CHAPITRE I
Oscillations libres non amorties : Système à un degré de liberté

I.1 Généralités sur les vibrations

I.1.1 Mouvement périodique :

Définition : C'est un mouvement périodique qui se répète identique à lui même en des intervalles de temps réguliers égaux de durée (**T)** qui s'exprime en seconde (s).
La fréquence est le nombre de fois que ce mouvement se répète en 1 seconde: $\boldsymbol{f}$ exprimée en Hertz (HZ).

I.1.2 Exemple de systèmes vibratoires

Exemple 1 :
- Système masse-ressort.

Exemple 2 :
- Système masse-fil.

Exemple 3 :
- Circuit L-C

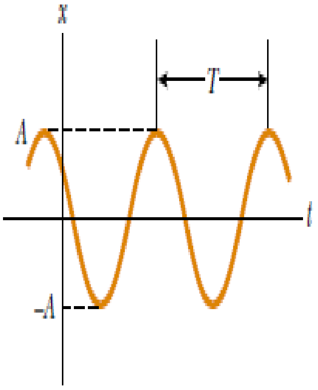
I.1.3. Mouvement vibratoire :

Définition : Un mouvement vibratoire est un mouvement périodique sinusoïdal on dit aussi mouvement harmonique, lorsque le Corp matériel qui est en mouvement à la même position et avec la même vitesse au bout d'intervalles de temps réguliers de durée T. On peut aussi définir un mouvement vibratoire par sa fréquence $\boldsymbol{f}$. La fréquence indique le nombre d'oscillations complètes (dans le sens aller retour) se produisant par seconde.

I.1.4 Mouvement vibratoire sinusoïdal

Définition : un mouvement vibratoire est sinusoïdal, si un point vibrant possède une élongation du type **:**

$$\mathrm{x}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{sin}\ (\boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{\varphi})$$



- La grandeur $\mathrm{x}(t)$ est appelée l'élongation (ou la position) à l'instant *t*, l'élongation maximale ou l'amplitude du mouvement, elle varie entre –*A* et +*A*.
- La quantité $\boldsymbol{\omega}$ est la pulsation du mouvement et exprimée en (rad/s).
- La quantité $(\boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{\varphi})$ est la phase instantanée, exprimée en (radian, sans dimension),
- l'angle φ est la phase initiale, correspond à la phase à l'instant $t = 0$.

I.2 Vibration harmonique

Définition : On appelle vibration harmonique tout système dont le paramètre $x(t)$ qui la caractérise est une fonction sinusoïdale du temps : $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$.

On en déduit l'expression de T en fonction de la pulsation : $T = 2\pi/\omega$

- La fréquence f, nombre d'oscillations par seconde correspond à l'inverse de la période T : $f = 1/T$.

Il existe d'autres expressions équivalentes pour la fonction $x(t)$. En effet, la fonction sinus est équivalente à la fonction cosinus décalée de π/2. On peut donc écrire :

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\sin(\omega t + \varphi')$$

Donc :

Les grandeurs caractéristiques d'une vibration harmonique sont:

- L'amplitude A,
- La période T, $\omega = 2\pi/T$

$T = 2\pi f$; ω : la pulsation, f : $fréquence$.

- La phase φ.

I.3. Oscillateurs harmoniques

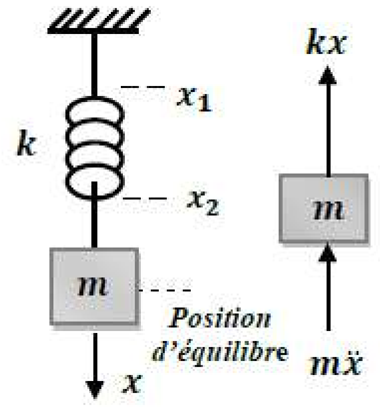
Le principe fondamental de la dynamique de corps solides (1 iére loi de Newton) s'écrit pour l'oscillateur harmonique modèle (masse-ressort) ou :

X : est l'élongation :

$$m\ddot{x} = -kx$$

***fr = −kx,* où *k* est la raideur du ressort. (Fr : force élastique)**

Qui s'écrit : $m\ddot{x} - (-kx) = 0$



En divisant par m : $\ddot{x} + k/m = 0$.

Le rapport k/m étant positif et en posant $\omega_0 = \sqrt{k/m}$: on obtient l'équation différentielle d'une vibration harmonique de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2 = 0$.

