

CHAPITRE 02

SYSTEMES A N DEGRES DE LIBERTE

2.1 INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents, on a vu qu'il était possible de réduire l'étude dynamique d'une structure à celle d'un système à 1 degré de liberté, dont l'équilibre dynamique est régi par une équation différentielle du second ordre. Cette configuration se rencontre lorsque le mouvement de la structure réelle est contraint par des conditions aux limites permettant de décrire sa cinématique par le mouvement d'un seul point.

Cependant, en règle générale, une structure possède plusieurs degrés de liberté et la réduction à un degré de liberté, obtenue en se donnant a priori la déformée $\psi(x)$ de la structure, ne permet l'obtention que d'une solution approchée de la réponse. La difficulté réside alors dans l'évaluation de la qualité de l'approximation. Si les conditions aux limites et le chargement de la structure qui, rappelons-le, est induit par les forces d'inerties dépendant de la distribution des masses, sont tels que le mouvement de la structure s'effectue effectivement de façon préférentielle suivant cette déformée, alors l'approximation sera acceptable, et utile pour l'obtention d'une solution rapide.

Dans les autres cas, l'approximation est médiocre et il convient de décrire la réponse dynamique de la structure par les mouvements d'un nombre, fini ou infini, de points de celle-ci.

Comme on l'a indiqué au chapitre 1, les degrés de liberté d'une structure peuvent être représentés par le déplacement d'un nombre fini de points, ou par l'introduction de coordonnées généralisées représentant les amplitudes d'un nombre spécifié de déformées.

2.2 EQUATION DE L'EQUILIBRE DYNAMIQUE

2.2.1 MASSES CONCENTREES

Rappelons que le nombre de degrés de liberté d'un système est le nombre de composantes du déplacement requises pour exprimer les forces d'inertie se développant dans celui-ci. Ces déplacements sont évalués en un nombre de points de la structure, appelés nœuds où sont

concentrées les masses. Dans le cas le plus général, un nœud possède six mouvements possibles (3 translations et 3 rotations) et le nombre de degrés de liberté du système est égal à $N=6p$ où p est le nombre de nœuds.

La figure 2.1 présente deux exemples de modélisations de structures planes entrant dans ce cadre. Dans le cas du portique à deux travées, les degrés de liberté sont constitués par les déplacements des nœuds situés à l'intersection des poteaux et des poutres, les masses de la structure sont concentrées en ces nœuds. A chaque nœud est affectée la masse des éléments de poteaux et planchers localisés à son voisinage et symbolisés sur la figure 2.1 par le rectangle pointillé pour le nœud central. Si la raideur axiale des poteaux est infinie, les seuls mouvements possibles des nœuds sont la translation horizontale et la rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure, soit un nombre de degrés de liberté égal à $2p=18$.

Si de plus les planchers sont considérés comme infiniment rigides, la cinématique d'un niveau de plancher est décrite par le mouvement d'un de ses points; on aboutit au modèle "brochette" de la figure 6.1b, dans lequel la masse d'un niveau est concentrée en un point et la raideur en flexion-cisaillement des poutres verticales est égale à la somme des raideurs des poteaux d'un niveau. Le nombre de degrés de liberté a été réduit dans le cas présent à $2p=6$.

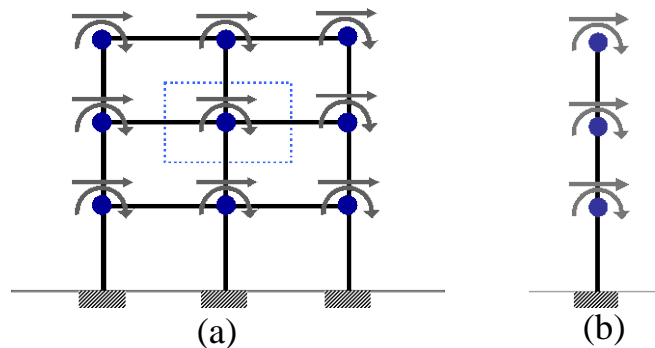


Figure 2.1 : Modélisation en masses concentrées

L'équation d'équilibre dynamique d'un système du type de celui de la figure 2.1 peut être obtenue par la **méthode directe** en écrivant en chaque nœud et pour *chaque degré de liberté* que la résultante des forces est nulle. Ces forces se composent de :

- **forces élastiques \underline{f}_s**
- **forces d'amortissement \underline{f}_D**
- **forces d'inertie \underline{f}_I**
- **forces appliquées extérieures \underline{p}**

L'équilibre général du système s'exprime, pour chaque degré de liberté i :

$$(2.1) \quad f_{Si} + f_{Di} + f_{Ii} = p_i$$

Chacune des forces résistantes (élastiques, d'amortissement ou d'inertie) s'exprime, de façon plus générale, à l'aide de coefficients d'influence traduisant la dépendance de la force en un point sur la valeur du mouvement de tous les autres points.

Ainsi, en supposant que le principe de superposition est valide, et donc que le système est linéaire, la force élastique développée suivant le degré de liberté i s'exprime par :

$$(2.2a) \quad f_{Si} = k_{i1} u_1 + k_{i2} u_2 + \dots = \sum_{j=1}^N k_{ij} u_j$$

soit pour l'ensemble des degrés de liberté, sous la forme matricielle :

$$(2.2b) \quad \underline{\mathbf{F}}_s = \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{U}}$$

Note : dans la suite, les matrices seront représentées par un symbole gras souligné une fois pour les vecteurs et deux fois pour les matrices carrées de dimension $N \times N$.

Le coefficient k_{ij} représente la force qu'il faut appliquer au degré de liberté i pour maintenir son déplacement nul sous l'effet d'un déplacement unité imposé au seul degré de liberté j .

La matrice $\underline{\mathbf{K}}$ représentant l'ensemble des coefficients d'influence k_{ij} est la *matrice de rigidité* du système.

En supposant que les forces d'amortissement sont d'origine visqueuse, et dépendent donc de la vitesse, on peut écrire de façon similaire :

$$(2.3a) \quad f_{Di} = c_{i1} \dot{u}_1 + c_{i2} \dot{u}_2 + \dots = \sum_{j=1}^N c_{ij} \dot{u}_j$$

soit sous forme matricielle :

$$(2.3b) \quad \underline{\mathbf{F}}_D = \underline{\mathbf{C}} \dot{\underline{\mathbf{U}}}$$

Les coefficients c_{ij} sont les coefficients de la *matrice d'amortissement* du système.

Le coefficient c_{ij} représente la force qu'il faut appliquer au degré de liberté i pour maintenir sa vitesse nulle sous l'effet d'une vitesse unité imposée au seul degré de liberté j .

Finalement les forces d'inertie peuvent être exprimées de façon similaire :

$$(2.4a) \quad f_{i1} = m_{i1} \ddot{u}_1 + m_{i2} \ddot{u}_2 + \dots = \sum_{j=1}^N m_{ij} \ddot{u}_j$$

soit sous forme matricielle :

$$(2.4b) \quad \underline{\mathbf{F}}_I = \underline{\mathbf{M}} \underline{\ddot{\mathbf{U}}}$$

La matrice des coefficients m_{ij} est la matrice de masse du système.

Le coefficient m_{ij} représente la force qu'il faut appliquer au degré de liberté i pour maintenir son accélération nulle sous l'effet d'une accélération unité imposée au seul degré de liberté j .

Regroupant les équations (6.2b), (6.3b) et (6.4b), l'équation d'équilibre dynamique du système s'écrit sous forme matricielle :

$$(2.5) \quad \underline{\mathbf{M}} \underline{\ddot{\mathbf{U}}} + \underline{\mathbf{C}} \underline{\dot{\mathbf{U}}} + \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{P}}(t)$$

Les matrices $\underline{\mathbf{M}}$, $\underline{\mathbf{C}}$ et $\underline{\mathbf{K}}$ ont pour dimensions $N \times N$, et les vecteurs $\underline{\mathbf{U}}$ et $\underline{\mathbf{P}}$ pour dimensions N où N représente le nombre de degrés de liberté du système (égal au nombre de nœuds multiplié par le nombre de déplacements possibles du nœud).

2.2.2 COORDONNEES GENERALISEES

Dénotons par $\underline{\mathbf{q}}$ le vecteur des N coordonnées généralisées du système, N étant le nombre de degrés de liberté. On postule que l'énergie cinétique et l'énergie potentielle s'expriment par les formes quadratiques suivantes :

$$(2.6) \quad T = \frac{1}{2} \underline{\dot{\mathbf{q}}}^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\dot{\mathbf{q}}}$$

$$(2.7) \quad V = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{q}}^T \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{q}}$$

Les forces généralisées, qui incluent les forces extérieures et les forces non conservatives, sont représentées par le vecteur $\underline{\mathbf{Q}}$, que par analogie avec l'oscillateur à un degré de liberté, on écrira :

$$(2.8) \quad \underline{\mathbf{Q}} = \underline{\mathbf{P}} - \underline{\mathbf{C}} \underline{\dot{\mathbf{q}}}$$

où $\underline{\mathbf{P}}$ représente les charges appliquées.

