Cours d'algèbre 4

L2 Mathématiques

5 mai 2021

Chapitre 1

Formes Linéaires et Dualité

Par la suite, on considère E comme un espace vectoriel sur un corps k. (k peut être égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1 Formes Linéaires et Espace Dual

Définition 1.1. *On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire de E dans k.*

Définition 1.2. *On appelle **espace dual** de E, qu'on note par $E^* =: \mathcal{L}(E, k)$, l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.*

$\varphi \in E^*$ signifie que

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \to & k \\ & x & \mapsto & \varphi(x) \in k \end{array}$$

de sorte que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \ \forall (\alpha, \beta) \in k^2 : \quad \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$$

Exemple 1.1.

1. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & 2x + y \end{array}$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$.

2. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} E & \to & k \\ x & \mapsto & 0 \end{array}$$

*est une forme linéaire sur E, c'est **la forme nulle** sur E.*

3. *Si $E = k[X]$: l'espace des polynômes à coefficients dans k, alors pour tout $x \in k$ l'application*

$$\begin{array}{rccc} ev_x : & k[X] & \to & k \\ & P(X) & \mapsto & P(x) \end{array}$$

d'évaluation de $P(X)$ en x est une forme linéaire sur $k[X]$.

4. *Si $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$: l'espace des applications réelles continues sur $[a,b]$, alors l'application*

$$\begin{array}{rccl} \int : & \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \int_a^b f(x)dx \end{array}$$

   est une forme linéaire sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

5. *Si $E = \mathcal{M}_n(k)$: l'espace des matrices carrés de rang n, alors l'application*

$$\begin{array}{rccl} tr : & \mathcal{M}_n(k) & \rightarrow & k \\ & A & \mapsto & tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \end{array}$$

   est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(k)$.

6. *Soient E une k-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B}_E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de E. On sait que $\forall x \in E$, x s'écrit d'une manière unique sous la forme $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Alors, pour chaque $j \in \{1,2,\cdots,n\}$, l'application*

$$\begin{array}{rccl} e_j^* : & E & \rightarrow & k \\ & x & \mapsto & e_j^*(x) = \lambda_j \end{array}$$

   est une forme linéaire sur E, appelée la $j^{ème}$ ***forme coordonnée*** *relative à la base $\mathcal{B}_E$.*

D'une manière plus générale, on a :

Proposition 1.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

1. *Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in k^n$. L'application*

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & k^n & \rightarrow & k \\ & x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \mapsto & \varphi(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \end{array}$$

   est une forme linéaire sur k^n.

2. *Réciproquement : Pour tout forme linéaire φ sur k^n, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in k^n$ tel que $\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in k^n$ on a : $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$.*

Preuve :

1. Immédiatement par un calcul direct.
2. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ la base canonique de k^n et soit $\varphi : k^n \rightarrow k$ une forme linéaire sur k^n.
   On sait que tout éléments $x \in k^n$ s'écrit d'une façon unique sous la forme $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.
   Donc $\varphi(x) = \varphi(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i)$.
   Conclusion : Prenons pour chaque $j \in \{1,2,\cdots,n\}$ $\lambda_j = \varphi(e_j)$, ce qui montre l'existence et l'unicité.

Proposition 1.2. *Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie n. Alors son dual E^* est aussi de dimension finie, et on a*

$$dim(E) = dim(E^*) = n$$

.

Preuve :

On sait que k vu comme k-espace vectoriel est une droite vectorielle et donc $dim(k) = 1$. Or

$$dim(E^*) = dim(\mathcal{L}(E,k)) = dim(E) \times dim(k) = dim(E).$$

2 Hyperplan

Définition 1.3. *Soit E un k-espace vectoriel. On appel* **hyperplan** *de E, le noyau de toute forme linéaire sur E autre que la forme nulle.*

ie : Une partie H de E est un hyperplan de E s'il existe $\varphi \in E^* - \{0\}$ tel que $H = Ker(\varphi)$. On dit alors que la relation $\varphi(x) = 0$ est une equation de l'hyperplan H.

Exemple 1.2.

1. $H = \{A \in \mathcal{M}_n(k) \mid tr(A) = 0\}$ *est un hyperplan de* $\mathcal{M}_n(k)$.
2. $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 3y + z = 0\}$ *est un hyperplan de* $\mathbb{R}^3$.
3. $H = \{P \in k[X] \mid P(0) = 0\}$ *est un hyperplan de* $k[X]$.