La pulsation ω_0 ne dépend que de la masse m et de la raideur k du ressort, est appelée « **la pulsation propre** » du système.

- La masse oscille donc indéfiniment avec une période propre T_0 donnée par la relation suivante:

$$T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k}.$$

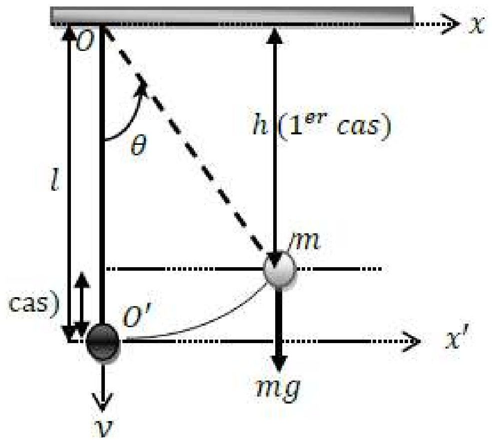
I.3.1. Pendule pesant simple

Un pendule simple est constitué d'un solide de petite dimension de masse m suspendu à un point fixe O par un fil inextensible de longueur L. Ecarté de sa position d'équilibre, il oscille dans le champ de pesanteur terrestre g.

Les coordonnées du système :

$$m\begin{cases} x = l\ \sin\theta \Rightarrow \dot{x} = l\dot{\theta}\cos\theta \\ y = l\ \cos\theta \Rightarrow \dot{y} = -l\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

–



On aura donc : $.\ l^2\ \ddot{\theta} + m.\ g.\ l.\ \theta = 0$, en divisant par $m.\ l^2$ on trouve : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, et on retrouve bien le même résultat.

I.3.2 Solution de l'équation différentielle du mouvement

L'équation différentielle (EDF) du mouvement est de la forme :

$$\ddot{x} + \omega_0 x = 0$$

C'est une équation différentielle du second ordre sans second membre dont la solution sous la forme complexe est de la forme : $x(t) = Ae^{\alpha t}$

La dérivée première de la fonction $x(t)$) (la vitesse) : $\dot{x}(t) = A\alpha e^{\alpha t}$.

La dérivée seconde de la fonction $\ddot{x}(t)$ (L'accélération) : $x(t) = A\alpha^2 e\alpha t$

On remplace dans l'EDF : $A\alpha^2 e^{\alpha t} + \omega_0^2 A\alpha e^{\alpha t} = 0 \Rightarrow (\alpha^2 + \omega_0^2) = 0$

or $Ae^{\alpha t} \neq 0 \Rightarrow \alpha^2 + \omega_0^2 = 0$ $donc\ \alpha = \pm j\omega_0$

Donc la solution aura la forme: $x(t) = A_1\ e^{j\omega_0 t} + A_2\ e^{-j\omega_0 t}$.

Selon la relation d'**Euler** : $e^{\pm j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t \pm j\sin\omega_0 t$

$\rightarrow x(t) = A1\ (\cos\omega 0t + j\sin\omega 0t) + A2\ (\cos\omega 0t - j\sin\omega 0t)$

$x(t) = (A1 + A2)\cos\omega 0t + j(A1 - A2)\sin\omega 0(t) = (C\cos\omega 0t + j\sin\omega 0t)$

Tels que : C =(A1 + A2) et D = J(A1 − A2).

Donc : $x(t) = C\cos\omega\, 0t + D\sin\omega 0$, est aussi une solution de l'équation différentielle.

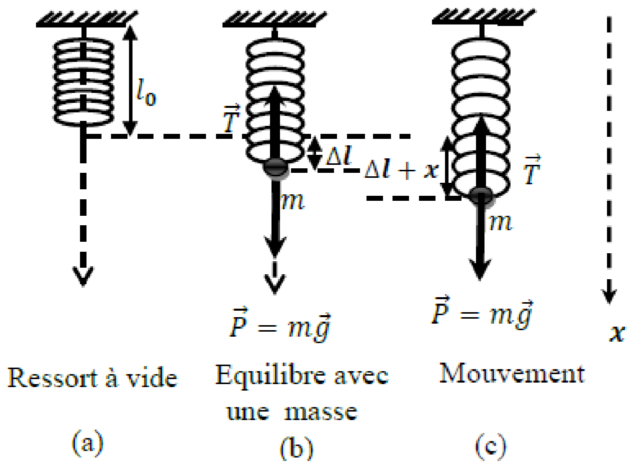
Si on pose : $C = a.\ \cos\theta$ et $D = a.\sin$, on aura : $x(t) = a.\ \cos\theta\ \cos\omega_0 t + a.\sin\theta\ \sin\omega_0 t$.

