Corrigé de la série de TD N^0 3

Exercice 1 *Soit u une application linéaire de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$*, dont la représentation matricielle dans la base canonique B est donnée par la matrice A suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de A.*

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 3-x & -2 & 2 \\ 2 & -1-x & 2 \\ 2 & -2 & 3-x \end{vmatrix} =_{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{vmatrix} 3-x & -2 & 2 \\ 2 & -1-x & 2 \\ 0 & -1+x & 1-x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 3-x & -2 & 2 \\ 2 & -1-x & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=_{C_2 \leftarrow C_2 + C_3} (1-x) \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 2 \\ 2 & 1-x & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 3-x & 0 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2(3-x)$$

2. *On a donc* $\lambda = 1$ *valeur propre double (ordre de multiplicité de* $\lambda = 1$ *est 2,* $m_1 = 2$*) et* $\lambda = 3$ *valeur propre simple (ordre de multiplicité de* $\lambda = 3$ *est 1,* $m_3 = 1$*).*
3. *Pour chaque valeur propre, déterminer le sous-espace propre correspondant. On donnera une base de chaque sous-espace propre.*

$$\begin{aligned} E_{\lambda=1} &= Ker(A - I) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad 2x - 2y + 2z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+z \\ z \end{pmatrix}, \quad x, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= Vect \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *étant clairement linéairement indépendants, on a bien* *ainsi une base de $E_{\lambda=1}$, donc $dimE_{\lambda=1} = 2 = m_1$. D'autre part,*

$$\begin{aligned}
E_{\lambda=3} &= Ker(A-3I)\\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2\\ 2 & -4 & 2\\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \right\}\\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}, \quad -2y+2z=0, \quad 2x-4y+2z=0, \quad 2x-2y=0 \right\}\\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}, \quad x=y=z \right\}\\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x\\ x\\ x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left\{ \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

et $v_3 = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}$ *est une base de $E_{\lambda=3}$, donc $dimE_{\lambda=3} = 1 = m_3$.*

4. *On a donc $dim(E_{\lambda=1}) = 2 = m_1$ ordre de multiplicité de $\lambda = 1$ et $dim(E_{\lambda=3}) = 1 = m_3$ ordre de multiplicité de $\lambda = 3$. Par th du cours, la dimension de chaque sous-espace propre étant égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante, la matrice est diagonalisable. Une base de vecteur propre est par exemple $B' = (v_1, v_2, v_3)$. La matrice de l'opérateur u dans cette base est*

$$Mat_{B'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage P est par définition $P = [v_1, v_2, v_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et on a $A = PDP^{-1}$.*

Exercice 2

Laissé aux étudiants

Exercice 3 *Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

1. *La matrice A est-elle diagonalisable ? Calculons son polynôme caractéristique*

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0\\ -4 & 4-\lambda & 0\\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (2-\lambda)^3$$

La matrice A admet une unique valeur propre 2, si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice $2I_3$, c.a.d. $A = PDP^{-1} = P2I_3P^{-1} = 2I_3$, ce qui n'est pas le cas, elle n'est donc pas diagonalisable.

2. *Calculons* $(A-2I_3)^2$, $(A-2I_3)^n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *On a*

$$(A-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi,

$$(A-2I_3)^0 = I_3, \quad (A-2I_3)^1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et, pour tout $n \geq 2$, *on a* $(A-2I_3)^n = 0$

3. *On en déduit* A^n :
Notons $B = A - 2I_3$, *on a* $A = A - 2I_3 + 2I_3 = B + 2I_3$ *avec* $B^n = 0$ *pour* $n \geq 2$. *Par ailleurs, les matrices* B *et* $2I_3$ *commutent, ainsi*

$$A^n = (B+2I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k (2I_3)^{n-k}.$$

Avec les C_n^k*sont les coefficients du binôme de Newton :*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!.}$$

Or, pour $k \geq 2$, *on a* $B^k = 0$ *d'où pour* $n \geq 2$,

$$A^n = C_n^0 B^0 (2I_3)^n + C_n^1 B^1 (2I_3)^{n-1} = 2^n I_3 + 2^{n-1} nB$$
$$= 2^n I_3 + 2^{n-1} n(A - 2I_3) = 2^n(1-n)I_3 + 2^{n-1} nA.$$

Exercice 4 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

La matrice A est-elle diagonalisable ? Calculons son polynôme caractéristique

$$P_A(\lambda) = det \begin{pmatrix} -5-\lambda & 3 \\ 6 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (-5-\lambda)(-2-\lambda) - 18 = (\lambda+8)(\lambda-1)$$

On a deux valeurs propres simples et distinctes alors A est diagonalisable, donc il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, *on remarque que* $D = M^3$, *avec* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
Posons $B = PMP^{-1}$, *alors*

$$B^3 = PMP^{-1}PMP^{-1}PMP^{-1} = PM^3P^{-1} = PDP^{-1} = A$$

Exercice 5 *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice dans la base canonique est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que f est trigonalisable.*

$$P_A(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda-1)^2.$$

Le polynôme est scindé alors f est trigonalisable

2. *On a*

$$\begin{aligned}
E_{\lambda=1} &= \left\{u \in \mathbb{R}^3 \quad telque \quad Au = u\right\} \\
&= \left\{ u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad x+z = x, \quad -x+2y+z = y, \quad x-y+z = z\right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad z = 0, \quad x = y\right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}\right\} \\
&= Vect\left\{ u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

Remarque

$dimE_{\lambda=1} = 1 < m_1 = 2$, ordre de multiplicité de $\lambda = 1$ donc A n'est pas diagonalisable.)

