega t + \sqrt{\mathrm{L}^2 - RSin\alpha\omega t^2}$$

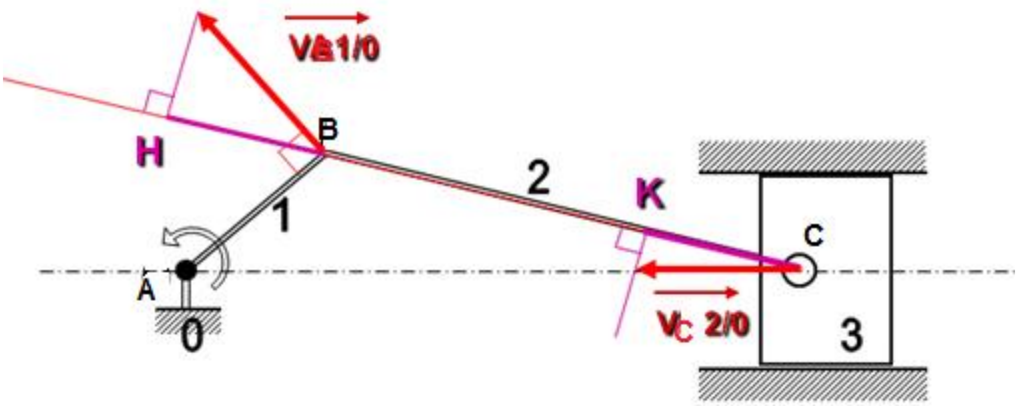
$$V_c = \frac{dx_C}{dt} = -R\omega Sin\omega t + \frac{1}{2}\frac{*(-2 * R^2\omega Cos\omega t * Sin\omega t)/L^2}{L\sqrt{1 - (RSin\omega t/L)^2}} = -R\omega * \left[Sin\omega t + \frac{RSin2\omega t}{2\sqrt{\mathrm{L}^2 - RSin\alpha\omega t^2}}\right]$$

a- méthode graphique

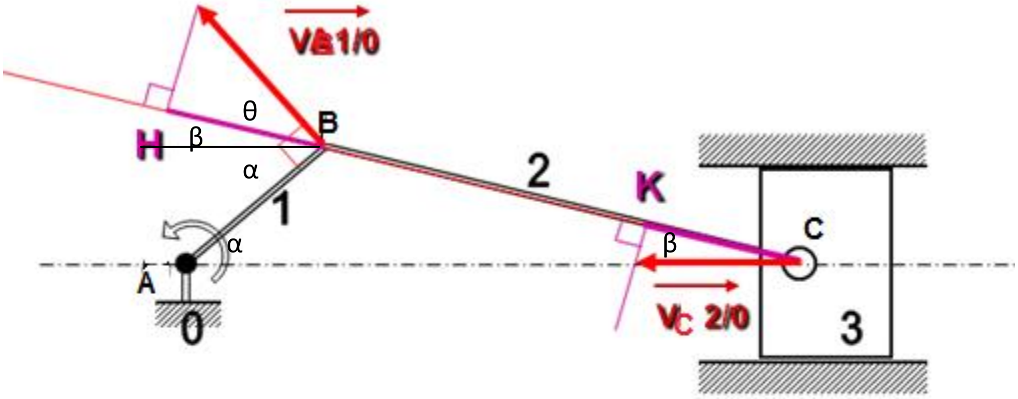
1- Equiprojectivité des vitesses

$$\overrightarrow{\boldsymbol{Pr}}_{\frac{VB}{\overline{BC}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{Pr}}_{\frac{Vc}{\overline{BC}}}$$

- **Etapes de réalisation**
  - faire la projection de $\vec{V}B$ sur la direction de BC (soit $\overrightarrow{BH}$)
  - reporter le même vecteur $\overrightarrow{BH}$ à partir de C (le nommer $\overrightarrow{CK}$)
  $$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{CK}$$
  - tracer la perpendiculaire à partie de K sur CB
  - l'intersection entre cette perpendiculaire avec la direction de VC nous donne la valeur de VC.