$(x-y) \equiv \cos x \cos y + \sin x \sin y$ donc : $(t) = a\cos(\omega_0 t - \theta) = a\cos(\omega_0 t + \varphi)$, $\varphi = \theta + \pi/2$

donc : $x(t) = a\,(\omega_0 t + \varphi)$, Tels que : $a = \sqrt{C^2 + D^2}$ et, $\theta = \text{arc tang}\,\frac{D}{A}$

I.4. La force dans le mouvement harmonique

C'est le cas d'une masse m accrochée à l'extrémité libre d'un ressort et se déplaçant sans frottement suivant une direction Ox vertical (voir figure).



A l'équilibre : il y a deux forces qui agissent sur la masse m ; son poids et la force de rappel du ressort tension due au ressort :

$$\vec{f} = \vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \text{ ----- } mg - K\Delta l = 0$$

$\vec{P}$: *poids de la masse*
$\vec{T}$: *Force du rappel du ressort.*

En mouvement : La deuxième loi de Newton (principe fondamental de la dynamique), nous permet d'écrire :

$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$$

Pour un système qui a une dimension :

$$F = m\,\frac{d^2x}{d\,t^2} = m\,\ddot{x}$$

Après projection on obtient :

$m\,\ddot{x} = mg - k(\Delta l + x)$, En utilisant la condition d'équilibre précédente on obtient :

$$m\ddot{x} = -kx \text{ ------ } m\ddot{x} = kx$$

Or : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$

Ou : $\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \text{coste}$

Donc, la force dans les mouvements harmoniques simples est **proportionnelle et opposée** au déplacement et constitue **une force de rappel**.

I.5 Energie d'un oscillateur harmonique

Nous voulons montrer que l'énergie totale (mécanique), E=T+U, est constante et déduire la valeur de cette constante. Pour cela prenons : x(t) = $(\omega_0 t + \varphi)$, alors :

$$E = T + U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

L'énergie mécanique de l'oscillateur :

$$E_m = \frac{1}{2} K x_0^2 \text{, ou : } E_m = coste$$

I.6 Analogie entre le système mécanique " Masse-ressort" et le système électrique "L-C".

Système mécanique	Système électrique
Déplacement : x(t)	*Charge électrique q(t)*
Vitesse : $\dot{x}(t)$	*Courant électrique* $i = \frac{dq}{dt}$
Accélération : $\ddot{x}$	*Variation du courant :* $\ddot{q}$
Masse : m	*Inductance, bobine, self : L*
Ressort k	*Inverse de la capacité 1/C*
Force de rappel : k x	*d.d.p entre les bornes d'in condensateur :* $\frac{q}{c}$
Force d'inertie : $m\ddot{x}$	*d.d.p entre les bornes de la bobine : L* $\ddot{q}$
Energie potentielle : $\frac{1}{2} k x^2$	*Energie électrique :* $\frac{1}{2C} q^2$
Energie cinétique : $\frac{1}{2} m\dot{x}^2$	*Energie magnétique :* $\frac{1}{2} L\dot{q}^2$

CHAPITRE II
Oscillations libres amorties : Systèmes à un degré de liberté

II.2.1 Les systèmes libres amortis

En pratique, un oscillateur est soumis à des forces qui sont en phase ou en opposition de phase avec la vitesse du point matériel. Le système n'est pas conservatif ; il est dissipatif. L'énergie mécanique décroit avec le temps. La présence de frottements implique une dissipation d'énergie sous forme de chaleur ; on observe alors :
• soit des oscillations dont l'amplitude diminue au cours du temps,
• soit un retour à l'équilibre sans oscillation.
On parle alors d'***amortissement.*** L'expression de la force de frottement visqueux est la suivante :

$$\overrightarrow{F_f} = -\beta\vec{\vartheta}$$

(β *est une constante superieur* à *zéro qui dépend du mileui*).
Tels que :

β : est le coefficient de frottement visqueux. β : $[N.\ \ s/m]$.
$\vec{v}$: la vitesse généralisée du système.

Le signe moins (-) vient du fait que cette force s'oppose au mouvement en agissant dans la direction et le sens contraire à la vitesse.