Les équations de Lagrange du système (eq. 1.18) s'écrivent :

$$(2.9) \quad \frac{d}{dt}(\underline{\underline{\mathbf{M}}}\dot{\underline{\mathbf{q}}}) + \underline{\underline{\mathbf{K}}}\underline{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{P}} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}\dot{\underline{\mathbf{q}}}$$

soit (2.10)
$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}\ddot{\underline{\mathbf{q}}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}\dot{\underline{\mathbf{q}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}\underline{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{P}}(t)$$

L'équation (2.10) a une structure identique à celle de l'équation (2.5), les inconnues n'étant plus les déplacements des nœuds où sont concentrées les masses, mais les coordonnées généralisées.

L'évaluation des matrices $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ est liée à la discrétisation spatiale du système.

2.3 STRUCTURE ET PROPRIETES DE LA MATRICE DE RIGIDITE

2.3.1 CONSTRUCTION DE LA MATRICE DE RIGIDITE

La définition de la matrice de rigidité (éq. 2.2b) montre que le terme k_{ij} de la matrice est égal à la force qu'il faut appliquer au degré de liberté i pour maintenir son déplacement nul sous l'effet d'un déplacement unitaire appliqué au seul degré de liberté j ; en particulier le terme k_{ii} est égal à la force qu'il faut appliquer au degré de liberté i pour lui imposer un déplacement unitaire tout en maintenant nuls les autres degrés de liberté.

L'exemple de la figure 2.2, constitué de deux masses reliées par des ressorts de raideur k_1 et k_2 , illustre cette définition.

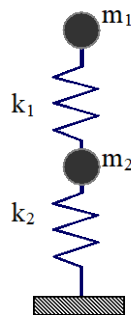


Figure 2.2 : Système masse-ressort à deux degrés de liberté

Le système possède deux degrés de liberté, les déplacements u_1 et u_2 des deux masses. Un déplacement unitaire ($u_1=1$) appliqué à la masse m_1 , en maintenant le déplacement u_2 de la masse m_2 nul, nécessite d'appliquer une force k_1 , à la masse m_1 et $-k_1$ à la masse m_2 . De même, un déplacement unitaire u_2 appliqué à la masse m_2 , tout en maintenant une valeur nulle pour u_1 , nécessite l'application d'une force $-k_1$ à la masse m_1 et (k_1+k_2) à la masse m_2 . Il en résulte la structure de la matrice $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$.

$$(2.11) \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix}$$

Dans le cadre d'une formulation à l'aide des coordonnées généralisées, la construction de la matrice $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ s'appuie sur le principe des puissances virtuelles.

Prenons l'exemple d'une poutre droite dans le cadre d'une formulation en éléments finis. On a vu au chapitre 1 que dans cette modélisation les coordonnées généralisées étaient représentées par les degrés de liberté u_i (translation et rotation) des extrémités de la poutre. En se restreignant à l'étude des déplacements transverses de la poutre, il existe quatre degrés de liberté pour la poutre (déplacements transverses et rotations des deux extrémités de la poutre); le déplacement de tout point de la poutre s'exprime par :

$$(2.12) \quad u(x) = \sum \psi_i(x) u_i$$

où $\psi_i(x)$ sont les fonctions de forme du déplacement qui ne sont pas précisées pour l'instant. $\psi_i(x)$ représente le déplacement transverse de la poutre pour un déplacement unitaire $u_i=1$, et pour u_j ($j \neq i$) = 0.

Considérons une rotation $u_2=1$ de l'extrémité de la poutre (figure 2.3); sous l'effet de cette rotation, la déformée de la poutre est $\psi_2(x)$ et le moment qui s'y développe vaut :

$$(2.13) \quad M(x) = EI(x) \psi_2''(x)$$

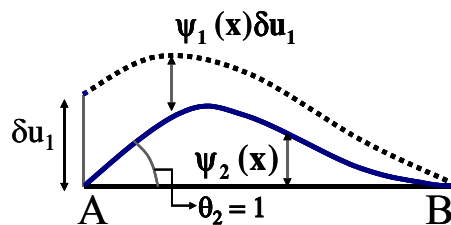


Figure 2.3 : Principe des puissances virtuelles pour la poutre

Pour calculer par exemple le terme k_{12} de la matrice de rigidité, on applique un champ de vitesse virtuelle $\hat{\underline{\mathbf{u}}}^T = \{\hat{u}_1, 0, 0, 0\}$; soit $\underline{\mathbf{P}}$ le vecteur des efforts appliqués aux degrés de liberté résultant de l'application de la déformée $\psi_2(x)$.

La puissance des efforts extérieurs dans le champ de vitesse virtuelle $\hat{\underline{\mathbf{u}}}$ vaut :

$$(2.14) \quad P_e(\hat{\underline{\mathbf{u}}}) = \underline{\mathbf{P}}^T \hat{\underline{\mathbf{u}}} = p_1 \hat{u}_1$$

Par suite de la définition donnée ci-dessus du terme k_{21} , il en résulte que :

$$(2.15) \quad p_1 = k_{21}$$

La puissance des efforts intérieurs, en négligeant la contribution de l'effort tranchant (poutre en flexion), s'écrit :

$$(2.16) \quad P_i(\hat{\underline{\mathbf{u}}}) = -\int_0^L M(x) d\hat{\mathcal{R}}$$

où $\hat{\mathcal{R}}$ est la vitesse de rotation virtuelle associée à \hat{u}_1 . Par définition de $\psi_1(x)$, la vitesse virtuelle \hat{u}_1 , induit en tout point de la poutre une vitesse $\psi_1(x)\hat{u}_1$ et donc une vitesse de rotation $\hat{\mathcal{R}} = \psi_1'(x)\hat{u}_1 \Rightarrow d\hat{\mathcal{R}} = \psi_1''(x)\hat{u}_1 dx$. L'équation (6.16) devient en tenant compte de (2.13) :

$$(2.17) \quad P_i(\hat{\underline{\mathbf{u}}}) = -\int_0^L EI(x)\psi_1''(x)\psi_2''(x)\hat{u}_1 dx$$

La puissance des quantités d'accélération étant nulle (problème statique), le principe des puissances virtuelles s'écrit :

$$(2.18) \quad P_e(\hat{\underline{\mathbf{u}}}) + P_i(\hat{\underline{\mathbf{u}}}) = 0$$

valable pour tout champ de vitesse virtuelle $\hat{\underline{\mathbf{u}}}$; il en résulte :

$$(2.19) \quad k_{21} = \int_0^L EI(x)\psi_1''(x)\psi_2''(x) dx$$

De façon générale, le terme k_{ij} de la matrice de rigidité s'obtient par :

$$(2.20) \quad k_{ij} = \int_0^L EI(x)\psi_i''(x)\psi_j''(x) dx$$

2.3.2 EXEMPLE : POUTRE DROITE

Les fonctions $\psi_i(x)$ s'obtiennent aisément à partir de la résistance des matériaux. Rappelons que $\psi_1(x)$ (respectivement $\psi_3(x)$) représente la déformée de la poutre pour un déplacement unitaire du nœud A (respectivement B), les autres degrés de liberté étant maintenus égaux à 0. De même $\psi_2(x)$ (respectivement $\psi_4(x)$) représente la déformée de la poutre sous l'action d'une rotation unitaire du nœud A (respectivement B), les autres degrés de liberté étant maintenus égaux à 0 (figure 6.4).

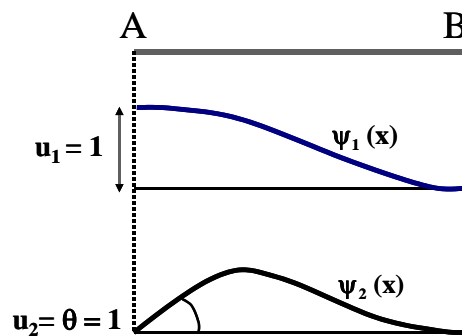


Figure 2.4 : Fonctions de forme de la poutre droite

$$(2.21a) \quad \psi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$(2.21b) \quad \psi_2(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$$

$$(2.21c) \quad \psi_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$(2.21d) \quad \psi_4(x) = -x\left(\frac{x}{L}\right)\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Le déplacement d'un point quelconque de la poutre s'obtient alors par (2.12) où u_1 , u_3 représentent les déplacements transverses des nœuds A et B, u_2 et u_4 les rotations de ces mêmes nœuds. L'équation différentielle du mouvement de la poutre prend la forme (2.10) dans laquelle $\underline{\mathbf{q}}^T = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

L'application de l'équation (2.20) permet alors de calculer les éléments de la matrice de rigidité qui, dans le cas d'une inertie constante, prend la forme :

$$(2.22) \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}} = \frac{12EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{2} & -1 & \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{6} \\ -1 & -\frac{L}{2} & 1 & -\frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{6} & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} \end{bmatrix}$$

2.3.3 PROPRIETES DE LA MATRICE $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$

L'énergie élastique emmagasinée dans la structure sous l'action d'un champ de forces $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ appliqué aux degrés de liberté du système est une quantité positive qui vaut :

$$(2.23) \quad V = \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{U}}}^T \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i u_i$$

En tenant compte de la définition de la matrice de rigidité (eq. 6.2b), l'énergie élastique s'exprime également par :

$$(2.24) \quad V = \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{U}}}^T \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{U}}}$$

Cette quantité étant positive, il s'ensuit que la matrice $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ est *définie positive*. Elle possède donc une inverse, appelée *matrice de flexibilité* :

$$(2.25) \quad \underline{\underline{\mathbf{S}}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{-1}$$

Par ailleurs, la matrice $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ est *symétrique*. Ce résultat, évident pour l'élément de poutre comme le montre l'équation (6.20), peut être obtenu de façon plus générale par application du théorème de Betti. Ce théorème exprime le résultat suivant : soit deux champs de forces $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_1$ et $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_2$ induisant des champs de déplacements $\underline{\underline{\mathbf{U}}}_1$ et $\underline{\underline{\mathbf{U}}}_2$, alors le travail de $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_1$ dans le champ $\underline{\underline{\mathbf{U}}}_2$ est égal au travail de $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_2$ dans le champ $\underline{\underline{\mathbf{U}}}_1$.

$$(2.26) \quad \underline{\underline{\mathbf{P}}}_1^T \underline{\underline{\mathbf{U}}}_2 = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_2^T \underline{\underline{\mathbf{U}}}_1$$

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} m_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & m_i & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & m_n \end{bmatrix}$$

Si par contre pour la modélisation on adopte une formulation en coordonnées généralisées, il en résulte un couplage entre degrés de liberté et une structure bande analogue à celle de la matrice de rigidité.