Proposition 1.3. *Soit H un sous espace vectoriel de E. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *H est un hyperplan de E.*
2. *Il existe une droite vectorielle D de E telle que $E = H \oplus D$.*

Si de plus E est de dimension finie n, alors les deux propriétés précédentes sont équivalentes avec la troisième propriété suivante :

3. $dim(H) = dim(E) - 1$. (Autrement dit : H est de codimension 1).

Preuve :

(1. $\Rightarrow$ 2.) Soit H un hyperplan de E, donc il existe $\varphi \in E^* - \{0\}$ telle que $H = Ker(\varphi)$. Comme φ n'est pas identiquement nulle, alors il existe $v \in E$ tel que $\varphi(v) \neq 0$.

Soit la droite vectorielle $D = k.v$, et montrons que $E = H \oplus D$.

Soit $x \in H \cap D$ donc $\varphi(x) = 0$ et $\exists \lambda \in k$ tel que $x = \lambda.v$ ce qui montre que $\varphi(x) = \varphi(\lambda.v) = \lambda.\varphi(v)$ et $\varphi(v) \neq 0$ ce qui implique que $\lambda = 0$ et donc $x = 0$.

Conclusion : $H \cap D = \{0\}$.

Soit $x \in E$ et montrons que $x \in H + D$.

on a $\lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(v)}$, on pose $y = x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v$ et on a $\varphi(y) = \varphi(x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(v)}v) = 0$ donc y est un élément de H. D'où $x = y + \lambda v \in H + D$ ■

Remarque 1.1. *Si $dim(E) = n$ finie, et $\mathcal{B}_E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de E. Alors, relativement à la base $\mathcal{B}_E$ un hyperplan H de E admet une equation unique, à un scalaire multiplicatif près, de la forme*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0, \qquad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)_{\mathcal{B}_E} \in E.$$

Corollaire 1.1. *Deux formes linéaires non nulles sur un espaces vectoriel E sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même noyau.*

Preuve :

Soient φ et ϕ deux formes linéaires non nulles.

Supposons que $Ker(\phi) = Ker(\varphi) = H$. Soit $v \notin H$ ce qui implique que $\phi(v) \neq 0$ et $\varphi(v) \neq 0$.

On pose $\alpha = \dfrac{\varphi(v)}{\phi(v)}$.

Soit $x \in E$, donc d'après la proposition 1.3 $E = H \oplus k.v$ et donc, il existent $y \in H$ et $\lambda \in k$ tels que $x = y + \lambda v$. D'où

$$\begin{array}{rcl} \varphi(x) & = & \varphi(y + \lambda v) \\ & = & \varphi(y) + \lambda \varphi(v) \\ & = & \lambda \varphi(v) \\ & = & \lambda(\alpha \phi(v)) \\ & = & \alpha(\phi(y) + \lambda \phi(v)) \\ & = & \alpha \phi(x). \end{array}$$

Conclusion $\forall x \in E, \quad \exists \alpha \in k \quad : \varphi(x) = \alpha \phi(x)$, ce qui montre que φ et ϕ sont bien proportionnelles.

L'implication inverse est immédiate.

3 Base duale

Soient E un k-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B}_E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de E. Pour chaque $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, l'application

$$\begin{array}{rccl} e_j^* : & E & \to & k \\ & x & \mapsto & e_j^*(x) = \lambda_j \end{array}$$

est une forme linéaire sur E, appelée la $j^{ème}$ **forme coordonnée** relative à la base $\mathcal{B}_E$.

Proposition 1.4. *La famille $\mathcal{B}_E^* = \{e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*\}$ est une base de l'espace dual E^*, appelée base duale de $\mathcal{B}_E$.*

De plus, pour tout $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, la relation d'orthogonalité de Kronecker est donnée par :

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Preuve :

Par définition

$$\begin{array}{rccl} e_j^* : & E & \to & k \\ & x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i & \mapsto & e_j^*(x) = \lambda_j \end{array}$$

Donc

$$\forall i, j \in \{1, 2, \cdots, n\} : \quad e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

Soit $\varphi \in E^*$, on définit une autre forme linéaire $\phi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*$. Pour tout $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ on a

$$\begin{array}{rcl} \phi(e_j) & = & \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*(e_j) \\ & = & \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) \delta_{ij} \\ & = & \varphi(e_j) \end{array}$$

Les deux formes φ et ϕ coïncident sur une base de E sont donc égales. Donc

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*$$

ce qui implique que la famille $\mathcal{B}^*$ est une famille génératrice de E^*. Et comme $dim(E) = dim(E^*) = n$ donc c'est une famille génératrice maximale, alors, c'est une base de E^*.