II.2.2 L'équation du mouvement

D'après la 1 iére loi de Newton on a :

$$m\ddot{x} = \sum F_i = F_r + F_f = -k\,x - \beta_i$$
$$m\ddot{x} + \beta\,\dot{x} + kx = 0$$
$$\ddot{x} + \frac{2\,\beta}{2\,m}\,\dot{x} + \frac{k}{m}\,x = 0$$

On pose : $\alpha = \frac{\beta}{2m}$: coefficient d'amortissement.

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: Pulsation propre de l'oscillateur harmonique non –amorti.

$$\ddot{x} + 2\,\alpha\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0$$

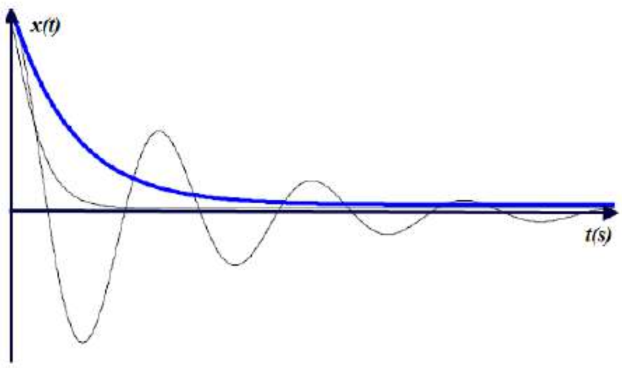
II.2.3 La solution de l'équation différentielle : Système masse-ressort-amortisseur

L'équation différentielle du mouvement s'écrit sous la forme : $\ddot{x} + 2\,\alpha\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre.
La fonction $x(t) = D\,e^{rt}$ est une solution particulière de cette équation différentielle à condition que r soit une des deux racines $r1$ et $r2$ de l'équation du second degré, appelée équation caractéristique.

$$r^2 + 2\,\alpha r + \omega_0^2 = 0$$

La solution générale de l'équation prend la forme : $x(t) = C_1 e^{r1\,t} + C_2 e^{r2t}$.
Tels que : C_1 , et C_2 sont des constantes déterminées par les conditions initiales, dépendent des valeurs de α^2 par rapport à ω_0^2, cette solution prend l'allure suivante :



On distingue donc :

a) $\alpha^2 > \omega_0^2$: c'est un amortissement fort. Les racines de l'équation caractéristique sont réelles :

$$r_{1,2} = -\alpha \pm \omega$$

$$\omega = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \text{ réelle,}$$

On obtient la solution suivante:

$$x(t) = e^{-\alpha t}(A_1 e^{\omega t} + A_2 e^{-\omega t})$$

Remarques :

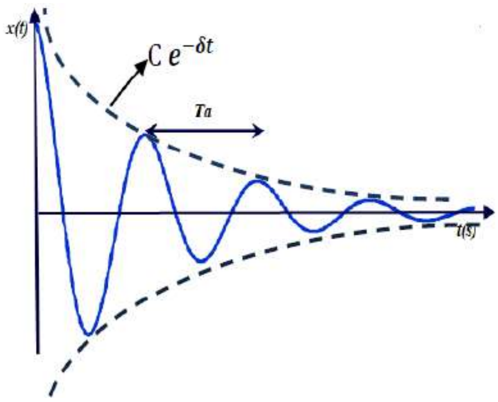
- x $(\boldsymbol{t})$ tend vers **0** sans oscillation quand le temps augmente.
- x $(\boldsymbol{t})$ est un mouvement non sinusoïdal.

b) $\alpha^2 < \omega_0^2$, on a un amortissement faible ; $r_{1,2} = -\alpha + j\omega$

$$x(t) = e^{-\alpha t}(A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t})$$

Ceci est équivalent à : $x(t) = A\,e^{-\alpha t}\cos(\omega t - \varphi)$

Les constantes A et φ sont définies par les conditions initiales : $x(t) = 0, x(\dot{t}) = 0$, $x(0) = x_0, x(\dot{0}) = 0$



Remarques :

- x $(\boldsymbol{t})$ représente un mouvement vibratoire.
- L'amplitude $\boldsymbol{C}$ $\boldsymbol{e^{-\delta t}}$ est décroissante : x $(\boldsymbol{t})$

tend vers **0** quand **t** augmente.
• l'élongation $\boldsymbol{x(t)}$ va osciller en restant comprise entre $-\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{e^{-\delta t}}$ et $\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{e^{-\delta t}}$.Ces deux exponentielles représentent l'enveloppe du mouvement de l'oscillateur c'est-à-dire les positions extrémales prises par x lorsque le temps s'écoule.