3. *On a $AV = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u+v$, on a $Av = u+v$ nous donne $Av - v = u \Rightarrow$ $(A-I_3)v = u$ ou bien $(A - id_{\mathbb{R}^3})v = u$*

4. *Cherchons un vecteur propre w associé à la valeur propre 2 :*
On doit résoudre $Aw = 2w$ c.a.d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z = 2x \\ -x+2y+z = 2y \\ x-y+z = 2z \end{cases}$ ce qui donne $x = z$ et $y = 0$, $w = (1,0,1)$.

On a $det(u,v,w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, donc les vecteurs u, v et$w$ sont linéairement indépendants et on a $card(u,v,w) = 3 = dim\mathbb{R}^3$, donc (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
On a $f(u) = Au = u = u + 0v + 0w$, $\quad f(v) = Av = u+v = u+v+0w$, $\quad f(w) = Aw = 2w = 0u + 0v + 2w$, donc La matrice T de f dans la base $B' = (u,v,w)$ est $T = Mat_{B,B'}(f)$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(u) & f(v) & f(w) \end{array} \\ T = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \end{array}$$

Exercice 6 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

On a $P_A(\lambda) = -(\lambda-1)^3$. *Le polynôme caractéristique est scindé, alors A est trigonalisable. On a*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} \\ T = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array}$$

avec $T = M_{B'}(f)$, *alors d'après la matrice ci dessus on a* $f(v_1) = v_1, \quad f(v_2) = v_1 + v_2 \quad et \quad f(v_3) = v_2 + v_3$.

Posons $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, *alors* $f(v_1) = Av_1 = v_1$ *est équivalente à*

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x-3y+3z \end{pmatrix} = v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

nous donne $y = x, \quad z = y \quad et x - 3y + 3z = z$, *donc on peut prendre* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De même en résolvant l'équation $f(v_2) = Av_2 = v_1 + v_2$ *avec* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *on trouve* v_2 *et en résolvant l'équation* $Av_3 = v_2 + v_3$, *on trouve* v_3.

Exercice 7 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

1. *Montrer que A est diagonalisable :*
   On a $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda-2)(\lambda+1)^2$, *on a* $\lambda = 2$ *est une valeur propre simple et* $\lambda = -1$ *est une valeur propre de multiplicité = 2 donc on doit montrer que* $dimE_{\lambda=2} = 1$ *et* $dimE_{\lambda=-1} = 2$ (***question pour les étudiants***).
2. *D'après le théorème de Cayeley Hamilton on a* $P_A(A) = 0$ *et donc* $-A^3 + 3A + 2I_3 = 0 \Rightarrow A(-A^2 + 3I_3) = -2I_3$ *donc* $A(\frac{-1}{2}(-A^2 + 3I_3)) = I_3$ *et on conclut que* $A^{-1} = \frac{-1}{2}(-A^2 + 3I_3)$
3. *D'après la proposition (7.2.1) page 8 du cours on a*

   $$f \quad diagonalisable \Leftrightarrow P_{min}(X) = (X-2)(X+1) = X^2 - X - 2$$

   Calculons A^n

   On a $P_{\min}(X) = (X+1)(X-2)$ *Par simple division euclidienne, on écrit :*

   $$X^n = Q(X)P_{\min}(X) + R(X)$$

   avec $\deg(R(X)) < \deg(P_{\min}) = 2$, *donc* $R(X) = aX + b$ *et on a*

   $$A^n = R(A).$$

   (Car $P_{\min}(A) = 0$*) On a* $X^n = Q(X)(X+1)(X-2) + aX + b$

On pose alors successivement $X = -1$ puis $X = 2$.
Ce qui donne
$(-1)^n = -a + b$
$2^n = 2a + b$
d'où $a = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$, $b = \frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n)$
et enfin

$$A^n = R(A) = aA + bI$$

Exercice 8 *Résoudre le système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + x_3 \\ x_2' = x_1 + x_3 \\ x_3' = x_1 + x_2 \end{cases}$$

On a le système ci dessus est équivalent à

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X' = AX.$$

Avec A la matrice donnée dans l'exercice précédent, donc $\lambda_1 = 2$ est une valeur propre de multiplicité =1 et $\lambda_2 = -1$ est une valeur propre de multiplicité = 2. La solution est donnée par (voir cours page 10)

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} V_1 + C_2 e^{-t} V_2 + C_3 e^{-t} V_3$$

$(V_1, V_2, V_3$ *sont les colonnes de* $P)$.