Avec ce choix de modélisation, la construction de la matrice masse $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ procède comme celle de la matrice de rigidité en appliquant le principe des puissances virtuelles aux forces d'inertie.

Reprenons l'exemple du paragraphe 3.1 et de la figure 2.3 : pour une accélération angulaire instantanée $\ddot{u}_2 = 1$ du point A et en retenant pour distribution des accélérations le long de la poutre la même fonction $\psi_2(x)$ que celle utilisée pour les déplacements, la puissance des efforts extérieurs, dans le champ de vitesse virtuelle $\hat{\mathbf{u}} = \{\hat{u}_1, 0, 0, 0\}$, vaut :

$$(2.29) \quad P_e(\hat{\mathbf{u}}) = \underline{\mathbf{P}}^T \hat{\mathbf{u}} = p_1 \hat{u}_1$$

qui par définition est égale à $m_{21} \hat{u}_1$

La puissance des efforts intérieurs est nulle car la poutre "n'a pas le temps de se déformer" et la puissance des quantités d'accélération vaut :

$$(2.30) \quad A(\hat{\mathbf{u}}) = \int_0^L m(x) \psi_2(x) \psi_1(x) \hat{u}_1 dx$$

Le principe des puissances virtuelles conduit à :

$$(2.31) \quad m_{21} = \int_0^L m(x) \psi_2(x) \psi_1(x) dx$$

De façon plus générale, le terme m_{ij} vaut :

$$(2.32) \quad m_{ij} = \int_0^L m(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx$$

Tout comme la matrice de rigidité, la matrice de masse est *définie positive et symétrique*. Cette propriété résulte de la positivité de l'énergie cinétique $T = \frac{1}{2} \dot{\underline{U}}^T \underline{\underline{M}} \dot{\underline{U}}$ et de l'application du théorème de Betti aux forces d'inertie.

On notera que la construction d'une matrice de masse consistante est plus laborieuse que celle de la matrice de masses concentrées; d'un point de vue numérique, on introduit une complication supplémentaire dans le traitement des équations sans que le gain en précision soit nécessairement significatif. Aussi bien souvent, dans la pratique, on privilégie l'utilisation d'une matrice masse diagonale.

2.5 VIBRATIONS LIBRES NON AMORTIES

2.5.1 EXEMPLE

Considérons le portique plan de la figure 2.5 pour lequel on admettra que les planchers sont infiniment rigides dans leur plan pour autoriser la modélisation de la structure par un modèle brochette. Supposons de plus, à titre de simplification, que les poteaux possèdent une grande raideur axiale et de flexion. Dans ces conditions, les seuls déplacements possibles des nœuds sont les translations horizontales (figure 2.5b). Le système de la figure 2.5 possède trois degrés de liberté (3 nœuds x 1 déplacement possible). Avec les valeurs de raideur des poteaux et de masses indiquées sur la figure 2.5, les matrices masse et rigidité du système s'écrivent :

$$(2.33) \quad \underline{\underline{K}} = 600 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

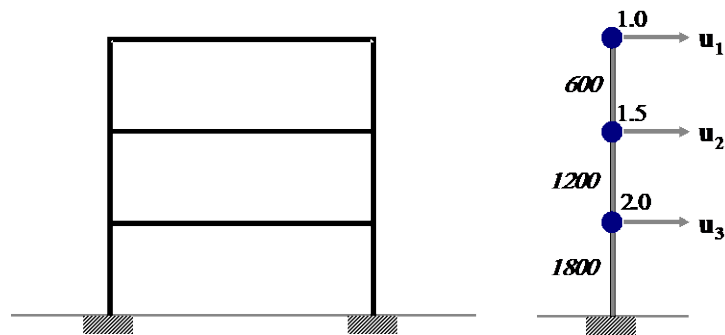


Figure 2.5 : a) portique plan b) modélisation brochette

Si on impose au portique de la figure 2.5 un déplacement initial au nœud 1 et que de cette position initiale on relâche le système, celui-ci entre en vibration. La variation dans le temps du déplacement du nœud intermédiaire, par exemple, prend l'allure indiquée sur la figure 2.6.

Cette vibration se poursuit indéfiniment dans le temps et, contrairement au cas de l'oscillateur à un degré de liberté, la vibration du système n'est plus sinusoïdale et ne présente pas de périodicité (comme cela est démontré par l'équation 2.41).

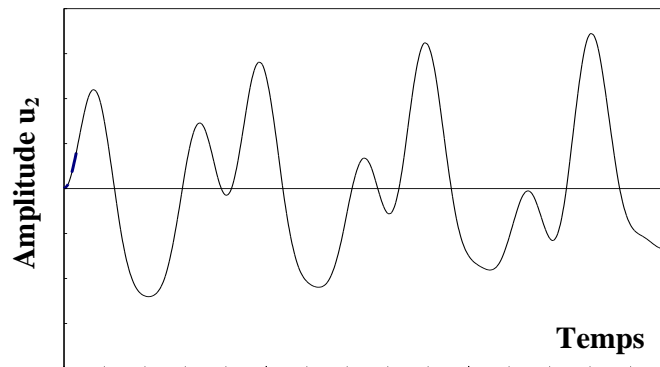


Figure 6.6 : Vibration libre du portique de la figure 2.5

2.5.2 FREQUENCES PROPRES ET MODES PROPRES

La vibration libre du système est solution de l'équation (2.5), ou (2.10), dans laquelle le terme d'amortissement est pris égal à 0 et les forces extérieures appliquées sont nulles :

$$(2.34) \quad \underline{\underline{\mathbf{M}}} \ddot{\underline{\underline{\mathbf{U}}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{U}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

Une solution particulière de ce système d'équations différentielles est de la forme :

$$(2.35) \quad \underline{\underline{\mathbf{U}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}} \sin(\omega t + \theta)$$

Reportant (2.35) dans (2.34), il vient :

$$(2.36) \quad \underline{\underline{[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]}} \underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

Le système matriciel (2.36) n'a de solution non triviale ($\underline{\underline{\mathbf{D}}} \neq \underline{\underline{\mathbf{0}}}$) que si, et seulement si, son déterminant est nul.

$$(2.37) \quad \det \underline{\underline{[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]}} = 0$$

Les matrices $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ étant définies positives, il en résulte que l'équation (2.37) possède N racines réelles ω_i^2 où N est la dimension des matrices $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$, c'est-à-dire le nombre de degrés de liberté du système. Ces racines sont les valeurs propres du système (2.36).

On nomme *fréquence propre* du système les quantités :

$$(2.38) \quad f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$$

qui sont au nombre de N. La plus faible fréquence f_1 est dénommée fréquence fondamentale, f_2 fréquence d'ordre 2, etc.....

A chaque valeur propre ω_i^2 est associé un vecteur propre $\underline{\underline{\mathbf{D}}}_i$, solution de l'équation :

$$(2.39) \quad [\underline{\underline{\mathbf{K}}} - \omega_i^2 \underline{\underline{\mathbf{M}}}] \underline{\underline{\mathbf{D}}}_i = \mathbf{0}$$

qui du fait que ω_i^2 est valeur propre du système est non nul et défini à une constante multiplicative près :

$$(2.40) \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}}_i^T = \{d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n\}$$

Le système possède N vecteurs propres associés aux valeurs propres. Ces vecteurs propres sont appelés *modes propres* du système.

La solution générale de l'équation (2.36) s'écrit alors :

$$(2.41) \quad \underline{\underline{\mathbf{U}}} = \sum_{i=1}^N a_i \underline{\underline{\mathbf{D}}}_i \sin(\omega_i t + \theta_i)$$

où les constantes a_i et θ_i sont déterminées par les conditions initiales et les $\underline{\underline{\mathbf{D}}}_i$ sont définis à une constante multiplicative près.