On définit la pseudo-pulsation comme :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$, c'est la pseudo- période.

On peut déterminer directement a partir des conditions initiales : A et φ :

$$A = \frac{x_0}{\cos\varphi}, \quad \varphi = arctg\ \frac{\alpha}{\omega},$$

c) $\alpha^2 = \omega_0^2$ Amortissement critique.

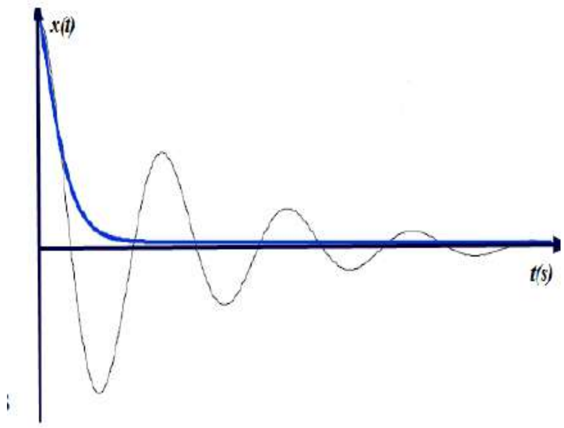
$$On\ démontre\ que : x(t) = e^{-\alpha t}(\,C_{1+}\,C_2 t)$$

$avec: C_1 = x_0,\ C_2 = \alpha x_0$

$Donc\ on\ a:\ x(t) = e^{-\alpha t}(\,x_0 + \alpha x_0 t)$

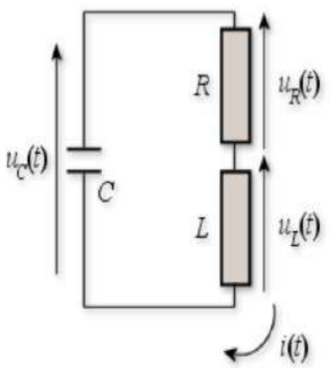
$$Donc, c'est\ le\ cas\ limite\ d'amortissement.$$

Remarques :
• x $(\boldsymbol{t})$ n'est pas oscillatoire car il ne contient pas un terme sinusoidal.
• x $(\boldsymbol{t})$ tend vers **0** sans oscillation quand le temps augmente.
• Le système revient à sa position d'équilibre le plus Rapidement possible.



II.3 L'oscillateur harmonique électrique

Nous allons voir maintenant qu'il existe un autre type d'oscillateur harmonique domaine de la physique : l'électricité.
Soit un circuit électrique, constitué des 3 éléments de base misent en série :
• un résistor de résistance R ;
• un condensateur de capacité C ;
• et une bobine d'inductance L.



Selon la loi de Kirchhoff on a :

Selon la loi de Kirchoff :
Le circuit électrique suivant RLC obéit pour la tension électrique $V_{ext}(t)$ à la même équation différentielle qu'un oscillateur mécanique amorti et forcé.

$V_l = L\ddot{q}$
$V_c = \frac{q}{c}$
$V_R = R\dot{q}$
$V_{ext} = V_0 \cos \Omega\omega t$
$V_L + V_C + V_R = V_{ext} = V_0 \cos \Omega t$

On charge :
$\ddot{q} + \frac{2R}{2L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = \frac{V}{L}\cos \Omega t$
Donc on peut écrire cette équation sous la forme :
$\ddot{x} + 2\,\alpha\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0$

II.4 Décrément logarithmique
Définition : C'est le logarithme du rapport de 2 amplitudes successives des oscillations amorties.

$\Delta = \alpha$T, c'est le décrément logarithmique.

CHAPITRE III
Oscillations forcées amorties : Systèmes à un degré de liberté

III.1. Oscillateur linéaire amorti et forcé

Si on plus des forces de rappel et de frottement, on applique une force extérieure de type :
$\overrightarrow{F_e} = F_e \cos(\Omega t)\vec{\imath}$.
Avec :
$\vec{\imath}: Vecteur\ unité\ selon\ x$
$F_e: Amplitude\ de\ la\ force\ extérieure\ périodique$
$\Omega: Pulsation\ de\ la\ force\ extérieure\ périodique.$

L'équation différentielle devient avec une force de frottement de type visqueux :

$\ddot{x} + 2\,\alpha\dot{x} + \omega_0^2\,x = F\cos\Omega t.$
Avec :
$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \qquad \alpha = \frac{\beta}{2m}, \qquad f = \frac{F_e}{m}.$