Corollaire 1.2. *Soient $\mathcal{B}_E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de E et $\mathcal{B}_E^* = \{e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*\}$ sa base duale, alors on a les relations suivantes :*

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) e_i \tag{1.1}$$

$$\forall \varphi \in E^*, \quad \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^* \tag{1.2}$$

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \quad a_{ij} = e_i^*(f(e_j)), \quad \text{où} \;\; (a_{ij})_{1\leq j,j\leq n} = Mat_{\mathcal{B}}(f) \tag{1.3}$$

Proposition 1.5.

1. *Si φ est une forme linéaire non nulle sur E, alors il existe un vecteur $x \in E$ non nul tel que $\varphi(x) = 1$.*
2. *Pour tout vecteur x de E non nul , il existe une forme linaire $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x) = 1$.*

Preuve :

1. Si φ une forme linéaire non nulle, alors il existe un vecteur v de E tel que $\varphi(v) \neq 0$. on pose $x = \dfrac{v}{\varphi(v)}$.
2. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ est non nul, alors il existe i_0 tel que $e_{i_0}^*(x) = x_{i_0} \neq 0$. La forme linéaire $\varphi = \dfrac{1}{e_{i_0}^*(x)} e_{i_0}^*$ convient.

Proposition 1.6. *Toute base de E^* est la base duale d'une unique base de E, appelé base pré-duale.*

Preuve :
Soit $\mathcal{F} = \{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\}$ une base de E^* et on pose l'application

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & E & \to & k^n \\ & x & \mapsto & \Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)) \end{array}$$

Soit $x \in E$ un vecteur non nul. Si $x \in Ker(\Phi)$, ça implique que

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \cdots = \varphi_n(x) = 0$$

Mais la proposition 1.5 confirme l'existence d'une forme linéaire $\varphi \in E^*$ de sorte que $\varphi(x) = 1$.
La forme linéaire φ s'écrit dans la base $\mathcal{F}$ de la manière $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$, ce qui donne

$$1 = \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x) = 0$$

ce qui est absurde.

Conclusion $x = 0$ et le noyau de Φ est réduit à zéro, et donc l'application linéaire Φ est une injection de $E \to k^n$.

Or, $dim(E) = n = dim(k^n)$ donc, Φ est un isomorphisme.

On note par $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ la base canonique de k^n. Pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, un vecteur $v \in E$ satisfait l'équivalence suivante

$$\varphi_i(v) = \delta_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(v) = c_j$$

Comme Φ est un isomorphisme, alors la famille $\mathcal{B} = \{\phi^{-1}(c_1), \phi^{-1}(c_2), \cdots, \phi^{-1}(c_n)\}$ est une base de E est c'est l'unique famille de E satisfaisant aux conditions de Kronecker.

Conclusion : $\mathcal{B}$ est l'unique base de E dont $\mathcal{F}$ est la base duale ■

Proposition 1.7 (Changement de base duale)**.** *Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases différentes de E, et soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ vers la base $\mathcal{B}_2$. Alors, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1^*$ vers la base $\mathcal{B}_2^*$ est ${}^tP^{-1}$.*

Preuve :

On pose

$$\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\} \quad , \quad \mathcal{B}_2 = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\} \quad et \quad P = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$$

On note par $Q = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1^*$ vers la base $\mathcal{B}_2^*$.

Par définition de la matrice de passage, on a pour tout $1 \le k \le n$, $f_k = \sum_{l=1}^n a_{lk} e_l$ et pour tout $1 \le j \le n$, $f_j^* = \sum_{i=1}^n b_{ij} e_i^*$. Donc pour tout $1 \le j, k \le n$ on a

$$\begin{array}{rcl}
\delta_{jk} & = & f_j^*(f_k) \\
& = & \sum_{i=1}^n b_{ij} e_i^*(\sum_{l=1}^n a_{lk} e_l) \\
& = & \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ij} a_{lk} e_i^*(e_l) \\
& = & \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ij} a_{lk} \delta_{il} \\
& = & \sum_{i=1}^n b_{ij} a_{lk} \\
& = & c_{jk}
\end{array}$$