2.5.3 CONDITIONS INITIALES

Les constantes a_i et θ_i qui sont déterminées par les conditions initiales (déplacement $\underline{\underline{\mathbf{U}}}(0)$ et vitesse $\dot{\underline{\underline{\mathbf{U}}}}(0)$) sont calculées à partir de l'équation (6.41) :

$$(2.42a) \quad \underline{\underline{\mathbf{U}}}(0) = \sum_{i=1}^N a_i \sin(\theta_i) \underline{\underline{\mathbf{D}}}_i$$

$$(2.42b) \quad \underline{\dot{U}}(0) = \sum_{i=1}^N a_i \omega_i \cos(\theta_i) \underline{D}_i$$

Le système d'équations (6.42a), respectivement (6.42b), constitue un système linéaire de N équations à N inconnues $x_i = a_i \sin\theta_i$, respectivement $y_i = a_i \cos\theta_i$. Il en résulte :

$$(2.43) \quad a_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \quad , \quad \theta_i = \text{Arctg}(x_i/y_i)$$

2.5.4 PROPRIETES DES MODES PROPRES

Les modes propres, solutions de l'équation (2.39), possèdent la propriété fondamentale d'être orthogonaux 2 par 2 par rapport aux matrices de masse et de rigidité.

$$(2.44a) \quad \underline{D}_m^T \underline{M} \underline{D}_n = c \delta_{mn}$$

$$(2.44b) \quad \underline{D}_m^T \underline{K} \underline{D}_n = c' \delta_{mn}$$

où δ_{mn} est le symbole de Kronecker ($\delta_{mn} = 1$ si $m = n$, $=0$ si $m \neq n$), c et c' deux constantes.

La démonstration de la relation (2.44a) s'obtient par application du théorème de Betti aux forces d'inertie. Les forces d'inertie \underline{f}_{In} (respectivement \underline{f}_{Im}) engendrent les déplacements \underline{D}_n (respectivement \underline{D}_m), donc :

$$(2.45) \quad \underline{f}_{Im}^T \underline{D}_n = \underline{f}_{In}^T \underline{D}_m$$

Par définition des forces d'inertie

$$(2.46a) \quad \underline{f}_{Im}^T \underline{D}_n = -\omega_m^2 [\underline{M} \underline{D}_m]^T \underline{D}_n = -\omega_m^2 \underline{D}_m^T \underline{M} \underline{D}_n$$

$$(2.46b) \quad \underline{f}_{In}^T \underline{D}_m = -\omega_n^2 [\underline{M} \underline{D}_n]^T \underline{D}_m = -\omega_n^2 \underline{D}_n^T \underline{M} \underline{D}_m$$

Par soustraction des équations (2.46a) et (2.46b) et en transposant la deuxième équation, il vient :

$$(2.47) \quad (\omega_n^2 - \omega_m^2) \underline{D}_m^T \underline{M} \underline{D}_n = 0$$

lorsque ω_n est différent de ω_m , la propriété (2.44a) en découle. La propriété (2.44b) s'obtient en notant que $\underline{\underline{D}}$ étant solution de (2.36) :

$$(2.48) \quad \omega_n^2 \underline{\underline{M}} \underline{\underline{D}}_n = \underline{\underline{K}} \underline{\underline{D}}_n$$

soit en prémultipliant par $\underline{\underline{D}}_m^T$

$$(2.49) \quad \omega_n^2 \underline{\underline{D}}_m^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{D}}_n = \underline{\underline{D}}_m^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{D}}_n$$

ce qui compte tenu de (2.42a) achève la démonstration.

La propriété d'orthogonalité des modes propres permet d'exprimer les pulsations propres ω_i en fonction des modes propres : reprenant l'équation (2.39) et prémultipliant par $\underline{\underline{D}}_j^T$, il vient du fait de (6.44) :

$$(2.50) \quad \omega_i^2 = \frac{\underline{\underline{D}}_i^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{D}}_i}{\underline{\underline{D}}_i^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{D}}_i}$$

2.5.5 NORMALISATION DES MODES PROPRES

Les modes propres sont définis à une constante multiplicative près. Cette constante peut être choisie de façon que :

- le déplacement d'un nœud particulier, par exemple le nœud 1 du portique de la figure 2.5, soit toujours égal à 1 dans tous les modes;
- le plus grand déplacement d'un nœud dans le mode considéré soit égal à 1;
- les modes propres soient normalisés par rapport à la matrice $\underline{\underline{K}}$ ou à la matrice $\underline{\underline{M}}$

$$(2.52) \quad \underline{\underline{D}}_i^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{D}}_i = 1, \quad \underline{\underline{D}}_i^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{D}}_i = 1$$

Dans les programmes de calculs éléments finis, c'est généralement cette dernière méthode qui est retenue et le plus souvent la normalisation est effectuée par rapport à la matrice de masse.

2.5.6 EXEMPLE D'APPLICATION

Reprenant le portique de la figure 2.5, les fréquences propres du système sont solutions de :

$$\det \begin{bmatrix} 600 - \omega^2 & -600 & 0 \\ -600 & 1800 - 1.5\omega^2 & -1200 \\ 0 & -1200 & 3000 - 2\omega^2 \end{bmatrix}$$

soit

$$\omega_1 = 14.5 \text{ rad/s} \quad , \quad \omega_2 = 31.1 \text{ rad/s} \quad , \quad \omega_3 = 46.1 \text{ rad/s}$$

Les modes propres sont obtenus comme solutions de l'équation (2.39). Ils sont dessinés sur la figure 2.7 en normant le déplacement du nœud au sommet à 1. dans tous les modes.

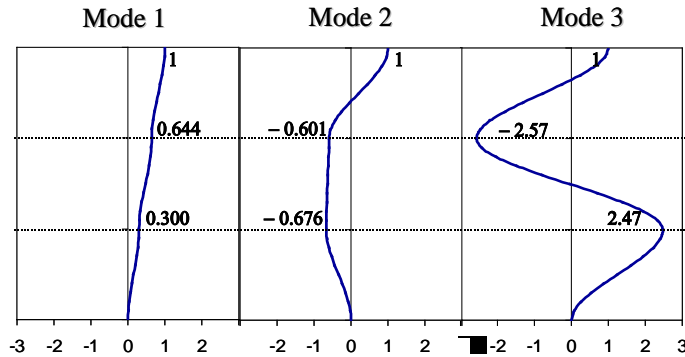


Figure 2.7 : Modes propres du portique

La réponse temporelle du système, causée par l'application d'un déplacement initial, d'amplitude $\underline{d} = [0.5 \quad 0.5 \quad 0.5]^T$, et d'une vitesse initiale nulle correspond à la somme des réponses de chaque mode (équation 2.41). Elle est représentée sur la figure 2.8.

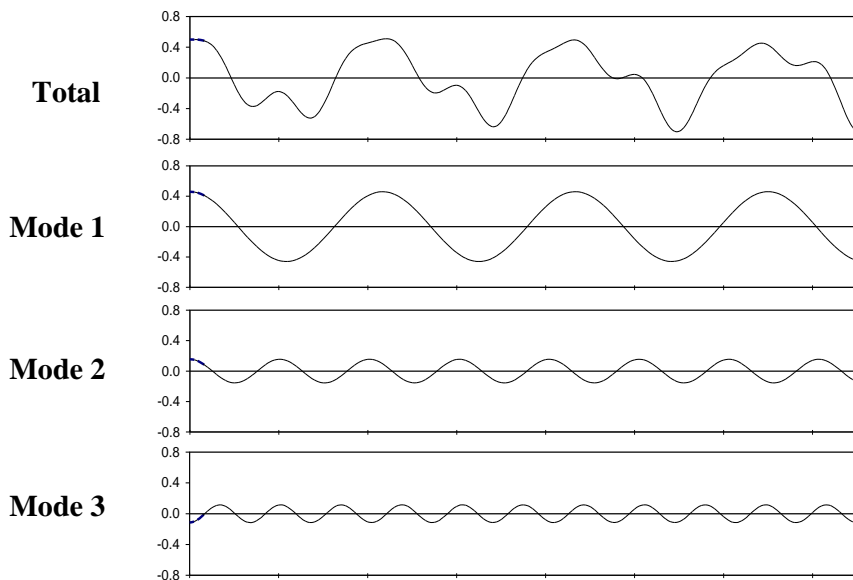


Figure 2.8 : Vibration libre du portique de la figure 2.5 (nœud 2)

2.5.7 CONCLUSIONS

On retiendra qu'un système à N degrés de liberté possède N fréquences propres réelles et N modes propres associés.

Ces modes propres constituent une base orthogonale complète. La base des modes propres, dénommée *base modale*, permet donc d'exprimer un déplacement quelconque du système en fonction des déformées modales.

2.6 VIBRATIONS FORCÉES NON AMORTIES

2.6.1 DECOUPLAGE DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

L'équation générale du mouvement (eq. 2.5) se réduit en l'absence de termes d'amortissement à :

$$(2.52) \quad \underline{\underline{M}} \ddot{\underline{U}} + \underline{\underline{K}} \underline{U} = \underline{P}(t)$$

Du fait de la structure **non diagonale de la matrice $\underline{\mathbf{K}}$** , et bien que la matrice **$\underline{\mathbf{M}}$ puisse souvent être considérée comme diagonale**, il existe un couplage entre les degrés de liberté du système : l'équation de rang i du système (2.52) fait intervenir non seulement le degré de liberté u_i mais également des degrés de liberté u_k ($k \neq i$).