La solution de l'équation (1) est : $x(t) = x_H(t) + x_p(t)$,
$x_H(t): est\ la\ solution\ de\ l'oscillateurlibre\ et\ amorti\ qui\ décrit\ le\ mouvement\ transitoire, aprés$
Enclenchement de la force extérieure, $\overrightarrow{F_e}$, et
$x_p\ est\ la\ solution\ stationnaire, c'est\ adire\ du\ mouvement$ périodique permanent du système. Donc la solution est :

$$x(t) = A(\omega)\cos(\Omega t + \varphi)$$

$$\begin{cases} x(t) = e^{-\alpha t}(A_1 e^{\omega t} + A_2 e^{-\omega t}), \text{ pour un amortissement fort.} \\ x(t) = e^{-\alpha t}(x_0 + \alpha x_0 t), \text{ pour un amortissement critique.} \\ x(t) = A\,e^{-\alpha t}\cos(\omega t - \varphi), \text{ pour un amortissement faiblement amorti.} \end{cases}$$

III.2.1 Solution homogène :

La solution homogène correspond à la solution de l'équation différentielle sans second membre :

$$\ddot{x} + 2\,\alpha\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0$$

Il apparaît que la solution de l'équation différentielle homogène est tout simplement la solution trouvée pour l'oscillateur harmonique amorti en régime libre dans le cas des oscillations faiblement amorties :
$x(t) = A\,e^{-\alpha t}\cos(\omega t - \varphi)$, pour un amortissement faiblement amorti.

Remarque :

• La solution générale de l'équation sans second membre correspond à un régime **transitoire** (qui ne dure qu'un certain temps).

III.2.2 Solution particulière:

Lorsque la composante x $(\boldsymbol{t})$ devient vraiment négligeable, il ne reste plus que la solution particulière, qui est la solution imposée par la fonction d'excitation. Nous disons que nous sommes en régime forcé ou régime permanent. La force excitatrice oblige le système mécanique à suivre une évolution temporelle équivalente à la sienne. Donc si F_{ext} est une fonction sinusoïdale de pulsation $\boldsymbol{\omega}$; alors la solution particulière x $(\boldsymbol{t})$ sera une fonction sinusoïdale de même pulsation $\boldsymbol{\omega}$. Les oscillations de la masse ne sont pas forcément en phase avec la force excitatrice et présente un déphasage noté φ. La solution particulière correspondant au régime permanent s'écrit dont :

$$xp(t) = A(\omega)\cos(\Omega t + \varphi)$$

Pour trouver : $A(\Omega), et\ \varphi(\Omega)$, de la solution stationnaire, on utilise les nombres complexe pour calculer le module et l'argument on aura :

$$A(\omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)\ \ ^2 + \ (2\alpha\omega^2)}}$$

$$tg\ \varphi = -\frac{2\alpha\omega}{(\omega_0^2 -\ \omega^2)} = k$$

D'où : $tg\varphi = arctg\ k.$

La solution générale de l'équation différentielle s'écrit : x $(\boldsymbol{t})\ = \ x_h(\boldsymbol{t})\ +\ x_p\,(\boldsymbol{t})$.

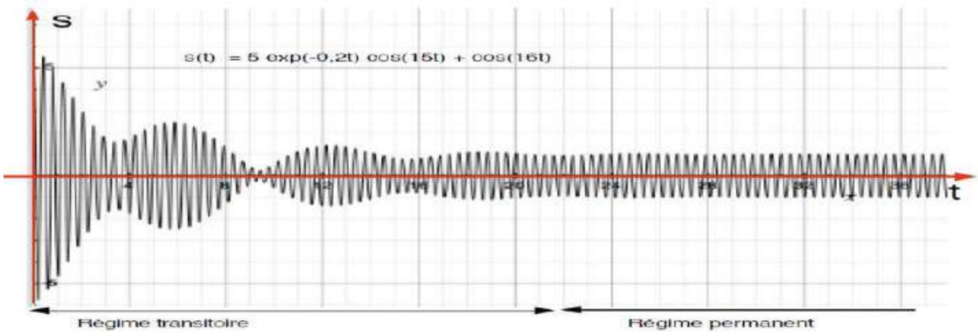
• $x_h(\boldsymbol{t})$ est appelée solution homogène caractérisant un régime transitoire qui disparaît exponentiellement avec le temps. Quand le régime transitoire disparaît

• $x_p\,(\boldsymbol{t})$. est appelée solution particulière d'amplitude :

$$A(\omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)\ \ ^2 + \ (2\alpha\omega^2)}}$$

caractérisant un régime permanent (stationnaire) car il subsiste aussi longtemps que la force extérieure (F_{ext}) est appliquée. Nous notons la dépendance de l'amplitude **A** de la pulsation $\boldsymbol{\omega}$.