Où les composantes c_{jk} sont les coefficients de la matrice ${}^tQP$, mais $\delta_{jk} = c_{jk}$, ce qui implique que ${}^tQP = I_n$ et donc $Q =^t P^{-1}$ ■

Corollaire 1.3 (♡♡♡)**.** *Soient $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ la base canonique de E et $\mathcal{B}_c^* = \{e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*\}$ sa base duale. Soient $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ une autre base de E et $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, v_2^*, \cdots, v_n^*\}$ sa base duale. Les vecteurs v_i (resp. v_i^*) étant exprimés dans la base $\mathcal{B}_c$ (resp. $\mathcal{B}_c^*$). Alors*

$$Mat_{\mathcal{B}_c^*}(\mathcal{B}^*) =^t (Mat_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}))^{-1}$$

Exemple 1.3.

1. *Soient $v_1 = (-3, -1, 1), v_2 = (5, 2, -1), v_3 = (6, 2, -1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ exprimés dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*
   La famille $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est génératrice et libre donc forme une base de $\mathbb{R}^3$.
   Soit $\mathcal{B}^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ la base duale de $\mathcal{B}$. Alors la matrice de passage de $\mathcal{B}_c^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ à $\mathcal{B}^*$ est
   $$Q =^t P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Ici $P = (v_1|v_2|v_3) = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$).

Donc la base duale est $\mathcal{B}^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ *telle que*

$$\begin{cases} \varphi_1(x;y;z) = y + 2z \\ \varphi_2(x;y;z) = -x + 3y \\ \varphi_3(x;y;z) = x - 2y + z \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \varphi_1 = e_2^* + 2e_3^* \\ \varphi_2 = -e_1^* + 3e_2^* \\ \varphi_3 = e_1^* - 2e_2^* + e_3^* \end{cases}$$

2. *Soient*

$$\begin{cases} \varphi_1(x;y;z) = x + 2y + 3z \\ \varphi_2(x;y;z) = 2x + 3y + 3z \\ \varphi_3(x;y;z) = 3x + 4y + 6z \end{cases}$$

trois formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$*. Dans la base canonique elles s'écrivent*

$$\begin{cases} \varphi_1 = e_1^* + 2e_2^* + 3e_3^* \\ \varphi_2 = 2e_1^* + 3e_2^* + 4e_3^* \\ \varphi_3 = 3e_1^* + 4e_2^* + 6e_3^* \end{cases}$$

La famille $\mathcal{F} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ *est bien une base de* $(R^3)^*$ *car la matrice*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

est inversible. Soit $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *la base de* $\mathbb{R}^3$ *pré-duale de* $\mathcal{F}$*. La matrice de passage de* $\mathcal{B}_c$ *à* $\mathcal{B}$ *est donc la matrice*

$$P =^t Q^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc v_1, v_2 *et* v_3 *sont les colonnes de la matrices* P*.*

4 Bidual d'un espace vectoriel

Définition 1.4. *Soit* E *un* k*-espace vectoriel. le dual de* E^* *qu'on note par* E^{**} *est appelé bidual de* E*.*

Proposition 1.8. *L'application*

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & E & \to & E^{**} \\ & x & \mapsto & \Phi(x) = \left\{ \begin{array}{rccl} \tilde{x} : & E^* & \to & k \\ & \varphi & \mapsto & \tilde{x}(\varphi) = \varphi(x) \end{array} \right. \end{array}$$

est un isomorphisme entre espaces vectoriels.

Remarque 1.2. *L'isomorphisme Φ permet d'identifier le bidual E^{**} à E.*

Chapitre 2

Formes Bilinéaires et Formes Quadratiques

1 Formes bilinéaires symétriques

Par la suite, on considère E comme un espace vectoriel sur un corps k. (k peut être égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 2.1. *L'application*

$$\begin{array}{rccl} \phi: & E \times E & \to & k \\ & (x, y) & \mapsto & \phi(x, y) \end{array}$$

est appelée forme bilinéaire si elle est linéaire pour chacune des deux variables.

Autrement dit :

$$\forall x_1, x_2, y \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in k, \quad \phi(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha\phi(x_1, y) + \beta\phi(x_2, y) \tag{2.1}$$

$$\forall x, y_1, y_2 \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in k, \quad \phi(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha\phi(x, y_1) + \beta\phi(x, y_2) \tag{2.2}$$

Remarque 2.1.