- **Géométriquement**



$$CK = BH \Leftrightarrow VBcos\theta = Vccos\beta$$

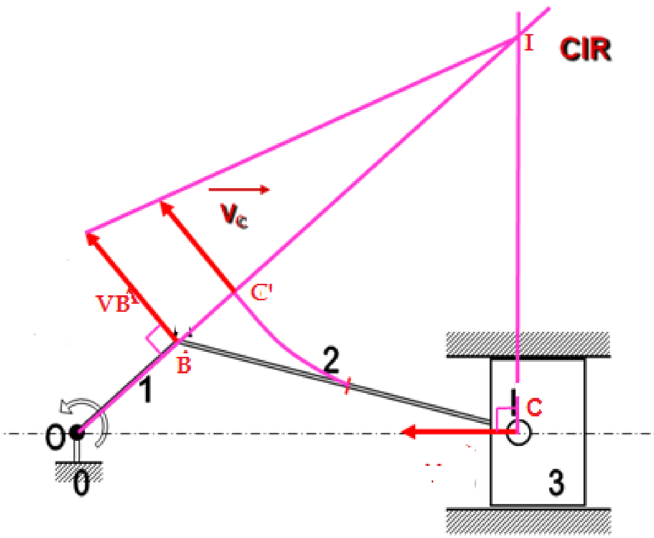
$$Vc = VBcos\theta / cos\beta$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \Leftrightarrow cos\theta = sin(\alpha + \beta) = cos\alpha sin\beta + sin\alpha cos\beta$$

2- Centre instantané des rotation (CIR)

- **Etapes de réalisation**

- tracer des perpendiculaires sur les directions de VB et Vc
- le point d'intersection (I) est le centre instantané de rotation dans cette position
- tracer une droite liant (I) avec la fin du vecteur VB (le triangle formé et le triangle des vitesse)
- reporter la distance IC sur la droite IA (soit IC')



$$\frac{VC}{IC} = \frac{VB}{IB} = \omega_{BC} \Leftrightarrow VC = VB.\frac{IC}{IB}$$

Exercice 3

Remarque

- dans les figures ci dessous on a changer la notation de A et B

- pour une application numérique nous avons choisi le temps où α=60°

1- Nature du mouvement de l'échelle

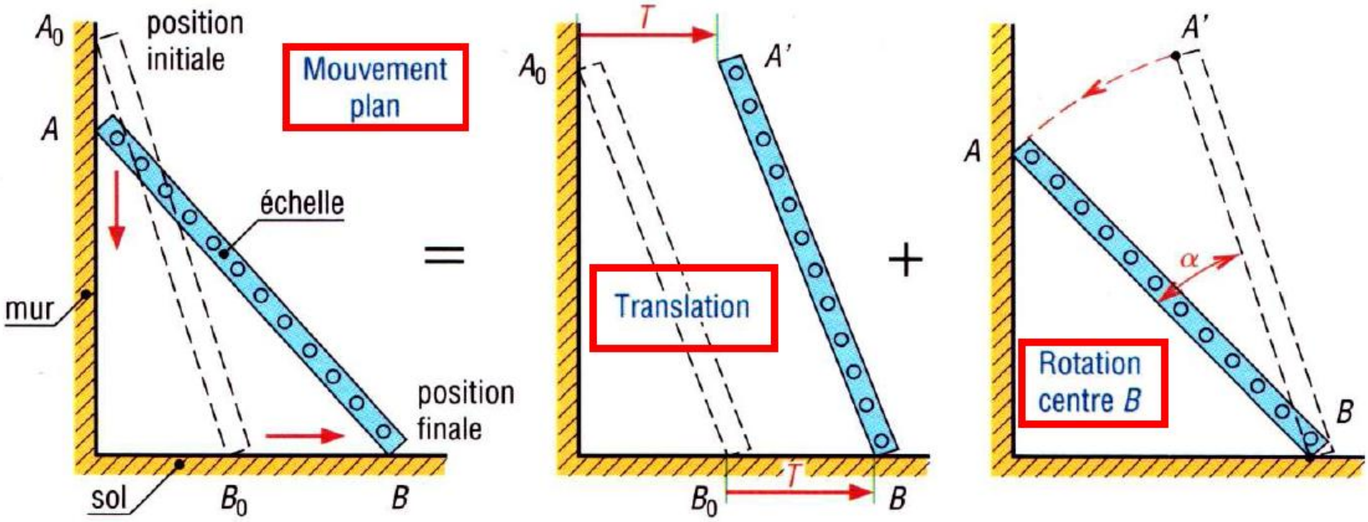
d'après la figure réponse 2, nous avons:

- VA n'est pas parallèle à VB

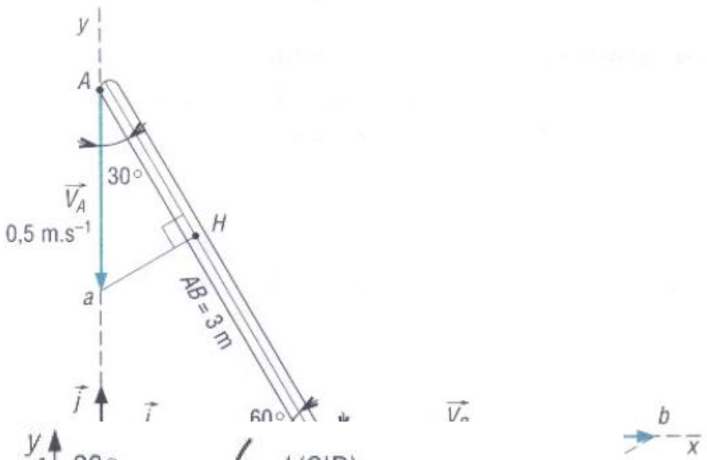
- XA et YB varient dans le temps (translation de A et B)

- α et β varie dans le temps (rotation)

D'où nous avons un mouvement plan (translation +rotation)



<u>a- équiprojectivité</u>



VA . cos 30 = VB . cos 60

0.5 cos 30 = VB . 0.5

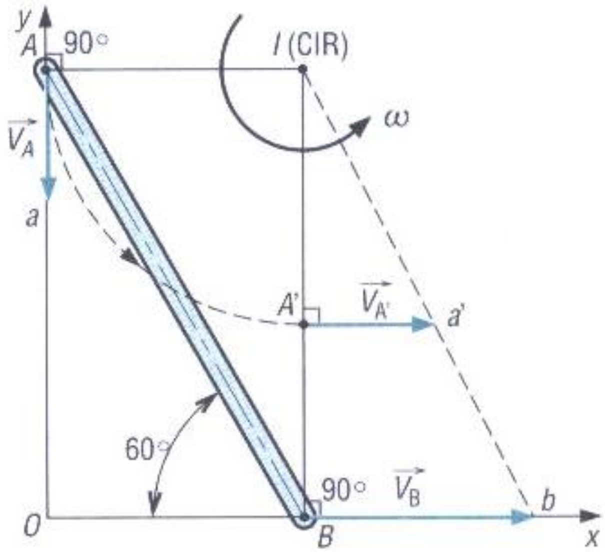
VB = cos 30 = 0.866

d'une manière générale

VA . cos β = VB . cos α

VB=VA.cosβ/cosα; β=π/2-α

donc cos β=sinα; VB=VA.Tanα



<u>b- Méthode CIR</u>

VB/IB = VA/IA = VA'/IA' = ω_{AB}

Avec IA = IA' = AB.cos 60 = 1,5 m

IB = AB.sin60 = 2,6 m

w = VA/IA = 0,5/1,5 = 0,33 rd/s

VB = 0,33 × 2,6 = 0,866 m/s

VB = cos 30 = 0.866

d'une manière générale

IB=AB.sinα et IA=AB.cosα

VA/IA= VB/IB; VB=VA.IB/IA=VA.tanα

3- La vitesse du centre de gravité G

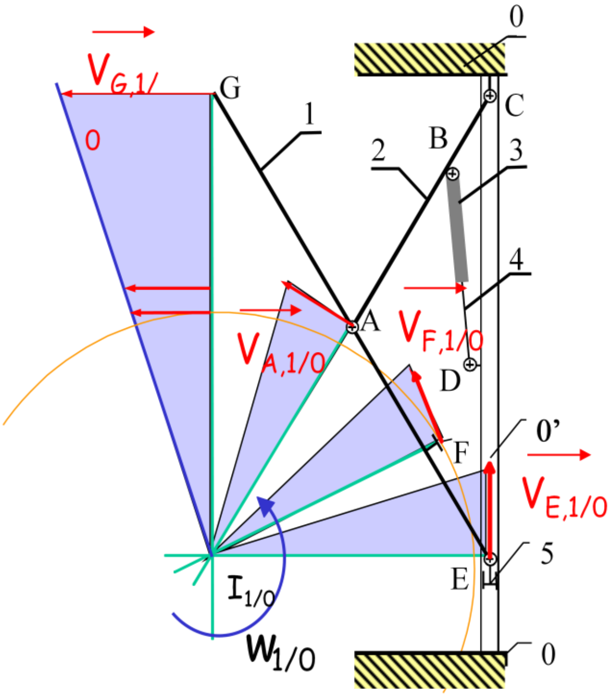
$$\overrightarrow{VG} = \overrightarrow{VA} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AG} = -VA\vec{J} + \omega\vec{k} \times \left(\frac{l}{2}\vec{\imath} - \frac{l}{2}\vec{J}\right)$$

$$\overrightarrow{VG} = -VA\vec{j} + \omega\frac{l}{2}(\vec{j} + \vec{i})$$

4- Si α=0 Alors VB=0 (donc à ce moment on a une rotation instantanée autour de B)