L'exemple du portique de la figure 2.5 illustre ce couplage. Les matrices de masse et de rigidité du portique sont données par l'équation (2.33) et la forme développée de (2.52) devient :

$$(2.53) \quad \begin{cases} \ddot{u}_1 + 600(u_1 - u_2) = p_1 \\ 1.5\ddot{u}_2 + 600(-u_1 + 3u_2 - 2u_3) = p_2 \\ 2\ddot{u}_3 + 600(-2u_2 + 5u_3) = p_3 \end{cases}$$

Afin de découpler les équations (2.52), on utilise la propriété d'orthogonalité des modes propres. La base des modes propres constitue une base orthogonale complète qui permet d'exprimer tout déplacement $\underline{\mathbf{U}}$ sur cette base :

$$(2.54) \quad \underline{\mathbf{U}} = \sum_{i=1}^N \underline{\mathbf{D}}_i y_i(t)$$

où $y_i(t)$ joue le rôle de coordonnée généralisée et $\underline{\mathbf{D}}_i$ le rôle de fonction de forme du déplacement. Ainsi dans l'exemple du paragraphe 5.5, $y_i(t)$ représente le déplacement du sommet puisque $\underline{\mathbf{D}}_i$ a été normé pour valoir 1 au point 1.

Reportant l'équation (2.54) dans (2.52), prémultipliant par $\underline{\mathbf{D}}_j^T$ les deux membres de l'équation, il vient :

$$(2.55) \quad \underline{\mathbf{D}}_j^T \underline{\mathbf{M}} \sum_{i=1}^N \underline{\mathbf{D}}_i \ddot{y}_i(t) + \underline{\mathbf{D}}_j^T \underline{\mathbf{K}} \sum_{i=1}^N \underline{\mathbf{D}}_i y_i(t) = \underline{\mathbf{D}}_j^T \underline{\mathbf{P}}$$

Tenant alors compte de la propriété d'orthogonalité (2.44), l'équation (2.55) se réduit à :

$$(2.56) \quad \underline{\mathbf{D}}_j^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{D}}_j \ddot{y}_j(t) + \underline{\mathbf{D}}_j^T \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{D}}_j y_j(t) = \underline{\mathbf{D}}_j^T \underline{\mathbf{P}} \quad , \quad j = 1, \dots, N$$

Définissant les quantités suivantes :

- masse généralisée $m_j = \underline{\mathbf{D}}_j^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{D}}_j$
- rigidité généralisée $k_j = \underline{\mathbf{D}}_j^T \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{D}}_j$
- chargement généralisé $p_j = \underline{\mathbf{D}}_j^T \underline{\mathbf{P}}$

l'équation (2.56) s'écrit :

$$(2.57) \quad \ddot{y}_j(t) + \omega_j^2 y_j(t) = \frac{p_j(t)}{m_j} \quad , \quad j = 1, \dots, N$$

dans laquelle on a posé :

$$(2.58) \quad \omega_j^2 = \frac{k_j}{m_j}$$

Sous la forme (2.57) on reconnaît l'équation d'équilibre dynamique de l'oscillateur simple à un degré de liberté.

Ainsi, l'utilisation de la base modale a permis la transformation du système (2.52) de N équations différentielles couplées en N équations différentielles découplées (éq. 2.57, avec $j=1, \dots, N$). La solution y_i de chacune de ces équations est obtenue par les techniques exposées au chapitre 3 (intégrale de Duhamel, transformation de Fourier) et la solution générale est donnée par l'équation (2.54).

2.6.2 EXEMPLE

Les modes du portique de la figure 2.5 ont été déterminés au paragraphe 5.5. Décomposant les déplacements u_i ($i=1, \dots, 3$), sur cette base modale, on obtient :

$$(2.59) \quad \begin{cases} u_1(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) \\ u_2(t) = 0.644 y_1(t) - 0.601 y_2(t) - 2.57 y_3(t) \\ u_3(t) = 0.300 y_1(t) - 0.676 y_2(t) + 2.47 y_3(t) \end{cases}$$

Les grandeurs généralisées m_i et k_i valent :

$m_1=1.802$	$m_2=2.456$	$m_3=23.109$
$k_1=380.045$	$k_2=2367.227$	$k_3=49110.480$

En reportant (2.59) dans (2.53), on aboutit au système d'équations différentielles suivant :

$$(2.60) \quad \begin{cases} \ddot{y}_1(t) + 210.902 y_1(t) = p_1(t)/1.802 \\ \ddot{y}_2(t) + 963.855 y_2(t) = p_2(t)/2.456 \\ \ddot{y}_3(t) + 2125.167 y_3(t) = p_3(t)/23.109 \end{cases}$$

Le système (2.60) traduit les mêmes équations d'équilibre que le système (2.53) mais sa structure est infiniment moins complexe : chaque inconnue y_i n'apparaît que dans une seule équation alors que les u_i apparaissent dans plusieurs équations.

2.6.3 CALCUL DES EFFORTS

Une fois les déplacements U déterminés, les efforts dans la structure s'obtiennent par :

$$(2.61) \quad \underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{U}}$$

soit pour chaque mode propre :

$$(2.62) \quad \underline{\mathbf{F}}_j = \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{U}}_j = \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{D}}_j y_j(t)$$

Tenant compte du fait que $\underline{\mathbf{D}}_j$ est un vecteur propre (éq. 2.36) :

$$(2.63) \quad \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{D}}_j = \omega_j^2 \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{D}}_j$$

et (2.62) peut également s'écrire :

$$(2.64) \quad \underline{\mathbf{F}}_j = \omega_j^2 \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{D}}_j y_j(t) \quad , \quad j = 1, N$$

Sous cette forme on reconnaît que la force $\underline{\mathbf{F}}_j$ est le produit d'une masse par une quantité qui a la dimension d'une accélération.

Du fait de la structure (souvent) diagonale de la matrice $\underline{\mathbf{M}}$, la formulation (2.64) est préférable à la formulation (2.61) car elle nécessite moins d'opérations : la force au degré de liberté i dans le mode j s'écrit simplement :

$$(2.65) \quad f_{ij} = \omega_j^2 \left(\sum_{k=1}^N m_{ik} d_{kj} \right) y_j(t) = \omega_j^2 m_{ii} d_{ij} y_j(t)$$

La résultante globale des efforts résulte de la superposition de tous les modes :

$$(2.66) \quad \underline{\mathbf{F}} = \sum_{j=1}^N \underline{\mathbf{F}}_j = \sum_{j=1}^N \omega_j^2 \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{D}}_j y_j(t)$$

2.7 VIBRATIONS FORCÉES AMORTIES

2.7.1 GENERALITES

Le mouvement est régi par l'équation générale (2.5). Utilisant la décomposition sur la base modale définie par (2.54) et tenant compte des propriétés d'orthogonalité des modes, l'équation (6.5) se réduit au système de N équations différentielles :

$$(2.67) \quad m_j \ddot{y}_j(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{D}_j^T \underline{\underline{\mathbf{C}}} \mathbf{D}_i \dot{y}_i(t) + k_j y_j(t) = p_j(t) \quad , \quad j = 1, \dots, N$$

A moins de faire une hypothèse sur la structure de la matrice d'amortissement $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$, les équations (2.67) ne sont plus découplées et la décomposition sur la base modale perd de son intérêt. La résolution des équations (2.5), ou (2.67), nécessite une connaissance de cette matrice d'amortissement.

Sous le terme matrice d'amortissement, on a coutume de désigner tous les phénomènes de dissipation d'énergie que l'on représente dans l'analyse par un amortissement visqueux équivalent (chapitre 3). Dans une structure, cette dissipation d'énergie provient de l'ouverture/fermeture de microfissures, de frottements développés aux liaisons de différents éléments de la structure, de la déformation des éléments secondaires généralement non modélisés, du frottement aux interfaces structure principale - éléments secondaires, du comportement anélastique dans les matériaux lié à l'amplitude des déformations induites. Cette simple énumération, non exhaustive, suffit à indiquer qu'il n'est pas envisageable de construire la matrice d'amortissement à partir des propriétés géométriques et mécaniques de la structure.

Deux alternatives s'offrent à l'analyste :

- mesurer la dissipation d'énergie dans la structure soumise à des chargements cycliques et la traduire en termes de matrice d'amortissement équivalent,
- estimer a priori "l'amortissement" de la structure.

Ces différentes alternatives et leurs conséquences sur le traitement des équations (2.5) sont examinées ci-après.

2.7.2 DECOUPLAGE DES EQUATIONS

Si l'on fait l'hypothèse que les modes propres possèdent les mêmes propriétés d'orthogonalité par rapport à la matrice d'amortissement que par rapport aux matrices de masse et de rigidité, alors l'équation (2.67) se simplifie en :

$$(2.68) \quad \ddot{y}_j(t) + 2\xi_j \omega_j \dot{y}_j(t) + \omega_j^2 y_j(t) = \frac{p_j(t)}{m_j}, \quad j = 1, \dots, N$$

dans laquelle on a posé par analogie avec le cas de l'oscillateur simple à 1 degré de liberté :

$$(2.69) \quad \xi_j = \frac{c_j}{2m_j \omega_j}$$

La solution des N équations différentielles (2.68) peut alors être obtenue par les méthodes exposées au chapitre 2 pour l'oscillateur simple (intégrale de Duhamel, transformation de Fourier). Une fois les y_i déterminés, la réponse générale de la structure s'obtient par l'équation (2.54).