- *On dit que ϕ est linéaire à gauche ou par rapport à la première variable si la relation* (2.1) *est vérifiée.*
- *On dit que ϕ est linéaire à droite ou par rapport à la deuxième variable si la relation* (2.2) *est vérifiée.*

Définition 2.2. *La forme bilinéaire ϕ est dite symétrique si*

$$\forall x, y \in E, \quad \phi(x, y) = \phi(y, x).$$

Dans la pratique, la symétrie permet de vérifier la linéarité d'un côté pour avoir la bilinéarité.

Exemple 2.1.

1. *L'application multiplication*

$$\begin{array}{rccl} \tau: & k \times k & \to & k \\ & (x, y) & \mapsto & \tau(x, y) = xy \end{array}$$

est une forme bilinéaire symétrique.

2. *Le produit scalaire usuel*

$$\begin{array}{rccl} \langle\ ,\ \rangle : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & k \\ & \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) & \mapsto & \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 \end{array}$$

est une forme bilinéaire symétrique.

3. *L'application*

$$\begin{array}{rccl} \int : & \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \mapsto & \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt \end{array}$$

est une forme bilinéaire symétrique. (TD)

4. *L'application*

$$\begin{array}{rccl} tr : & \mathcal{M}_n(k) \times \mathcal{M}_n(k) & \to & k \\ & (A,B) & \mapsto & tr(A,B) = trace(AB) \end{array}$$

est une forme bilinéaire symétrique. (TD)

1.1 Matrice d'une forme bilinéaire symétrique

On suppose que la dimension de l'espace vectoriel E est égal à n finie. Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E. Et soit

$$\begin{array}{rccl} \phi : & E \times E & \to & k \\ & (x,y) & \mapsto & \phi(x,y) \end{array}$$

une forme bilinéaire symétrique.

Définition 2.3. *La matrice $M_{\mathcal{E}}(\phi)$ de la forme bilinéaire ϕ dans la base $\mathcal{E}$ est la matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(k)$ telle que ses coefficients sont données par*

$$\forall i,j \in \{1,2,\cdots,n\}, \quad a_{ij} := \phi(e_i, e_j)$$

où les indices i et j correspondent respectivement au $i^{\text{ème}}$ ligne et au $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $M_{\mathcal{E}}(\phi)$.

Dans la pratique, si x et y sont deux vecteurs de E tels que leurs vecteurs colonnes des cordonnées respectifs dans la base $\mathcal{E}$ sont X et Y, alors on a

$$\phi(x,y) = {}^tXM_{\mathcal{E}}(\phi)Y.$$

Inversement, on a pour toute matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(k)$, l'application

$$\begin{array}{ccl} E \times E & \to & k \\ (x,y) & \mapsto & {}^tXMY \end{array}$$

est une forme bilinéaire symétrique, où X et Y sont les vecteurs colonnes respectifs dans la base $\mathcal{E}$ des cordonnées des vecteurs x et y de E.

Exemple 2.2. *Dans la base canonique, $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ est la matrice de la forme bilinéaire symétrique $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto 3x_1y_1 - 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$.*

On rappel ici la définition de la matrice de passage ou de changement de base.

Définition 2.4. *La matrice de passage d'une base $\mathcal{E} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ vers la base $\mathcal{E}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la matrice $P \in GL_n(k)$ dont la $j^{ème}$ colonne est formée des coordonnées de e'_j exprimé dans la base $\mathcal{E}$.*

et on rappel aussi la proposition suivante

Proposition 2.1.

1. *Soit x un élément de E. Soit X (resp. X') le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}'$). Alors $X = PX'$.*
2. *Soit u un endomorphisme de E, M et M' ses matrices respectives dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. Alors $M' = P^{-1}MP$.*

On pose maintenant $\mathcal{E}'$ une base de E autre que la base $\mathcal{E}$. et soit P la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$. On a la proposition de changement de base pour les formes bilinéaires symétriques suivante :

Proposition 2.2. *La matrice de la forme bilinéaire symétrique ϕ dans la nouvelle base $\mathcal{E}'$ est*

$$M_{\mathcal{E}'}(\phi) = {}^{P}M_{\mathcal{E}}(\phi)P. \tag{2.3}$$

où $M_{\mathcal{E}}(\phi)$ est la matrice de ϕ dans la base E.

1.2 Forme bilinéaire et dualité

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique. Pour tout $x \in E$, l'application

$$\begin{array}{cccc} \phi(x,.): & E & \to & k \\ & y & \mapsto & \phi(x,y) \end{array} \tag{2.4}$$

est une forme linéaire vue comme application de la variable y (La variable x est fixé).