Exercice 4

Cet exercice s'intéresse à la pratique graphique du CIR



Analytiquement : d'après Thalès

$$\frac{V_{F,1/0}}{IF} = \frac{V_{A,1/0}}{IA} = \frac{V_{E,1/0}}{IE} = \frac{V_{G,1/0}}{IG}$$

$$V_{A,1/0} = \frac{V_{F,1/0}}{IF} \times IA = \frac{40}{42} \times 45 = 42{,}9 cm/s$$

$$V_{G,1/0} = \frac{V_{F,1/0}}{IF} \times IG = \frac{40}{42} \times 77 = 73{,}3 cm/s$$

$$V_{E,1/0} = \frac{V_{F,1/0}}{IF} \times IE = \frac{40}{42} \times 45 = 42{,}9 cm/s$$

Echelle : 1 / 20

Echelle des vitesses : 20 cm/s ⇔ 1 cm

Série géométrie de masse

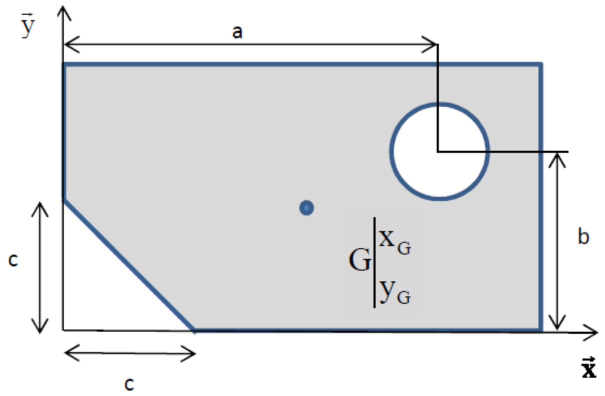
Exercice N :01

Le centre de masse d'une plaque chanfreinée et percée d'un trou Appelons S_1 la plaque rectangulaire de dimensions L x l , S_2 le cercle de rayon R dont le centre a pour coordonnées (a,b) et S_3 le triangle de coté c

-Déterminer les coordonnées du centre de gravité G de la plaque.

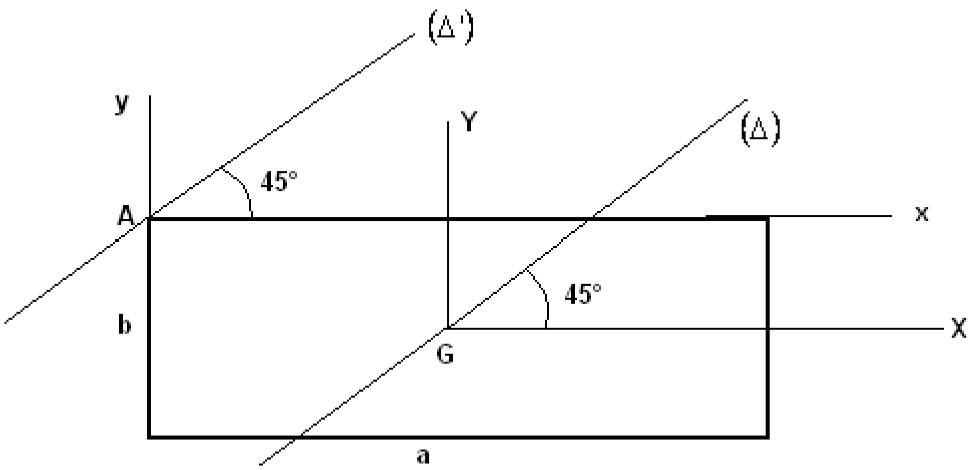
On applique les définitions suivantes :

On donne : L = 150, l = 90 a = 120, b = 60, c = 30, R = 15



Exercice N :02

1/- Calculer les tenseurs d'inertie suivant les repères GXYZ et Axyz d'une plaque rectangulaire de masse M, de longueur a et de largeur b.