Pour aboutir aux équations (2.68), une hypothèse forte a été faite sur la structure de la matrice $\underline{\underline{C}}$. Avec cette hypothèse, les seules données nécessaires pour l'analyse sont constituées des pourcentages d'amortissement critique équivalent ξ_j dans chaque mode; cette quantité est communément désignée sous le terme *d'amortissement modal*.

L'amortissement modal peut être mesuré sur la structure ou plus habituellement calculé sur la base des amortissements équivalents des matériaux constitutifs.

2.7.2.1 MESURE DE L'AMORTISSEMENT MODAL

La bibliothèque Millikan, sur le campus de l'université de Caltech (Californie), fournit un exemple de mesures de l'amortissement sur une structure réelle.

Cet ouvrage a été sollicité à l'aide de vibreurs harmoniques convenablement disposés sur sa hauteur pour exciter son mode fondamental. Par ailleurs, on dispose sur le même ouvrage d'enregistrements accélérométriques recueillis lors de deux séismes l'ayant sollicité : séisme de Lytle Creek de magnitude 5.4 et d'accélération maximale au sol égale à 0.05g; séisme de San Fernando de magnitude 6.4 et d'accélération maximale au sol égale à 0.20g.

La figure 2.9 présente, pour l'excitation par vibreur, la réponse en accélération au sommet de l'immeuble en fonction de la fréquence d'excitation des vibreurs. L'enregistrement fait clairement apparaître un pic marqué à la fréquence de 1.49 Hz correspondant à la fréquence du mode fondamental.

Pour le mode fondamental de vibration, la structure répond comme un oscillateur à un degré de liberté pour lequel les résultats du chapitre 3 sont applicables. Une méthode d'identification inverse permet alors de déterminer le pourcentage d'amortissement critique reproduisant au mieux la courbe de la figure 2.9. La valeur obtenue est donnée dans le tableau 2.1.

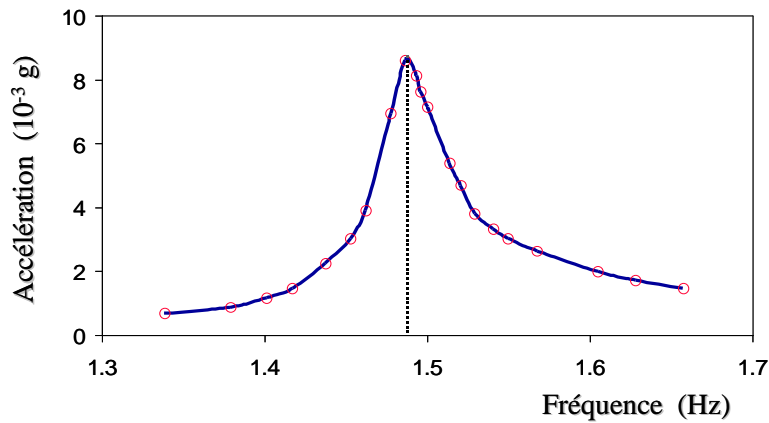


Figure 2.9 : Vibrations harmoniques forcées de la bibliothèque Millikan

La figure 2.10 présente pour le séisme de San Fernando les accélérations enregistrées à la base et au sommet de l'ouvrage, à partir desquelles le déplacement différentiel sur la hauteur peut être calculé (figure 2.10, haut). En reproduisant des résultats analogues à plusieurs niveaux, il est possible d'identifier les deux premiers modes de vibration de l'ouvrage et de calculer le pourcentage d'amortissement critique associé à chacun de ces modes. Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau 2.1.

Le tableau 2.1 fait apparaître des résultats importants, qui ont une portée plus générale que ceux relatifs à cet ouvrage : la période du mode fondamental croît lorsque l'amplitude de la sollicitation augmente depuis l'excitation par vibreur jusqu'au séisme le plus fort. Corrélativement l'amortissement du mode fondamental croît de 1% à 7%. On constate également que l'amortissement modal n'est pas constant et peut être plus élevé ou plus faible sur le deuxième mode que sur le premier.

Ces mesures confirment en particulier que l'amortissement dépend de l'amplitude de la déformation, par suite de non-linéarités plus prononcées se développant dans l'ouvrage.

San Fernando - Composante EW

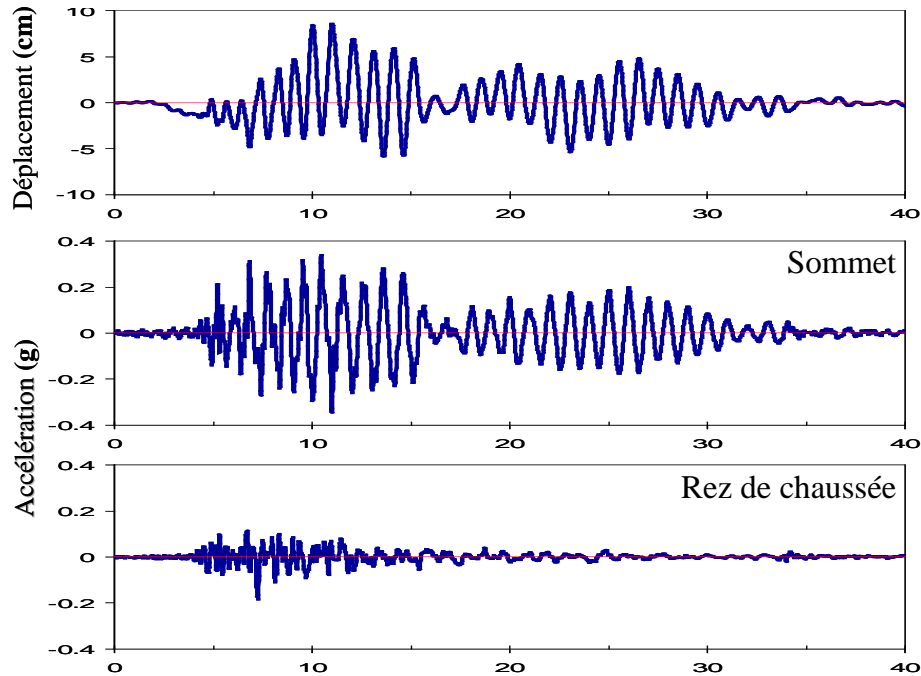


Figure 2.10 : Réponse sismique de la bibliothèque Millikan

Excitation	Accélération Toit (g)	Mode fondamental		Second mode	
		Période (s)	Amortissement (%)	Période (s)	Amortissement (%)
Générateur Vibrations	3.10^{-3} à 17.10^{-3}	0.66 - 0.68	0.7 - 1.5	-	-
Lytle Creek	0.035	0.71	2.2	0.18	3.6
San Fernando	0.348	0.98	7.0	0.20	5.9

Tableau 2.1 : Bibliothèque Millikan - Amortissements mesurés

2.7.2.2 VALEURS CARACTERISTIQUES D'AMORTISSEMENT

Hormis des cas exceptionnels comme celui de la bibliothèque Millikan, on ne dispose pas de mesures de l'amortissement sur l'ouvrage à l'étudier. L'analyste doit s'en remettre à son propre jugement ou à des valeurs conventionnelles publiées par voie réglementaire. Ces valeurs sont généralement rattachées à un type de matériau (béton, acier, bois...). Le tableau 2.2 présente un tel ensemble de valeurs dans lequel une distinction a été introduite en fonction du niveau de sollicitation atteint dans l'ouvrage.

Matériau	Déformation	
	< 0.5 limite élastique	Voisinage limite élastique
Béton armé	3 - 5	7 - 10
Béton précontraint	2 - 3	7 - 10
Acier soudé	2 - 3	5 - 7
Acier boulonné	5 - 7	10 - 15
Bois cloué	5 - 7	15 - 20

Tableau 2.2 : Valeurs caractéristiques d'amortissement (en pourcentages)

6.7.3 AMORTISSEMENT NON CLASSIQUE

Certains systèmes conduisent à des valeurs d'amortissement très contrastées entre les différentes parties de l'ouvrage. Cette situation se rencontre par exemple pour l'étude des phénomènes d'interaction sol-structure ou fluide-structure (figure 2.11). Généralement les structures présentent des pourcentages d'amortissement équivalents relativement faibles, de l'ordre de quelques pourcents (tableau 2.2), alors que le milieu avec lequel elles interagissent peut présenter des amortissements élevés (cas du sol où la valeur peut atteindre plusieurs dizaines de pourcents) ou du fluide dans lequel il est au contraire très faible (inférieur à 1 %).

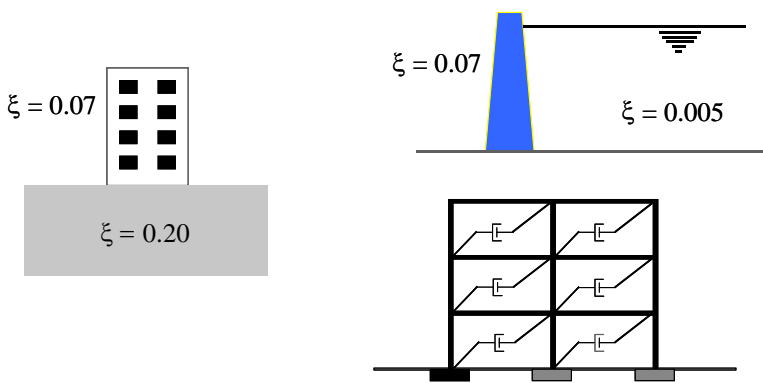


Figure 2.11 : Systèmes à amortissement contrasté

Dans le même ordre d'idée, l'utilisation d'amortisseurs concentrés conduit également à des valeurs contrastées de l'amortissement entre les différentes parties du système. Cette technique est utilisée par exemple pour l'isolation vibratoire des machines vibrantes, la conception ou le renforcement de structures en zone sismique, l'idée étant d'accroître la dissipation d'énergie et donc de limiter la part de l'énergie communiquée à l'ouvrage.