• La solution x (t) aura donc souvent une allure caractéristique comme celle présentée sur la figure ci-dessous.



III.2.3 Etude de $A(\Omega), et\ \varphi(\Omega)$:

1er cas : $\Omega = 0,\quad A(\Omega)= \frac{f}{\omega_0^2}$

2 iéme cas : $A(\Omega) = 2\Omega f\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) - 2\,\alpha^2)/\ ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\,\alpha^2))$.

Dérivée nulle : $\frac{dA}{d\Omega} = 0$, ce qui implique que : $\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) - 2\,\alpha^2 = 0$.

On distingue deux types de fonction :

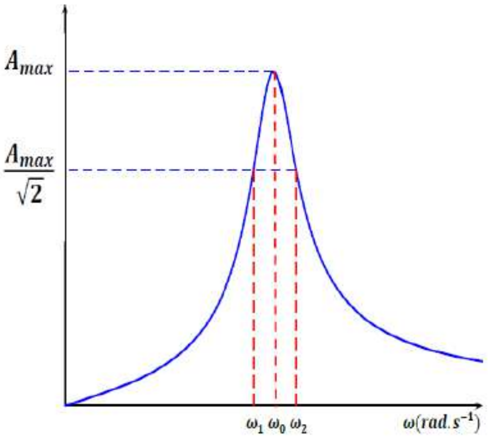
1. $\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) - 2\,\alpha^2 < 0$, donc la fonction $A(\Omega)$ **est fonction décroissante correspond à** $\alpha > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$
2. $\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) - 2\,\alpha^2 > 0$, donc la fonction $A(\Omega)$ **est une fonction croissante correspond à** $\alpha < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$.

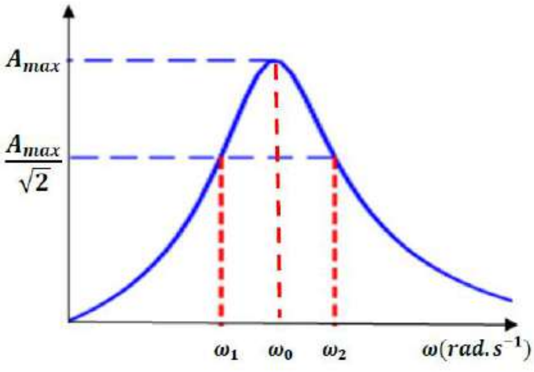
III.3 .3 Phénomène de résonance et Facteur de qualité

Dans les systèmes électriques, ce phénomène permet de calculer le facteur de qualité Q qui augmente lorsque l'amplitude maximale augmente : $Q = \frac{A_{max}}{A_0}$.

- Une autre méthode pratique pour déterminer le facteur de qualité : $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$.

- Pour caractériser l'acuité (intensité) de la réponse d'un oscillateur en fonction de la pulsation, on définit une **bande passante :** $\omega_2 - \omega_1$.





CHAPITRE IV

Oscillations libres des systèmes à plusieurs degrés de liberté

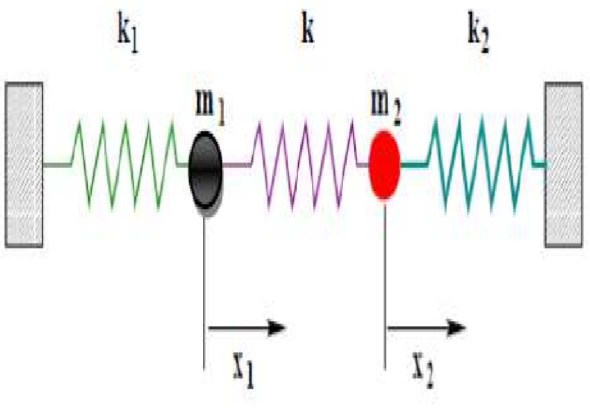
IV.1 Systèmes à 2 degrés de liberté : Régime libre sans frottement