2/- Calculer le moment d'inertie de la plaque par rapport à un axe (Δ) passant par G et faisant un angle de 45° avec GX .

3/- Calculer le moment d'inertie de la plaque par rapport à un axe (Δ') passant par A et faisant un angle de 45° avec Ax

SOLUTION

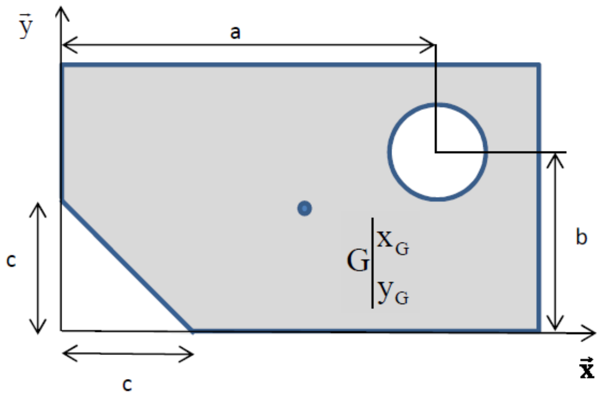
Exercice 1

Rappel

$$\boldsymbol{centre\ de\ masse\ G(x_G, y_G);}$$

$$x_G = \frac{\sum x_{Gi}.m_i}{\sum m_i};\ y_G = \frac{\sum y_{Gi}.m_i}{\sum m_i};$$

$$x_G = \frac{\int xdm}{m};\ y_G = \frac{\int ydm}{m} \textit{(formes complexes)}$$



On peut deviser la plaque en trois formes simples (rectangle, disque et triangle)

1 - rectangle: S1=L.l, M1=σ.S1; G1(L/2;l/2)

2- disque: S2=π.R², M2=σ.S2; G2(a;b)

3- Triangle: S3=1/2C.C, M3=σ.S3; G3(C/3;C/3)

- ***G (x_G;y_G) de la plaque***

$$x_G = \frac{x1.M1 - x2.M2 - x3M3}{M1 - M2 - M3} = \frac{\sigma(x1.S1 - x2.S2 - x3.S3)}{\sigma(S1 - S2 - S3)}$$

$$x_G = \frac{\frac{L}{2}.L.l - a.\pi R^2 - \frac{C}{3}.1/2C^2}{L.l - \pi R^2 - 1/2C^2} = \frac{150.90.75 - 120.\pi.15^2 - 10.450}{150.90 - \pi.15^2 - 450}$$

$$y_G = \frac{\frac{l}{2}.L.l - b.\pi R^2 - \frac{C}{3}.1/2C^2}{L.l - \pi R^2 - 1/2C^2} = \frac{150.90.45 - 60.\pi.15^2 - 10.450}{150.90 - \pi.15^2 - 450}$$

Exercice2

1- Tenseurs d'inertie

$$\begin{bmatrix} I_{XX} & -I_{XY} & -I_{Xz} \\ I_{XY} & I_{YY} & -I_{YZ} \\ -I_{XZ} & -I_{YZ} & I_{ZZ} \end{bmatrix}$$

$$,I_{xx} = \int (y^2 + z^2)dm;\ I_{yy} = \int (x^2 + z^2)dm;\ I_{zz} = \int (y^2 + x^2)dm;$$

$$I_{xy} = \int (xy)dm;\ I_{yz} = \int (yz)dm;\ I_{xz} = \int (xz)dm;$$

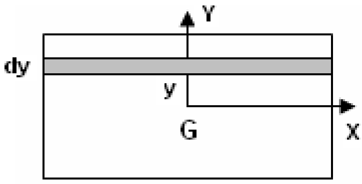


Figure 1

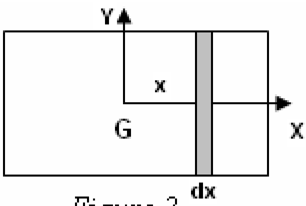


Figure 2

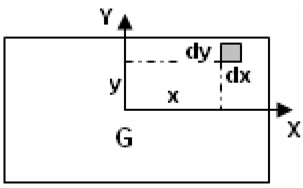


Figure 3

Le solide est une plaque de dimension a x b. Sa surface est $S = ab$, *sa Masse :* $M = \sigma S$ *d'où* $\sigma = \frac{M}{S} = \frac{M}{ab}$.