Lorsqu'une structure est composée d'un assemblage de plusieurs matériaux, l'usage veut que l'amortissement modal équivalent soit calculé au prorata de l'énergie élastique de déformation E_i emmagasinée dans chacun des matériaux.

$$(2.70) \quad \xi_{\text{eq}} = \frac{\sum \xi_i E_i}{\sum E_i}$$

Il peut cependant être nécessaire de construire une matrice d'amortissement lorsque le recours à des calculs par intégration temporelle s'avère indispensable pour la prise en compte de systèmes partiellement non linéaires.

Plusieurs techniques sont envisageables: définir a priori la forme de la matrice d'amortissement, construire cette matrice à partir de la donnée de l'amortissement modal ou, lorsque cela est possible, construire la matrice d'amortissement à partir des données géométriques et mécaniques du système (amortisseurs localisés). Les deux premières approches conduisent à un amortissement qualifié d'orthogonal car la diagonalisation de la matrice d'amortissement sur la base des modes propres est préservée. La dernière approche conduit généralement à un amortissement non classique qui nécessite le recours à des techniques de résolution spécifiques pour la résolution sur la base des modes.

2.7.4 CONSTRUCTION DE LA MATRICE D'AMORTISSEMENT

2.7.4.1 AMORTISSEMENT DE RAYLEIGH

On se donne a priori la structure de la matrice d'amortissement sous la forme d'une combinaison linéaire de la matrice de masse et de la matrice de rigidité.

$$(2.71) \quad \underline{\underline{C}} = \alpha \underline{\underline{M}} + \beta \underline{\underline{K}}$$

Il est évident que dans ce cas la propriété d'orthogonalité de la matrice d'amortissement par rapport aux modes propres est préservée. En reportant l'équation (2.71) dans l'équation générale (2.5) et en faisant usage de cette propriété, l'équation du mouvement s'écrit :

$$(2.72) \quad m_j \ddot{y}_j(t) + (\alpha m_j + \beta k_j) \dot{y}_j(t) + k_j y_j(t) = p_j(t) \quad , \quad j=1, \dots, N$$

d'où il ressort que le pourcentage d'amortissement critique équivalent s'exprime par :

$$(2.73) \quad \xi_j = \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha}{\omega_j} + \beta \omega_j \right]$$

L'amortissement donné par l'équation (2.73) se compose de deux termes, l'un proportionnel à la pulsation et l'autre inversement proportionnel à celle-ci. Comme en général, ainsi qu'on l'a noté au chapitre 2, il est souhaitable de représenter la dissipation d'énergie dans le système par un amortissement indépendant de la fréquence, un choix approprié des valeurs de α et β permet de satisfaire, de façon approximative, cette condition. La détermination de α et β est illustrée sur la figure 2.12 pour le portique de la figure 2.5 : en se fixant deux valeurs de pulsations, ω_1 et ω_2 , pour lesquelles l'amortissement donné par l'équation (2.73) prend la valeur recherchée, il s'ensuit qu'entre ω_1 et ω_2 l'amortissement est sensiblement égal, quoique légèrement inférieur, à la valeur cherchée. La première pulsation ω_1 est prise égale à celle du mode fondamental du système et la seconde ω_2 à la plus grande pulsation d'intérêt pour l'analyse (dans le cas d'application de la figure 2.12, ω_2 a été choisie égale à la deuxième pulsation propre du portique).

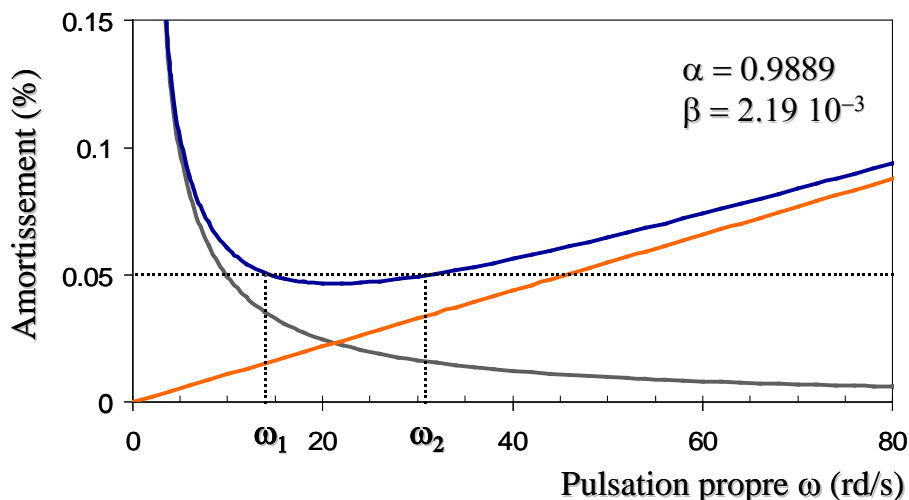


Figure 2.12 : Amortissement de Rayleigh

Cette modélisation de l'amortissement est classiquement utilisée pour la réalisation de calculs temporels sur des systèmes comportant une partie pseudo-élastique, pour laquelle il est nécessaire de spécifier un amortissement équivalent, et une partie non linéaire dans laquelle la dissipation d'énergie est directement prise en compte par la loi de comportement du matériau.

On notera que seule la combinaison linéaire de la matrice de masse et de la matrice de rigidité permet de donner naissance à un amortissement sensiblement indépendant de la fréquence. L'utilisation d'un seul de ces termes donnerait naissance à un amortissement dépendant de la fréquence dont la réalité physique est généralement prise en défaut.

2.7.4.2 AMORTISSEMENT DE CAUGHEY

Il s'agit d'une généralisation de l'amortissement de Rayleigh dans laquelle la matrice d'amortissement s'exprime comme une combinaison linéaire de p termes constitués du produit de la matrice de masse et de la matrice de rigidité.

$$(2.74) \quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{M}} \sum_{b=0}^p a_b \left[\underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} \right]^b$$

En procédant comme pour l'amortissement de Rayleigh, on montre que le pourcentage d'amortissement critique du mode j s'exprime par :

$$(2.75) \quad \xi_j = \frac{1}{2} \sum_{b=0}^p a_b \omega_j^{2b-1}$$

Ainsi en choisissant $p=N-1$, où N est le nombre de modes, il est théoriquement possible de respecter la valeur de l'amortissement modal pour chacun des modes du système. Dans la pratique en retenant un nombre de termes nettement inférieur, $p \leq N-1$, on obtient une approximation suffisante. La figure 2.13 illustre l'application de la formulation (2.74) au cas du portique de la figure 2.5, avec dans ce cas $p=N-1$.

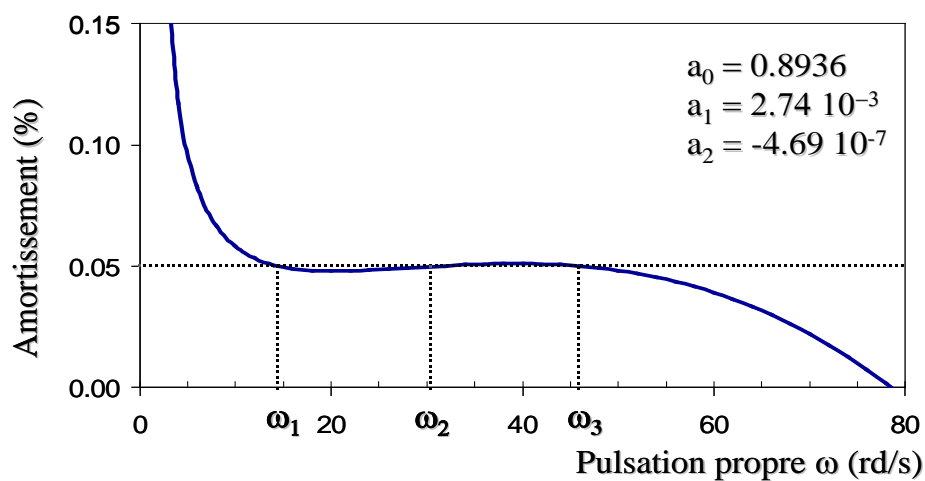


Figure 2.13 : Amortissement de Caughey

2.7.4.3 MATRICE D'AMORTISSEMENT MODAL

Il est également possible à partir de la donnée des amortissements modaux de construire directement la matrice d'amortissement associée. Soit $\underline{\underline{C}}$ cette matrice et $\underline{\underline{\Phi}}$ la matrice d'ordre N constituée des N vecteurs modaux :

$$(2.76) \quad \underline{\underline{\Phi}} = [\underline{\underline{D}}_1 \quad \underline{\underline{D}}_2 \quad \dots \quad \underline{\underline{D}}_j \quad \dots \quad \underline{\underline{D}}_N]$$

La matrice $\underline{\underline{C}}$ doit satisfaire la relation :

$$(2.77) \quad \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{\Xi}}$$

dans laquelle la matrice $\underline{\underline{\Xi}}$ a la structure suivante :

$$(2.78) \quad \underline{\underline{\Xi}} = \begin{bmatrix} c_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c_j & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & c_N \end{bmatrix}$$

avec des coefficients égaux à :

$$(2.79) \quad c_j = 2m_j \omega_j \xi_j$$

L'inversion de la relation (6.77) fournit l'expression de la matrice $\underline{\underline{C}}$:

$$(2.80) \quad \underline{\underline{C}} = [\underline{\underline{\Phi}}^T]^{-1} \underline{\underline{\Xi}} \underline{\underline{\Phi}}^{-1}$$

Le calcul de $\underline{\underline{C}}$ par la relation (2.80) nécessite l'inversion de deux matrices d'ordre N et n'est pas efficace d'un point de vue numérique.