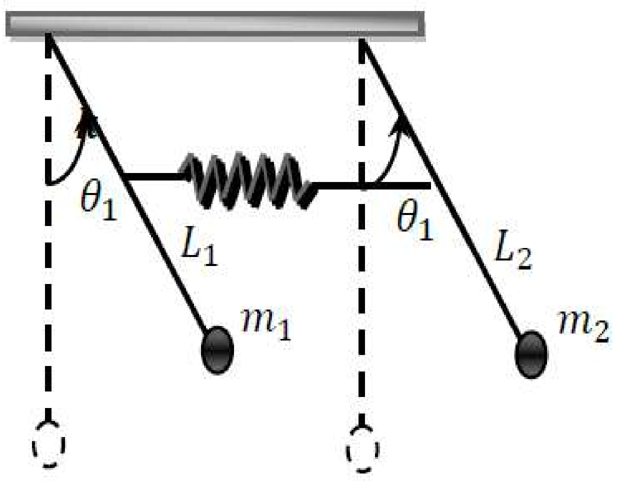
Le plus simple des systèmes formés par deux masses m1 et m2 pouvant glisser sans frottement sur un plan horizental. On néglige les masses des ressorts, les déplacements des masses sont x_1 et x_2.
Un système à 2 degrés de liberté possède 02 coordonnées généralisées, 02 équations différentielles et 02 pulsations propres ($\omega 1,\ \omega 2$) .

IV.1 .1 Les type de couplages

a) Couplage Elastique :

Le couplage dans les systèmes mécaniques est assuré par élasticité. Dans les systèmes électriques, on trouve les circuits couplés par capacité, ce qui est équivalent au couplage
par élasticité.





Les équations différentielles correspondant :

$$\begin{cases} m_1\,\ddot{x}_1 = -k1\,x_1 - k\,(x_1 - x_2) \\ m_2\,\ddot{x}_2 = -k2\,x_2 - k\,(x_2 - x_1) \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} \ddot{x_1} = -\frac{k1}{m_1}\, x_1 - \frac{k}{m_1}(\, x_1 - \, x_2) \\ \ddot{x_2} = -\frac{k2}{m_2}\, x_2 - \frac{k}{m_2}(\, x_2 - \, x_1) \end{cases}$$

Dans le cas général, la résolution analytique de ce système est complexe.
Envisageons le système simplifié dans lequel les masses et les raideurs de ressorts sont identiques et posons : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, on a donc :

$$\begin{cases} \ddot{x_1} + \omega_0^2(2\, x_1 - \, x_2) = 0 \\ \ddot{x_2} + \omega_0^2(2\, x_2 - \, x_1) = 0 \end{cases}$$

Par analogie avec l'oscillateur harmonique on suppose que les solutions sont de la forme :

$$\begin{cases} \widetilde{x_1} = \widetilde{A_1} e^{j\omega t} \\ \widetilde{x_2} = \widetilde{A_2} e^{j\omega t} \end{cases}$$

L'introduction de ces solutions dans le système précédent donne :

$$\begin{cases} (-\omega^2 + \, 2\, \omega_0^2)\widetilde{x_1} - \, \omega_0^2 \widetilde{x_2} = 0 \\ -\, \omega_0^2\, \widetilde{x_1} + \, \widetilde{x_2}(\, 2\, \omega_0^2 - \, \omega^2) = 0 \end{cases}$$

La première solution de ces deux équations conduit à trouver :

$\widetilde{x_2} = -\widetilde{x_1}$ ce qui donne $\widetilde{A_1} = -\widetilde{A_2}$

Et la deuxiéme solution conduit à : $\widetilde{x_2} = \widetilde{x_1}$

Donc, si le systéme oscille avec la pulsation ω_1, on a la solution antisymétrique.
Et si : $\omega_1 = \omega_2$, on obtient la solution symétrique.

Dans le cas générale, la solution est une combinaison linéaire de solutions harmoniques de pulsations ω_1 et ω_2

$$\begin{cases} x_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = -A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

VI.2. Phénomène de battement :

Lorsque le couplage est faible (k faible), les pulsations propres des 2 oscillateurs ($\omega 1$ et $\omega 2$) sont voisines $\omega_1 \sim \omega_2$ avec :

$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ est faible, il se produit un phénomène de battement. Les 2 oscillateurs se transmettent de l'énergie entre eux et vibres avec une pulsation ω égal à la moyenne des deux pulsations propres : $\omega = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)$, avec une période qui est égale : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{(\omega_2 + \omega_1)}$; Tandis que la pulsation du battement est égale à : $\omega_b = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$, avec une période de : $T_b = \frac{4\pi}{(\omega_2 - \omega_1)}$