Pour calculer J_{XX}, *on découpe le domaine en plaques rectangulaires horizontales infiniment petites (figure 1) de telle sorte que la distance entre cette plaque et l'axe (GX) soit constante. Cette plaque a pour surface* $dS = ady$ *et pour masse :*

$$dm = \sigma dS = \frac{M}{ab} ady = \frac{M}{b} dy$$

$$J_{XX} = \int_S y^2 dm = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \frac{M}{a} dy = \frac{M}{b}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-b/2}^{b/2} = \frac{M}{3b}\left(\left(\frac{b}{2}\right)^3 - \left(-\frac{b}{2}\right)^3\right) = \frac{M\,b^2}{12}$$

En découpant le solide en plaques rectangulaires verticales (figure 2) ($dm = \sigma dS = \frac{M}{a} dx$ *)*

On obtient : $J_{YY}=\int_S x^2 dm=\int_{-a/2}^{a/2} x^2\frac{M}{a}dx=\frac{M}{a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a/2}^{a/2}=\frac{M}{3a}\left(\left(\frac{a}{2}\right)^3-\left(-\frac{a}{2}\right)^3\right)=\frac{M\,a^2}{12}$

$$J_{ZZ}=\int_S\left(x^2+y^2\right)dm=\int_S\left(x^2\right)dm+\int_S\left(y^2\right)dm=J_{XX}+J_{YY}=\frac{M}{12}\left(a^2+b^2\right)$$

Pour calculer $J_{XY}=\int_S xydm$ *, on découpe le domaine (figure 3) en plaques rectangulaires de surface* $dS=dxdy$ *et de masse* $dm=\sigma dS=\frac{M}{ab}dxdy=\frac{M}{ab}dxdy$ *.*

$$J_{XY}=\int_S xydm=\frac{M}{ab}\int_{-a/2}^{a/2}xdx\int_{-b/2}^{b/2}ydy=\frac{M}{ab}\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(-\frac{a}{2}\right)^2\right)\left(\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(-\frac{b}{2}\right)^2\right)=0.$$

$J_{XZ}=J_{YZ}=0$ *car z=0*

Ce résultat était attendu, car les axes (GX), (GY) et (GZ) sont des axes de symétrie, donc des axes principaux et par conséquent les produits d'inertie sont nuls.

Remarque : On pouvait utiliser le découpage de la figure 3, pour calculer J_{XX}

$$J_{XX}=\int_S y^2 dm=\int_S y^2\frac{M}{ab}dxdy=\frac{M}{ab}\int_{-a/2}^{a/2}dx\int_{-b/2}^{b/2}y^2 dy=\frac{M}{ab}\left(a-(-a)\right)\frac{1}{3}\left(\left(\frac{b}{2}\right)^3-\left(-\frac{b}{2}\right)^3\right)=\frac{M}{12}b^2.$$

$$\left[J_G\right]_{XYZ}=\frac{M}{12}\begin{bmatrix} b^2 & 0 & 0\\ 0 & a^2 & 0\\ 0 & 0 & b^2+a^2\end{bmatrix}$$

Pour calculer le tenseur d'inertie par rapport au repère Axyz, il suffit de changer les bornes de l'intégrale, 0 à a pour x, et 0 à b pour y, ou appliquer le théorème de Huygens pour les moments d'inertie.

*T**<u>héorème de Huygens:</u>***

$$I_{/\Delta}=I_{/D}+m\,d^2=I_G+m\,d^2$$

$$\left[J_A\right]_{xyz}=\left[J_G\right]_{XYZ}+\begin{bmatrix} M+\left(\frac{b}{2}\right)^2 & -M\frac{b}{2}\frac{a}{2} & 0\\ -M\frac{b}{2}\frac{a}{2} & M+\left(\frac{a}{2}\right)^2 & 0\\ 0 & 0 & M\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix}\frac{b^2}{3} & \frac{-ab}{4} & 0\\ \frac{-ab}{4} & \frac{a^2}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{b^2+a^2}{3}\end{bmatrix}$$

$$J_{\Delta} = \langle u \rangle \left[J_G \right]_{XYZ} \{u\} = \frac{M}{24}\left(a^2 + b^2\right) \qquad J_{\Delta'} = \langle u \rangle \left[J_A \right]_{xyz} \{u\} = \frac{M}{12}\left(2a^2 + 2b^2 - 3ab\right)$$

$$\text{avec } \langle u \rangle = \langle \cos 45°, \sin 45°, 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1,1,0 \rangle$$