Tenant compte de la relation d'orthogonalité :

$$(2.81) \quad \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{m}}$$

dans laquelle la matrice $\underline{\underline{m}}$ est diagonale avec des coefficients égaux aux masses généralisées m_j , on en déduit en prenant l'inverse de la relation (2.81) et en prémultipliant ou postmultipliant par les quantités $\underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Phi}}$ et $\underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{M}}$, les relations suivantes :

$$(2.82a) \quad \underline{\underline{\Phi}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{m}}}^{-1} \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{\mathbf{M}}}$$

$$(2.82b) \quad \left[\underline{\underline{\Phi}}^T \right]^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\mathbf{m}}}^{-1}$$

En reportant les relations (2.82) dans la relation (2.80), il vient :

$$(2.83) \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}} = \left[\underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\mathbf{m}}}^{-1} \right] \underline{\underline{\Xi}} \left[\underline{\underline{\mathbf{m}}}^{-1} \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{\mathbf{M}}} \right]$$

Les matrices $\underline{\underline{\mathbf{m}}}$ et $\underline{\underline{\Xi}}$ étant diagonales (éqs.2.77 et 2.81) le produit $\underline{\underline{\mathbf{m}}}^{-1} \underline{\underline{\Xi}} \underline{\underline{\mathbf{m}}}^{-1}$ est immédiat; c'est une matrice diagonale $\underline{\underline{\mathbf{k}}}$ dont les termes valent :

$$(2.84) \quad \kappa_{jj} = \frac{2\xi_j \omega_j}{m_j}$$

La matrice $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ s'exprime alors comme le simple produit de matrices :

$$(2.85) \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\mathbf{k}}} \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{\mathbf{M}}}$$

En notant symboliquement $\underline{\underline{\mathbf{G}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{B}}}$ la matrice carrée dont les termes g_{kl} sont les produits $a_k b_l$ des composantes des deux vecteurs $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ la relation (2.85) peut se développer sous la forme :

$$(2.86) \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{M}}} \left[\sum_{j=1}^N \frac{2\xi_j \omega_j}{m_j} \underline{\underline{\mathbf{D}}}_j \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}}_j^T \right] \underline{\underline{\mathbf{M}}}$$

Sous cette forme, le $j^{\text{ième}}$ terme de la somme apparait comme la contribution du $j^{\text{ième}}$ mode, d'amortissement ξ_j , à la matrice d'amortissement globale. Si ce terme est nul, alors le mode j ne contribue pas à l'amortissement global du système.

Exemple : Reprenons l'exemple du portique de la figure 2.5 et supposons les valeurs suivantes d'amortissement modal pour chacun des trois modes :

$$\text{Mode 1: } \xi = 0.05 \quad \text{mode 2: } \xi = 0.10 \quad \text{mode 3: } \xi = 0.0$$

Avec les données des modes propres de ce portique, qui ont été calculées précédemment :

$$m_1 = 1.802, \omega_1 = 14.5 \text{rd/s}, \underline{\underline{\mathbf{D}}}_1^T = [1.0 \quad 0.644 \quad 0.300]$$

$$m_2 = 2.456, \omega_1 = 31.1 \text{rd/s}, \underline{\underline{D}}_2^T = [1.0 \quad -0.601 \quad -0.676]$$

Le calcul des matrices d'amortissement représentant les contributions de chaque mode donne :

$$\underline{\underline{C}}_1 = \begin{bmatrix} 0.8047 & 0.7773 & 0.4828 \\ & 0.7509 & 0.4664 \\ \text{Sym.} & & 0.2897 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{C}}_2 = \begin{bmatrix} 2.5326 & -2.2831 & -3.4240 \\ & 2.0582 & 3.0868 \\ \text{Sym.} & & 4.6293 \end{bmatrix}$$

La matrice d'amortissement globale est la somme $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}_1 + \underline{\underline{C}}_2 + \underline{\underline{C}}_3$ ce qui, compte tenu de la nullité de $\underline{\underline{C}}_3$, donne :

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 3.3372 & -1.5058 & -2.9412 \\ & 2.8091 & 3.5532 \\ \text{Sym.} & & 4.9190 \end{bmatrix}$$

On vérifiera que la matrice $\underline{\underline{C}}$ est bien orthogonale par rapport aux modes propres du portique.

2.7.5 TRAITEMENT DE L'AMORTISSEMENT NON ORTHOGONAL

Dans tous les cas traités ci dessus, la matrice d'amortissement est orthogonale par rapport aux modes propres du système, soit par hypothèse, soit par construction. On bénéficie alors, en se plaçant sur la base des modes propres, du découplage des équations régissant le mouvement. Les méthodes de résolution correspondantes sont celles développées pour l'oscillateur à un degré de liberté, rappelées en 7.2. Dans le cas le plus général d'une matrice d'amortissement quelconque, on ne bénéficie plus de cette propriété. Il faut alors soit résoudre les équations par intégration temporelle, soit utiliser la méthode des modes complexes. On se contentera de donner ci dessous un bref aperçu de cette méthode.

Le principe consiste à réécrire les équations :

$$(2.87) \quad \underline{\underline{M}}\ddot{\underline{\underline{U}}} + \underline{\underline{C}}\dot{\underline{\underline{U}}} + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{0}}$$

en leur adjoignant un système complémentaire :

$$(2.88) \quad \begin{cases} \underline{\underline{M}}\dot{\underline{\underline{V}}} + \underline{\underline{C}}\underline{\underline{V}} + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{M}}\dot{\underline{\underline{U}}} = \underline{\underline{M}}\underline{\underline{V}} \end{cases}$$

La dimension du système passe alors de $N \times N$ à $2N \times 2N$. Le système (2.88) peut également s'écrire :

$$(2.89) \quad \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M}} \\ \underline{\underline{M}} & \underline{\underline{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\dot{V}} \\ \underline{\dot{U}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\underline{\underline{M}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V} \\ \underline{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}$$

La résolution du système (2.89) se ramène à la résolution d'un problème classique aux valeurs propres :

$$(2.90) \quad \frac{1}{p} \begin{bmatrix} p\underline{\underline{\Psi}} \\ \underline{\underline{\Psi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \\ -\underline{\underline{K}}^{-1}\underline{\underline{M}} & -\underline{\underline{K}}^{-1}\underline{\underline{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p\underline{\underline{\Psi}} \\ \underline{\underline{\Psi}} \end{bmatrix}$$

qui peut être comparé à la formulation du problème aux valeurs propres réel qui ne fait intervenir que les matrices de masse et de rigidité :

$$(2.91) \quad \frac{1}{\omega^2} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{X}}$$

Les $2N$ vecteurs propres solutions du problème aux valeurs propres complexes (6.90) permettent de construire la matrice modale complexe $\underline{\underline{\Theta}}$ sous la forme :

$$(2.92) \quad \underline{\underline{\Theta}} = \begin{bmatrix} p\underline{\underline{\Psi}} & p\underline{\underline{\Psi}}^* \\ \underline{\underline{\Psi}} & \underline{\underline{\Psi}}^* \end{bmatrix}$$

où $\underline{\underline{\Psi}}^*$ est le conjugué de $\underline{\underline{\Psi}}$.

La matrice modale complexe $\underline{\underline{\Theta}}$ représente la transformation entre les coordonnées modales complexes et les coordonnées physiques :

$$(2.93) \quad \begin{bmatrix} \underline{V} \\ \underline{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\Theta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q} \\ \underline{q}^* \end{bmatrix}$$

Elle permet de diagonaliser le système (6.89) sous la forme :

$$(2.93) \quad \begin{bmatrix} \underline{\underline{\Theta}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M}} \\ \underline{\underline{M}} & \underline{\underline{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\Theta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\dot{q}} \\ \underline{\dot{q}}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\Theta}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\underline{\underline{M}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\Theta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q} \\ \underline{q}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}$$

La diagonalisation de ces matrices conduit alors au système suivant :

$$(2.94) \quad \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{M}}}_N & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{M}}}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\dot{\mathbf{q}}}} \\ \underline{\underline{\dot{\mathbf{q}}}}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\underline{\underline{\mathbf{M}}}_N \mathbf{p}_N & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & -\underline{\underline{\mathbf{M}}}_N \mathbf{p}_N^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{V}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{U}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} \end{bmatrix}$$

La diagonale de la première matrice donne les N masses modales (réelles) du problème. Les composantes de la deuxième matrice diagonale sont à valeurs complexes.