Autrement dit $\forall x \in E, \quad \phi(x,.) \in E^*$.

Proposition 2.3. *L'application*

$$\begin{array}{cccc} \varphi_\phi: & E & \to & E^* \\ & x & \mapsto & \phi(x,.) \end{array} \tag{2.5}$$

est linéaire.

Définition 2.5. *L'application linéaire φ_ϕ définit dans (2.5) est appelée l'application linéaire de E dans son dual associée à la forme bilinéaire symétrique ϕ. On écrit $\varphi_\phi \in \mathcal{L}(E, E^*)$.*

Si $dim(E) = n$ finie, et si $\mathcal{E}$ est une base de E, alors la matrice de ϕ dans E est égale à la matrice de ϕ_φ en menant E par la base $\mathcal{E}$ et E^* par la base duale $\mathcal{E}^*$.

Définition 2.6 (Noyau d'une forme bilinéaire)**.** *Le noyau de la forme bilinéaire symétrique ϕ, qu'on note par $Ker(\phi)$ est le noyau de ϕ_φ. Autrement dit*

$$Ker(\phi) := \{x \in E \mid \forall y \in E : \quad \phi(x,y) = 0\} \tag{2.6}$$

Définition 2.7. *La forme bilinéaire symétrique ϕ est dit non dégénérée si son noyau est réduit à $\{0\}$.*

Définition 2.8. *Si E est de dimension finie, Le rang de la forme bilinéaire symétrique ϕ est le rang de l'application linéaire ϕ_φ, ou encore c'est le rang de la matrice de ϕ dans une base de E.*

Les quatre formes bilinéaires dans l'exemple 2.1 sont toutes non dégénérées, on peut facilement vérifier que leurs noyaux successifs sont tous réduits à zéro.

Proposition 2.4. *En dimension finie, une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$ est non dégénérée si et seulement si sa matrice dans une base de E est inversible. Autrement dit son determinant est non nul.*

Proposition 2.5. *Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $E \times E$. Alors, pour tout forme linéaire $\psi \in E^*$, il existe un unique $x \in E$ tel que*

$$\forall y \in E : \quad \psi(y) = \phi(x, y).$$

1.3 Orthogonalité

Dans tout ce paragraphe, on supposera que ϕ est une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$, où E est un k-espace vectoriel.

Définition 2.9. *Soit F un sous espace vectoriel de E. L'orthogonal de F pour ϕ est le sous espace vectoriel de E défini par*

$$F^\perp = \{x \in E \;\mid\; \forall y \in F \;\; \phi(x, y) = 0\}. \tag{2.7}$$

Exemple 2.3. *Pour le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$, l'orthogonal d'une droite vectorielle $\mathcal{D}$ est le plan vectoriel $\mathcal{P}$ orthogonal à $\mathcal{D}$ au sens usuel.*

Remarque 2.2. *Le lien entre l'orthogonalité et la dualité se fait grâce à l'application linéaire* (2.5) *associée à ϕ.*

Théorème 2.1. *On suppose que E estun espace vectoriel de dimension finie n, on a :*

1. *Si ϕ est non dégénérée, alors*
$$dim(F^\perp) = n - dim(F).$$
2. *En général*
$$dim(F^\perp) = n - dim(F) + dim(F \cap ker(\phi)).$$

Proposition 2.6. *Soit F un sous espace vectoriel de E.*
En général on a $F \subset (F^\perp)^\perp$.
Mais, si $dim(E) = n$ finie et ϕ est non dégénérée, on a $F = (F^\perp)^\perp$.

2 Formes quadratiques

Dans cette section ; on supposera que le corps k est de caractéristique différente de 2 et E un espace vectoriel sur k.

2.1 Définitions et généralités

Définition 2.10. *L'application $q : E \to k$ est une forme quadratique sur E, s'il existe une forme bilinéaire symétrique $\phi : E \times E \to k$ telle que*

$$\forall x \in E : \quad q(x) = \phi(x, x).$$

On dit que q est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique ϕ.

Revenons aux quatre formes bilinéaires vues dans l'exemple 2.1, leurs forme quadratiques successives associées sont :

1. $$q : k \to k, \quad x \mapsto x^2.$$

2. $$q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_2^2.$$

3. $$q : \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)^2 dt.$$

4. $$q : \mathcal{M}_n(k) \to k, \quad A \mapsto trace(A^2).$$